# Анализ и синтез скрытых колебаний (пленарный доклад)

# Analysis and synthesis of hidden oscillations (plenary lecture)

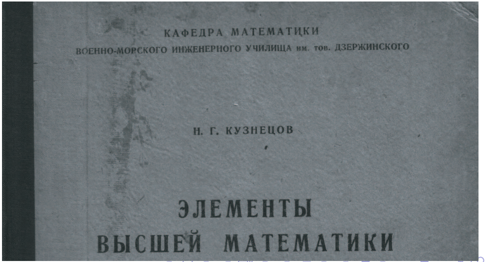
Кузнецов Н.В.

кафедра Прикладной кибернетики
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет
kuznetsov@math.spbu.ru

# посвящается моему прадеду

**Кузнецов Николай Гаврилович**
(1897-1942)

капитан 1-го ранга, кандидат наук, Начальник кафедры математики Военно-морского инженерного училища им. тов. Дзержинского (1930-е годы)



# Содержание

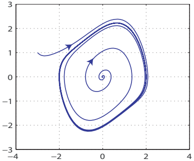
- Моделирование самовозбуждающихся и скрытых колебаний
- Примеры скрытых колебаний в прикладных задачах
  - Системы управления летательными аппаратами
  - Системы фазовой автоподстройки (ФАП)
  - Защищенная (хаотическая) связь
- Аналитико-численные методы анализа скрытых колебаний
  - Нелинейный анализ схем управления с антивиндап
  - Проблемы Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости систем управления
  - Скрытые хаотические аттракторы в электронных цепях Чуа

# Вычисление колебаний

**вычисление самовозбуждающихся аттракторов**
*стандартная процедура вычислений: 1) определить стац. точки 2) после переходного процесса траектории с н.д. из окрестности неустойчивой стац. точки, притягиваются к аттрактору.*

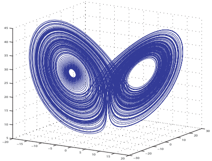
Van der Pol

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y$$



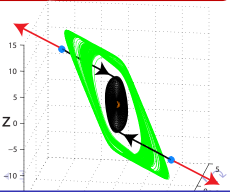

Lorenz

$$x = -\sigma(x - y)$$
$$y = rx - y - xz$$
$$z = -bz + xy$$



**скрытые аттракторы** – *область притяжения не пересекается с малыми окрестностями стац. точек* [Leonov et al., *Phys.Lett.A*, 2011]

✓стандартная вычислительная процедура не работает: все стац. точки устойчивы или их малые окрестности не в области притяжения аттрактора

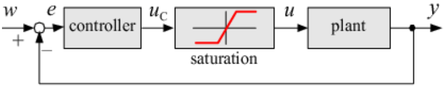


# Скрытые колебания в системах управления самолетами

## **Виндап (windup)** — колебания с нарастающей амплитудой

✓ Катастрофа - YF-22 Raptor (Boeing), 1992

✓ Катастрофа - JAS-39 Gripen (SAAB), 1993



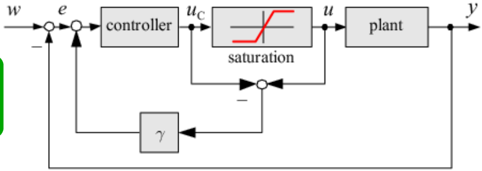




схема устранения виндап в системе управления

Lauvdal T., Murray R.M., Fossen T.I., Stabilization of Integrator Chains in the Presence of Magnitude and Rate Saturations; a Gain Scheduling Approach, *Proc. of CDC, 1997*:
*"Since stability in simulations does not imply stability of the physical control system (an example is the crash of the YF22) stronger theoretical understanding is required"*

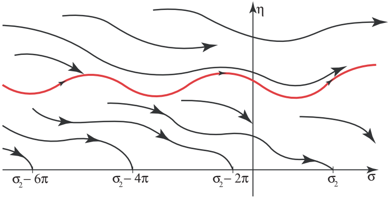
# Скрытые колебания в ФАП

✓ Компьютерные архитектуры: Ian A. Young, ФАП в микропроцессоре i486DX2-50 (1992)

