Нелинейная стохастическая оптимизация методом Монте-Карло

Л. Сакалаускас
Институт математики и информатики, Вильнюс, Литва[1]

Рассматривается метод нелинейной стохастической оптимизации сериями выборок Монте-Карло. Предложена процедура останова алгоритма, основанная на проверке статистической гипотезы равенства градиента целевой функции нулю и оценке ее доверительного интервала. Предложены правила регулирования объема выборок и доказана п. н. сходимость с линейной скоростью по числу итераций полученной процедуры к решению задачи. Численное моделирование и решение практических примеров подтвердили теоретические выводы и показали, что разработанный метод позволяет решать задачи стохастической оптимизации с заданной точностью за приемлемое вычислительное время.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача нелинейной стохастической оптимизации:

$$F(x) = Ef(x,\omega) \to \min_{x \in R^n}, \tag{1}$$

где ω — случайное событие в вероятностном пространстве Ω, Σ, P_x, функция $f : R^n \times \Omega \to R^n$ удовлетворяет обычным условиям измеримости, интегрируемости и дифференцируемости, а мера P_x является абсолютно непрерывной и, в общем случае, зависящей от параметра x, иначе говоря, она может быть определена посредством некой функции плотности $p : R^n \times \Omega \to R_+$.

Подобные задачи возникают во многих приложениях техники, бизнеса, статистики, менеджмента, банковского дела, и т. д. В методах стохастической градиентной оптимизации, которые обычно предлагается использовать для их решения, существует два способа добиться сходимости применяемого алгоритма. В случае первого подхода сходимость можно обеспечить за счет регулирования некоторым образом шаговых множителей в схеме стохастической аппроксимации (см. [1–6]). Несмотря на весьма большое число работ, посвященных этому направлению построения методов оптимизации, практическое применение стохастической аппроксимации затрудняется отсутствием условий останова алгоритмов и сравнительно медленной их сходимостью.

Другой способ обеспечения сходимости заключается в разработке методов с относительной ошибкой оценки стохастического градиента. Согласно теоретической схеме для обеспечения сходимости в таких методах дисперсия оценки нормы стохастического градиента в процессе поиска должна оставаться пропорциональной квадрату этой нормы (см. [4]). Настоящая работа посвящена разработке метода стохастической оптимизации подобного типа, использующего серии случайных выборок, последовательно генерируемых методом Монте-Карло (см. [7, 8]).

2. Оценки методом Монте-Карло для стохастической оптимизации

Введем систему выборочных оценок, получаемых методом Монте-Карло, которые будем использовать в процессе итеративной оптимизации.

Предположим, что имеется возможность генерировать случайные реализации ω в любой заданной точке x, а также вычислять соответствующие значения функции f. Пусть для какой-либо точки $x \in R^n$ получена случайная выборка объема N:

$$Y = (y^1, y^2, \ldots, y^N), \tag{2}$$

где y^i являются независимыми копиями случайной величины ω, распределенной с плотностью $p(x_i) : \Omega \to R_+$, а также вычислены выборочные оценки:

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x, y^i), \tag{3}$$

$$\tilde{D}^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (f(x, y^i) - \tilde{F}(x))^2. \tag{4}$$

Заметим, что в настоящее время достаточно хорошо разработана техника стохастического дифференцирования, позволяющая при оценке целевой функции получить и оценки ее градиента, не используя значительных дополнительных вычислительных затрат (см. [9–11]). Таким образом, естественно предположить, что в случае генерирования выборки (2) также имеется в наличии и оценка методом Монте-Карло градиента целевой функции:

$$\tilde{G}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} G(x, y^i), \ x \in D \subset R^n, \tag{5}$$

где $G : R^n \times \Omega \to R^n$ означает стохастический градиент, т. е. такой случайный вектор, что $EG(x, \omega) = \nabla F(x)$ (см. [3, 4]). Обозначим выборочную ковариационную матрицу:

$$A(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (G(x, y^i) - \tilde{G}(x))(G(x, y^i) - \tilde{G}(x))'. \tag{6}$$

Теперь предположим, что имеется некоторое начальное приближение $x^0 \in R^n$, а также получена соответствующая выборка (2) некого начального объема N^0, на основе которой вычислены монтекарловские оценки (3)–(6). Для поиска решения задачи нелинейной оптимизации будем использовать градиентный поиск с постоянным шагом:

$$x^{t+1} = x^t - \rho \tilde{G}(x^t), \tag{7}$$

где ρ — некий шаговый множитель.

