СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА

Г. А. Леонов

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Г. А. Леонов

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Москва ♦ Ижевск

2006

Оглавление

Введение

Другое, более точное название этой книги — «О пользе классической теории устойчивости движения для изучения хаотической динамики».

Безусловно, в каждом серьезном обзоре или книге по хаотической динамике можно встретить такие понятия классической теории устойчивости как ляпуновская экспонента и ляпуновскии показатель. Однако ни в одном из них нет хотя бы упоминания об открытом в 1930 году выдающимся немецким математиком Оскаром Перроном [108] эффекте инверсии знака ляпуновского показателя при проведении процедуры линеаризации. В настоящей книге изложены эти результаты О. Перрона и их дальнейшее развитие [22–24]. Здесь показано, что перроновские эффекты возможны только на границах устойчивого по первому приближению потока решений. Внутри потока устойчивость полностью определяется отрицательностью характеристических показателей линеаризованных систем.

Во многих книгах и обзорах сказано, что определяющим свойством странного аттрактора является чувствительность его траекторий по отношению к начальным данным. Однако как это свойство связано с классическими понятиями неустойчивости? Многие известные исследователи предполагают, что такая чувствительность по отношению к начальным данным адекватна неустойчивости по Ляпунову [3, 82]. Однако это справедливо только для дискретных динамических систем. Для непрерывных систем оказалось необходимым вспомнить почти забытое понятие неустойчивости по Жуковскому. Один из основателей современной аэродинамики, выдающийся русский ученый Николай Егорович Жуковский ввел свое понятие устойчивости движения в 1882 году [15, 16] — на десять лет раньше публикации исследований А. М. Ляпунова (1892 [42]). Понятие неустойчивости по Жуковскому адекватно чувствительности траекторий по отношению к начальным данным для непрерывных динамических систем. В этой книге рассматриваются понятия неустойчивости по Жуковскому [16], по Пуанкаре [57] и по Ляпунову [42] и их адекватность чувствительности траекторий на странных аттракторах по отношению к начальным данным.

Для изучения устойчивости по Жуковскому здесь вводится новый инструмент исследования — подвижное сечение Пуанкаре. С его помощью проводится обобщение широко известных теорем Андронова — Витта, Демидовича, Борга, Пуанкаре.

В настоящее время проблема обоснования нестационарных линеаризации для сложных, непериодических движений на странных аттракторах поразительно напоминает ситуацию стодвадцатилетней давности. Основатели теории автоматического регулирования Д. К. Максвелл (1868 [104, 43]) и И. А. Вышнеградский (1876 [10, 43]) смело проводили линеаризацию в окрестности стационарных движений, оставив обоснование такой линеаризации А. Пуанкаре (1886 [57]) и А.М.Ляпунову (1892 [42]). В настоящее время среди широкого круга специалистов по хаотической динамике возникло стойкое убеждение, что положительность старшего характеристического показателя линейной системы первого приближения влечет за собой неустойчивость решений исходной системы (см., например [48], стр.227, [106], стр. 72, [90], стр.26, [75], стр. 323, [20], стр. 141, [110]). Более того, существует огромное количество компьютерных экспериментов, где используются различные численные методики вычисления характеристических показателей и ляпуновских экспонент линейных систем первого приближения. При этом авторы, как правило, совершенно игнорируя обоснование процедуры линеаризации, строят из полученных численных значений показателей и экспонент различные численные характеристики аттракторов исходных нелинейных систем (ляпуновские размерности, метрические энтропии и т. д.). Иногда частичное обоснование процедуры линеаризации аргументируется компьютерными экспериментами. Так, например, компьютерные эксперименты [111], [48] показывают совпадение ляпуновской и хаусдорфовой размерности аттракторов Хенона, Каплана–Йорке и Заславского. Однако для B-аттракторов Хенона и Лоренца такое совпадение не имеет места [25, 26].

Таким образом, линеаризации вдоль траекторий на странных аттракторах требуют своего обоснования. Эта задача является мощным стимулом для развития нестационарной теории неустойчивости по первому приближению. В настоящей книге описано современное состояние проблемы обоснования нестационарных линеаризации.