**режим Turbo: бесперебойная работа не гарантировалась**

✓ Губарь Н.А. (1961), *ПММ*, 25

$$\dot{\eta} = \alpha\eta - (1 - a\alpha)(\operatorname{sign}\sin(\sigma) - \gamma),$$
$$\dot{\sigma} = \eta - a(\operatorname{sign}\sin(\sigma) - \gamma)$$



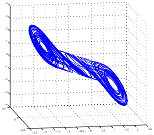


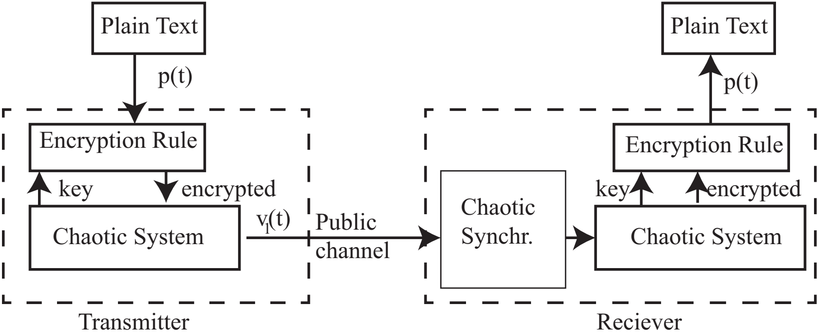
**скрытые колебания:**
численно все траектории стремятся к состояниям равновесия
физически — ограниченная область притяжения

# Скрытые аттракторы в защищенной связи

Tao Yang, A Survey of Chaotic Secure Communication Systems, Int. J.of Computational Cognition, 2(2), 2004

$$\dot{x} = \alpha(y - x + f(x))$$
$$\dot{y} = x - y + z$$
$$\dot{z} = -\beta y - \gamma z$$
$$f(x) = bx + (a\text{-}b)\mathrm{sat}(x)$$



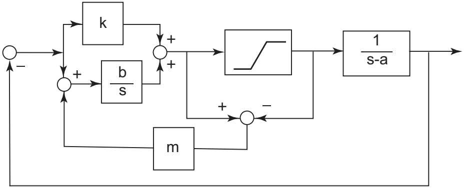


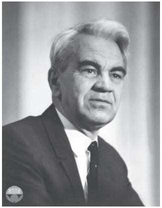

**синхронизация показана для самовозбуждающихся аттракторов Чуа, не для скрытых аттракторов**

# Содержание

- Моделирование самовозбуждающихся и скрытых колебаний
- Примеры скрытых колебаний в прикладных задачах
  - Системы управления летательными аппаратами
  - Системы фазовой автоподстройки (ФАП)
  - Защищенная (хаотическая) связь
- Аналитико-численные методы анализа скрытых колебаний
  - Нелинейный анализ схем управления с антивиндап
  - Проблемы Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости систем управления
  - Скрытые хаотические аттракторы в электронных цепях Чуа

# Нелинейный анализ схем с антивиндап



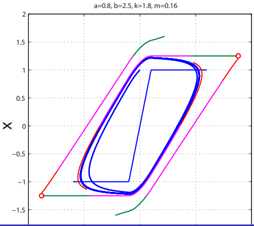



Развитие идей М.В.Келдыша (Труды ЦАГИ, 557, 1944: *применение демпферов для устранения флаттера органов управления самолета*)

матрица линейной части системы неустойчива: eig$\lambda^1_{1,2} = \{a, -bm\}$,
матрица линейной части с учетом $\mathrm{sat}(\sigma)$ при $|\sigma| < 1$: устойчива

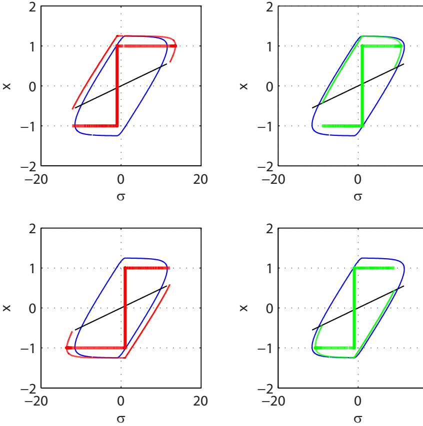
Устойчивое состояние равновесия $(0,0)$; звено антивиндап (т.е. при $m \neq 0$) добавляет седловые точки: $\sigma = \pm(1 + \frac{1}{am}), x = \pm\frac{1}{a}$.