Выбор объема выборки (2) имеет большое значение, поскольку точность оценок (3)–(6), в основном зависит от этого объема. Обсудим этот выбор более подробно при итерировании процедуры (7). Иногда объем выборки предлагается выбирать достаточно большим с целью обеспечения заданной точности выборочных оценок на всех шагах алгоритма (см. [12,13]). Обычно этот гарантирующий точность объем достигает 1000-1500 и более, что при большом числе итераций может привести к значительным вычислительным затратам [13]. Надо также иметь в виду, что фиксированный объем выборки, будучи даже весьма большим, гарантирует сходимость лишь в некоторую окрестность точки оптимума (см. [4,14]). С другой стороны, нет никакой необходимости вычислять выборочные оценки с высокой точностью на всех итерациях, поскольку в начале оптимизации достаточно оценить приближенное направление, ведущее к оптимуму, а выборки достаточного объема вычислять лишь при принятии решения о его нахождении. Как следует из ниже приводимой теоремы, подобного выбора можно добиться, если объем выборок на каждой итерации брать обратно пропорциональным квадрату нормы оценки градиента.

Теорема 1 *Пусть функция $F : R^n \to R$, выраженная математическим ожиданием (1), является ограниченной снизу: $F(x) \geq F^+ > -\infty$, $\forall x \in R^n$, и дифференцируемой, а ее градиент удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$.*

Предположим, что для любого $x \in R^n$ и любого $N \geq 1$ имеется возможность генерировать выборки (2) случайных независимых векторов, одинаково распределенных с плотностью $p(x, \cdot)$, на основе которых вычисляются оценки (3), (5) и (6). Предположим также, что дисперсия нормы стохастического градиента равномерно ограничена: $E|G(x, \omega) - \nabla F(x)|^2 < K$, $\forall x \in R^n$.

Если, начиная с некого начального приближения $x^0 \in R^n$ последовательность $\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ определена согласно (7), где объем выборки на каждом шаге, начиная с некоторого начального значения N^0, определяется по правилу:

$$N^{t+1} \geq \left[\frac{C}{|\tilde{G}(x^t)|^2}\right] + 1, \tag{8}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} |\nabla F(x^t)|^2 = 0 \quad \textit{п. н.}, \tag{9}$$

если $0 < \rho \leq 1/L,\ C \geq 4K$.

Скорость сходимости определяется другой теоремой.

Т е о р е м а 2 *Пусть все условия предыдущей теоремы выполнены и, кроме того, функция $F(x)$ является дважды дифференцируемой, где $||\nabla F(x)||^2 \geq l > 0,\ \forall x \in R^n$. Если x^+ является стационарной точкой задачи и*

$$0 < \rho \leq \min\left[\frac{1}{L}, \frac{3}{4(1+l)}\right], C \geq K\max[4, \frac{L^2}{l}], \beta = 1 - \rho(l - \frac{kL^2}{C}) < 1,$$

то

$$E\left(|x^t - x^+|^2 + \frac{\rho K}{N^t}\right) \leq \left(|x^0 - x^+|^2 + \frac{\rho K}{N^0}\right)\beta^t,\ t = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Доказательства обеих теорем, получаемые с помощью мартингального подхода, приведены в Приложении.

Обсудим численную реализацию полученных результатов. Длина шага ρ обычно подбирается экспериментальным путем. Иногда для этого можно использовать специфику задачи, выбирая этот коэффициент, например, методом простой итерации (см., например, [14, 15]). Хотя порядок сходимости рассматриваемой процедуры (7) обеспечивается условием (8), согласно которому объем выборки должен быть обратно пропорциональным квадрату нормы оценки градиента, необходимо также иметь в виду метрику, в которой вычисляется эта норма. Если принять $C = n\,Fish(\gamma, n, N^t - n)$, где через $Fish(\gamma, n, N^t - n)$ обозначен γ-квантиль распределения Фишера с $(n, N^t - n)$ степенями свободы, а норму градиента вычислять в метрике, индуцированной ковариационной матрицей (6), то правило выбора объема выборки примет вид:

$$N^{t+1} = \min(\max(\left[\frac{n\,Fish(\gamma, n, N^t - n)}{\rho(\tilde{G}(x^t)' A(x^t))^{-1}\tilde{G}(x^t)}\right] + n, N_{\min}), N_{\max}), \tag{11}$$

где чтобы избежать слишком малых или больших выборок введены минимальное и максимальное значения $N_{\min}$ ($\approx$ 20-50) и $N_{\max}$ (обычно $\approx$

2000 - 5000). Несложно убедиться, что в случае (11) погрешность оценки градиента не превышает квадрата его нормы с вероятностью не более $1-\gamma$ [16]. Тестирование алгоритма показывает, что правило (11) по сравнению с (8) приводит к более устойчивому и экономному генерированию случайных выборок. Иногда можно использовать аппроксимацию $C = \chi^2_\gamma(n)$, поскольку на большинстве итераций $N^t >> n$. Заметим, что $N_{\max}$ можно также выбирать так, чтобы длина доверительного интервала оценки целевой функции не превышала некоторой заданной величины (см. следующий раздел).