Эффективным аппаратом исследования в классической теории устойчивости является метод функций Ляпунова — так называемый прямой метод Ляпунова. Оказалось, что и в теории размерности странных аттракторов можно успешно продвинуться, развивая аналоги прямого метода Ляпунова. Это интересное направление исследований также обсуждается в настоящей книге.

Для изучения хаоса в дискретных динамических системах оказался весьма эффективным прямой метод Ляпунова, объединенный с эффективным алгебраическим аппаратом современной теории управления. Для дискретных систем обычно нет той наглядности представлений в фазовом пространстве, которая характерна для непрерывных систем с гладкими траекториями, заполняющими это пространство. Однако этот недостаток может быть частично ликвидирован, если вместо наблюдения за изменением в дискретном времени расстояния между двумя решениями рассматривать в начальный момент времени отрезок прямой, связывающий начальные данные, и дальнейшие его итерации — последовательность непрерывных кривых. Уменьшение или увеличение длин этих кривых дает информацию об устойчивости или неустойчивости и о других свойствах решений дискретных систем. Рассмотрение длин таких непрерывных кривых может быть положено и в основу определений устойчивости и неустойчивости, что особенно важно для неинъективных отображений, определяющих соответствующие дискретные системы (а именно они являются в настоящее время широко известными генераторами хаоса). Дело в том, что в некоторых случаях две траектории могут «слипнуться» за конечное число итераций. Однако итерируемый отрезок, связывающий начальные данные, может иметь все большую длину даже с учетом такого слипания. Оказалось, что механизм растягивания в ряде случаев является достаточно сильным и его можно обнаружить и оценить, применяя весь богатый арсенал прямого метода Ляпунова, который можно соединить с эффективным алгебраическим аппаратом: леммой Калмана–Сеге и леммой Шепелявого. Последние дают оценки растяжения длин итерируемых кривых в терминах частотных неравенств, эффективно проверяемых для конкретных динамических систем. Описанная здесь методика подробно излагается в настоящей книге.

За последние пятьдесят лет сформировалось еще одно интересное направление в теории устойчивости — метод априорных интегральных оценок, в основе которого содержится применение преобразований Фурье как унитарных операторов в некоторых функциональных пространствах. Здесь будет показано, что этот метод может дать содержательные оценки периодов колебаний дискретных динамических систем. Применение этого метода к различным одномерным отображениям дает оценки отсутствия колебаний с периодом 3. Широко известен тезис о том, что для одномерных дискретных динамических систем «период три влечет хаос». Поэтому нетривиальные оценки периодов колебательных движений позволяют сделать количественные суждения о сценариях перехода к хаотической динамике.

Автор пытался сделать изложение замкнутым и как можно более простым. Все используемые понятия сведены в точные определения, основные математические факты подробно доказаны. Многие классические результаты снабжены новыми, более простыми доказательствами. Основное содержание книги является развитием обзоров [24, 26].

Книга адресована прежде всего специалистам по теории динамических систем, дифференциальным уравнениям и их приложениям. В ней показано, как современные проблемы теории хаоса указывают естественные и простые пути модернизации классических методов теории устойчивости движения. Поскольку для ее понимания достаточно знакомства со стандартными курсами алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений, книга может быть полезна студентам и аспирантам математических специальностей.

Работа выполнена на кафедре теоретической кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и в лаборатории управления сложными системами НИИ проблем машиноведения РАН при постоянной поддержке их заведующих: В. А. Якубовича и А. Л. Фрадкова.

Традиции классической теории устойчивости движения бережно сохранялись и развивались на кафедре дифференциальных уравнений, руководимой В. А. Плиссом. Они оказали огромное влияние на автора этой книги.

Содержательные советы рецензентов А. Х. Гелига и А. Н. Чурилова существенно улучшили содержание многих разделов книги.

Я благодарен Л. П. Виноградовой, Ю. К. Зотову и С. Н. Пакшину, которые подготовили рукопись к печати.

Частично работа над книгой финансировалась программой фундаментальных исследований Президиума РАН № 19 «Управление механическими системами» (проект 1.4 Управление колебаниями и хаосом в физико-технических системах), грантами РФФИ, грантом НШ – 2257.2003.1 программы поддержки ведущих научных школ Министерства промышленности и науки России.

e-mail: leonov@math.spbu.ru

Санкт-Петербург, 2005