**Задача:** оценить область начальных данных для которых решения системы ограничены и стремятся к нулевому состоянию равновесия.



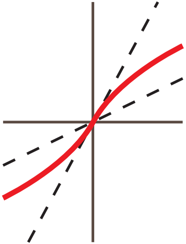
$$\dot{x} = ax - \mathrm{sat}(\sigma),$$
$$\dot{\sigma} = (ka + b)x - bm\sigma + (bm - k)\mathrm{sat}(\sigma),$$
$$a, b, m, k > 0,$$
$$\mathrm{sat}(\sigma) = \begin{cases} \mathrm{sign}(\sigma) & |\sigma| \geqslant 1 \\ \sigma & |\sigma| < 1. \end{cases}$$

Оценка области устойчивости через системы сравнения [Леонов, Кузнецов, Погромский, ДАН, т.445, 2012]



# Скрытые колебания в гипотезах Айзермана и Калмана

Пусть линейная система $\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{b}k\mathbf{c}^*\mathbf{z}$ устойчива $\forall\, k\in(k_1,k_2)$.
Будет ли устойчива нелинейная система $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}\varphi(\sigma)$, $\sigma=\mathbf{c}^*\mathbf{x}$
с нелинейностью из рассмотренного линейного сектора



$1949:\ \ k_1 < \varphi(\sigma)/\sigma < k_2$

$1957:\ \ k_1 < \varphi'(\sigma) < k_2$

в общем случае гипотезы неверны: Айзермана $n\geq 2$, Калмана $n\geq 4$

гипотеза Айзермана: Малкин, Еругин, Красовский $(n=2)$, Плисс $(n=3)$

# Проблема Калмана (1957)

**Обзорная статья**: Брагин, Вагайцев, Кузнецов, Леонов, Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Известия РАН. ТиСУ, N4, 2011

- Fitts R., 1966: серия контрпримеров в $\mathbb{R}^4$, нелинейность $\varphi(\sigma) = \sigma^3$ (некоторые примеры неверны, но некоторые верны)
- Барабанов Н.Е., 1979–1988:
  - построение "контрпримеров" в $\mathbb{R}^4$ с нелинейностью "близкой" к $\operatorname{sign}(\sigma)$ с сектором линейной устойчивости $(0, k)$

  *пробелы в док-ве были отмечены у Глуцюк, Meisters, Bernat & Llibre*
- Леонов Г.А., 1996: док-во гипотезы для $\mathbb{R}^3$ частотными методами
- Bernat J. & Llibre J., 1996: построение "контрпримеров" в $\mathbb{R}^4$ с сектором $(0, k)$ и нелинейностью "близкой" к $\operatorname{sat}(\sigma)$
- Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., 2010:
  - аналитико-численный метод построения контрпримеров
  - контрпримеры в $\mathbb{R}^4$, нелинейность $\tanh(\sigma) : \ 0 < \tanh'(\sigma) \leqslant 1$

# Обоснование метода гармонического баланса

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}\varphi_\varepsilon(r^*\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Eigs($\mathbf{P}$): $\lambda_{1,2} \pm i\omega_0$,

$\lambda_{j>2}$(Re $\lambda_{j>2} < 0$)

$\Rightarrow \exists \mathbf{x} = Sy :$

$$\dot{y}_1 = -\omega_0 y_1 + b_1\varphi_\varepsilon(y_1 + \mathbf{c}_3^*\mathbf{y}_3)$$