Следовательно, погрешность $|x^t - x^+|^2$ и объем выборки N^t обладают линейным порядком изменения, определяемым значением $0 < \beta < 1$, зависящим, в свою очередь от обусловленности матрицы Гессе целевой функции и постоянной C в выражении (10). Используя метод доказательства теоремы 1, можно показать, что $\frac{N^t}{N^{t+1}} \approx \beta$. В таком случае с помощью формулы геометрической прогрессии получаем оценку:

$$\sum_{i=0}^{t} N^i \approx N^t Q,$$

где Q — некоторая постоянная. Теперь заметим, что точность решения задачи оптимизации определяется величиной объема выборки в момент принятия решения о нахождении оптимума. Пусть это решение принято на t-ой итерации, на которой была сгенерирована выборка объема N^t. В таком случае отношение объема всех вычислений, потраченных на поиск решения, равного $\sum_{i=0}^{t} N^i$, к объему выборки N^t, на основе которой принято решение останова, будет ограничено некоторой постоянной, которая, вообще не зависит от требуемой точности. Таким образом, если существует некий вычислительный ресурс, необходимый для вычисления целевой функции с требуемой точностью, то поиск оптимума с той же точностью потребует вычислений лишь в несколько раз больше этого ресурса. Это позволяет разрабатывать экономные алгоритмы стохастической оптимизации.

3. Статистическая проверка гипотезы оптимальности и правило останова

На каждом шаге алгоритма необходимо проверять оптимальность полученного решения. Согласно Теореме 1 градиент целевой функции п. н. стремится к нулю. Поскольку нам известны только монтекарловские оценки целевой функции и ее градиента, то мы можем лишь проверять статистическую гипотезу оптимальности, которая в нашем случае сводится к проверке равенства градиента нулю. Таким образом, решение о нахождении оптимума может быть принято, если, во-первых, статистическая гипотеза равенства градиента нулю не отвергается с заданным уровнем значимости, во-вторых, объем выборки является достаточным, чтобы оценить целевую функцию с достаточно малым доверительным интервалом.

При разработке соответствующих статистических критериев необходимо иметь в виду, что распределение одно- и многомерных выборочных средних (3) и (5) можно аппроксимировать одно- и многомерным нормальным законом (см. [17–19]). В таком случае тестировать стационарность полученного решения можно с помощью хорошо известной T^2-статистикой Хотеллинга (см. [20]). Т. е. гипотеза оптимальности не отклоняется в точке x^t с уровнем значимости $1-\mu$, если выполнено условие:

$$(N^t - n)(\tilde{G}(x^t))'(A(x^t))^{-1}(\tilde{G}(x^t))/n \leq Fish(\mu, n, N^t - n). \qquad (12)$$

При оценке точности оценки (3) мы можем опять воспользоваться фактом асимптотической нормальности и считать, что целевая функция оценена с достаточной точностью, если ее доверительный интервал не превышает некоторой заданной величины ϵ:

$$\eta_\beta \tilde{D}(x^t)/\sqrt{N^t} \leq \epsilon, \qquad (13)$$

где η_β является β-квантилем стандартного нормального распределения, а $\tilde{D}^2(x^t)$ — выборочная дисперсия (4).

Таким образом, алгоритм статистической оптимизации заключается в последовательном итерировании (7), регулируя объем выборки согласно правилу (8) или (11) и проверяя на каждом шаге условия (12) и (13). Если эти условия на какой-либо итерации выполняются, то у нас нет оснований для отклонения гипотезы оптимальности, и мы можем остановить алгоритм и принять решение о нахождении оптимума с требуемой точностью. Но, если хоть одно из условий (12) или (13) не выполнено, то необходимо продолжить оптимизацию и генерировать следующую выборку. Как следует из результатов предыдущего раздела, процесс оптимизации остановится п. н. после генерирования конечного числа выборок Монте-Карло.

Рассмотрим результаты компьютерного моделирования. Поскольку гладкие функции в окрестности оптимума хорошо аппроксимируются квадратичными функциями, рассмотрим применение предложенного подхода для функций следующего вида:

$$F(x) \equiv Ef(x+\omega) \to \min, \qquad (14)$$

где

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n}(a_i y_i^2 + b_i(1 - cos(c_i y_i))),$$

$y_i = x_i + \omega_i$, ω_i — случайные нормально $\mathcal{N}(0, d^2)$ распределенные величины, $d = 0.5$, $a = (8.00, 5.00)$, $b = (3.70, 1.00)$, $c = (0.45, 0.50)$, $n = 2$.