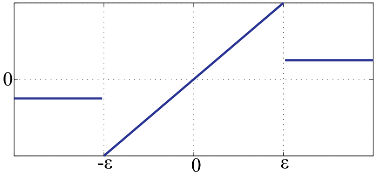
$$\dot{y}_2 = +\omega_0 y_1 + b_2\varphi_\varepsilon(y_1 + \mathbf{c}_3^*\mathbf{y}_3)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_3 = \mathbf{A}_3\mathbf{y}_3 + \mathbf{b}\varphi_\varepsilon(y_1 + \mathbf{c}_3^*\mathbf{y}_3)$$

$\mathbf{A}_3$–уст-вая $(n-2)\times(n-2)$-матрица

$\mathbf{b}, \mathbf{c}$ — $(n-2)$-вектора.

$$\varphi_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \mu\sigma, & \forall|\sigma| \le \varepsilon \\ \mathrm{sign}(\sigma)M\varepsilon^3, & \forall|\sigma| > \varepsilon \end{cases}$$




Сектор: $\mu\sigma \geqslant \varphi_\varepsilon \geqslant 0$

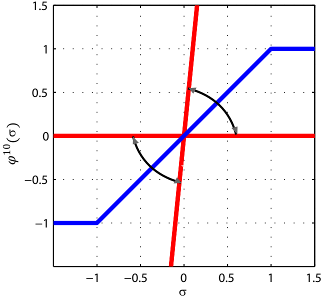
**Теорема.** Если $b_1 < 0$ и $0 < (\mu b_2\omega_0(\mathbf{c}_3^*\mathbf{b}_3 + b_1) + b_1\omega_0^2)$, то для дост. малого $\varepsilon$ существует периодическое решение с н.д.

$$y_1(t) = -\sin(\omega_0 t)y_2(0) + O(\varepsilon),\ y_2(t) = \cos(\omega_0 t)y_2(0) + O(\varepsilon),\ \mathbf{y}_3(t) = O(\varepsilon)$$

$$y_1(0) = O(\varepsilon^2),\ y_2(0) = -\sqrt{\frac{\mu(\mu b_2\omega_0(\mathbf{c}_3^*\mathbf{b}_3 + b_1) + b_1\omega_0^2)}{-3\omega_0^2 M b_1}} + O(\varepsilon),\ \mathbf{y}_3(0) = O(\varepsilon^2)$$

# Контрпримеры к проблеме Айзермана и Калмана

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 - 10\,\varphi(\sigma) \\
\dot{x}_2 &= x_1 - 10.1\,\varphi(\sigma) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -x_3 - x_4 + \varphi(\sigma) \\
\sigma &= x_1 - 10.1\,x_3 - 0.1\,x_4
\end{aligned}$$




**Теорема:** $\varphi(\sigma) = \varphi^0(\sigma)$ $\exists$ пер-кое решение $x_1(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0,\ x_2(0) = -1.7513$

гипотеза Айзермана: $0 \leqslant \varphi^j(\sigma) \leqslant 1,$

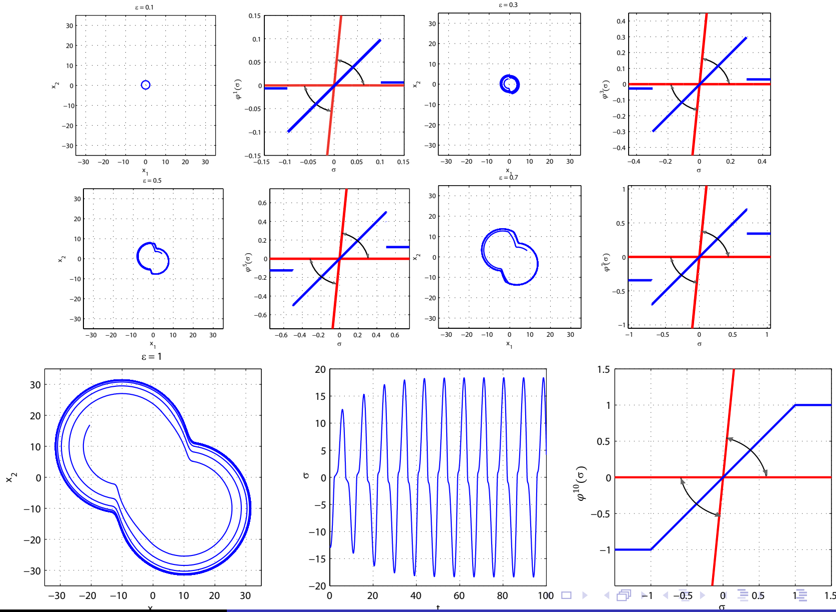
$$\varphi^j(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & |\sigma| \le \varepsilon_j; \\ \mathrm{sign}(\sigma)\varepsilon_j^3, & |\sigma| > \varepsilon_j \end{cases} \quad \varepsilon_j = 0.1, ..., 1, \quad \varphi^{10}(\sigma) = \mathrm{sat}(\sigma)$$

гипотеза Калмана: $iN \leqslant \psi^{i\prime}(\sigma) \leqslant 1 \qquad 0 < \frac{d}{d\sigma}\tanh(\sigma) \le 1$

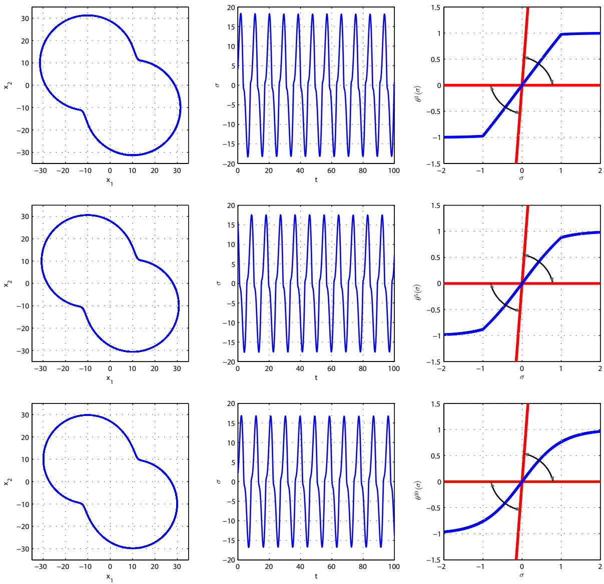
$$\psi^i(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & |\sigma| \le 1; \\ \mathrm{sign}(\sigma) + i(\sigma - \mathrm{sign}(\sigma))N, & |\sigma| > 1 \end{cases} \quad N = 0.01, i = 1, .., 5$$

$$\theta^i(\sigma) = \mathrm{sat}(\sigma) + i(\tanh(\sigma) - \mathrm{sat}(\sigma))/10 \quad i = 1, .., 10 \quad \theta^{10}(\sigma) = \tanh(\sigma)$$

# Скрытые колебания: контрпример к гипотезе Айзермана



# Скрытые колебания: контрпримеры к гипотезе Калмана




$$\dot{x}_1 = -x_2 - 10\,\varphi(\sigma)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 10.1\,\varphi(\sigma)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = -x_3 - x_4 + \varphi(\sigma)$$
$$\sigma = x_1 - 10.1\,x_3 - 0.1\,x_4$$

$$\varphi(\sigma) = \theta^i(\sigma) =$$
$$\mathrm{sat}(\sigma) + i(\tanh(\sigma) - \mathrm{sat}(\sigma))/10$$
$$i = 1, .., 10$$
$$\tanh(\sigma) = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}$$

Контрпример к гипотезе Калмана (i=10)

$\left(0 < \frac{d}{d\sigma}\tanh(\sigma) \le 1\right)$

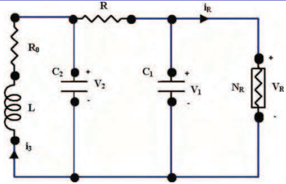
$\exists$ периодическое решение

лин. система устойчива

# Аттракторы электронной цепи Чуа

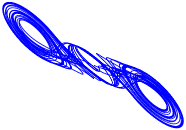
L.Chua (1983)

$$\dot{x} = \alpha\big(y - x - f(x)\big),$$
$$\dot{y} = x - y + z,$$
$$\dot{z} = -(\beta y + \gamma z),$$




$$f(x) = m_1 x + \mathrm{sat}(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x+1| + |x-1|).$$

защищенная передача данных

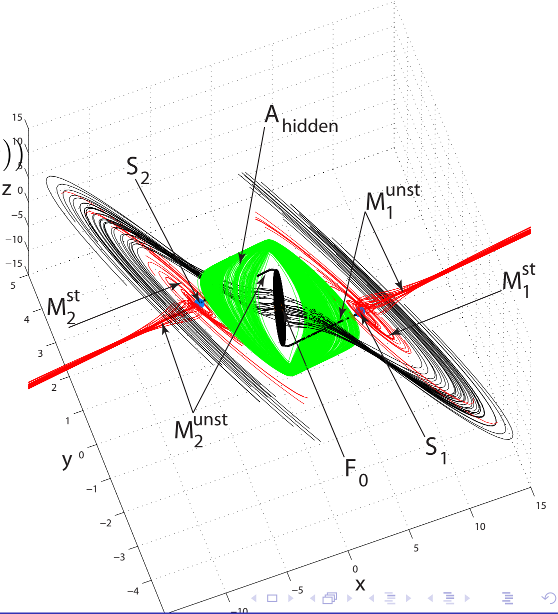


1983–н.в.: Chua, Matsumoto, Bilotta, Pantano и др.: вычисление самовозбуждающихся аттракторов Чуа стандартной выч.процедурой: траектория с н.д. из окрестности нулевого неуст. равновесия, притягивается к аттрактору [A gallery of Chua attractors, World Scientific, 2008]

L.Chua, 1992: нулевое сост. равновесия устойчиво $\Rightarrow$ нет аттрактора

# Скрытый хаотический аттрактор системы Чуа

$$\dot{x} = \alpha(y - x - m_1 x - \psi(x)),$$
$$\dot{y} = x - y + z,$$
$$\dot{z} = -(\beta y + \gamma z)$$
$$\psi(x) = (m_0 - m_1)\mathrm{sat}(x)$$
$$\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732$$
$$\gamma = 0.0052$$
$$m_0 = -0.1768$$
$$m_1 = -1.1468$$



# Основные публикации: 2011-2012 годы

✓ Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Погромский А.Ю., Анализ области устойчивости системы управления с антивиндап для неустойчивого объекта, **Доклады Академии Наук**, 445, **2012**
✓ Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I., Hidden attractors in smooth Chua's systems, **Physica D**, **2012**
✓ G.A. Leonov, B.R. Andrievskii, N.V. Kuznetsov, A.Yu. Pogromskii, Aircraft control with anti-windup compensation, **Differential equations**, 48(13), **2012**
✓ Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I, Localization of hidden Chua's attractors , **Physics Letters**, Section A, 375(23), **2011**
✓ G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, O.A. Kuznetsova, S.M. Seledzhi, V.I.Vagaitsev, Hidden oscillations in dynamical systems, **Transaction on Systems and Control**, 6(2), **2011** (**survey**)
✓ Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В., Кузнецова О.А. Современные методы символьных вычислений: ляпуновские величины и 16-я проблема Гильберта, **Труды СПИИРАН**, 16, **2011** (**обзор**)
✓ Брагин В.О., Вагайцев В.И, Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана и Калмана и цепи Чуа. **Известия РАН. Теория и Системы Управления**, 4, **2011** (**обзор**)
✓ Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Алгоритмы поиска скрытых колебаний в проблемах Айзермана и Калмана. **Доклады академии наук**, 439(2), **2011**
✓ Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems, **18th World Congress of the International Federation of Automatic Control** (IFAC WC), **2011** (**survey paper**)
Kuznetsov N.V., Leonov G.A., and Vagaitsev V.I., Analytical-numerical method for attractor localization of generalized Chua's system, IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 4(1), **2010**

# Вопросы