Заметим, что эту задачу можно рассматривать как стохастический вариант задачи оптимизации с детерминистской целевой функцией f, при вычислении которой на значения x накладывается гауссовский шум, связанный, например, с погрешностями измерений. Рассматриваемая целевая функция не является выпуклой.

Качество критериев останова, рассмотренные выше, определяется скоростью сходимости распределений оценок (7), (11) к предельному закону [21]. Эта сходимость исследовалась методом статистического моделирования при $n = 2$, используя для оценки градиента метод (3). Оптимальная точка известна: $x^+ = 0$. Генерировалось 400 выборок Монте-Карло объема $N = (50, 100, 200, 500, 1000)$, для которых вычислялись T^2-статистики (12) для различных точек x. Далее проверялась гипотеза соответствия распределения этих статистик распределению Фишера по критериям ω^2 и Ω^2 [20]. Для выборки объема $N = 50$ значение первого критерия оказалось равным $\omega^2 = 0.2746$ при критическом значении $0.46 (p = 0.05)$, а второго $\Omega^2 = 1.616$ при критическом значении $2.49 (p = 0.05)$. Кроме того, гипотеза соответствия распределения эмпирического распределения закону Фишера отклонялась по обоим критериям уже при расстоянии точки оценивания от оптимальной равном $r = |x - x^+| \geq 0.1$). Таким образом, распределение многомерной статистики Хотеллинга (11) может быть хорошо аппроксимировано распределением Фишера уже при небольших выборках ($N \approx 50$). В заключение добавим, что поскольку тестирование условий останова основано на сходимости выборочных оценок к нормальному закону, то можно ввести дополнительные критерии нормальности этих оценок, основанные на вычислении третьих или четвертых моментов и т. п. [17, 20].

Далее исследовалась вероятность останова по критерию (11) в зависимости от расстояния $r = |x - x^+|$ до оптимальной точки. Эти зависимости для различных объемов монтекарловских выборок представлены на рис. 1 (для уровня доверительности $\mu = 0.95$). На рис. 2 представлены аналогичные зависимости при $N = 1000$ и $\mu = (0.90, 0.95, 0.99)$. Из этих зависимостей следует, что подбирая соответствующим образом объем выборок можно тестировать гипотезу оптимальности на основе статистических критериев, добиваясь при этом необходимой точности вычисления целевой функции.

На рис. 3 представлены зависимость частоты останова алгоритма (7), (11) по критериям (12), (13), вычисленные в результате 400 повторений оптимизации из случайно выбранных начальных точек. Эта зависимость иллюстрирует ограниченный и случайный характер числа итераций, необходимых для оптимизации и останова алгоритма.

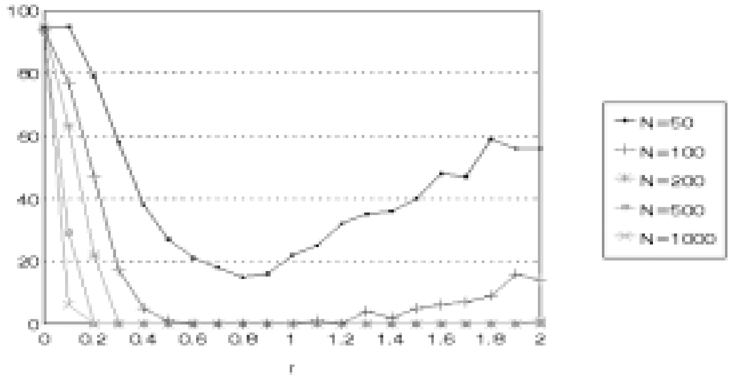

Рис. 1: Частота принятия оптимального решения, $\mu = 0.95$.

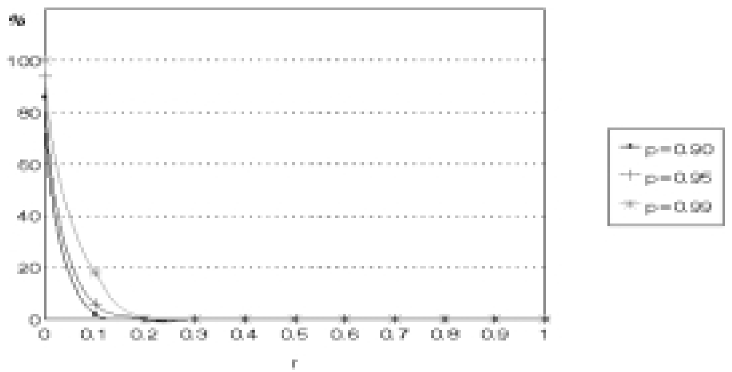

Рис. 2: Частота принятия оптимального решения, $N = 1000$.

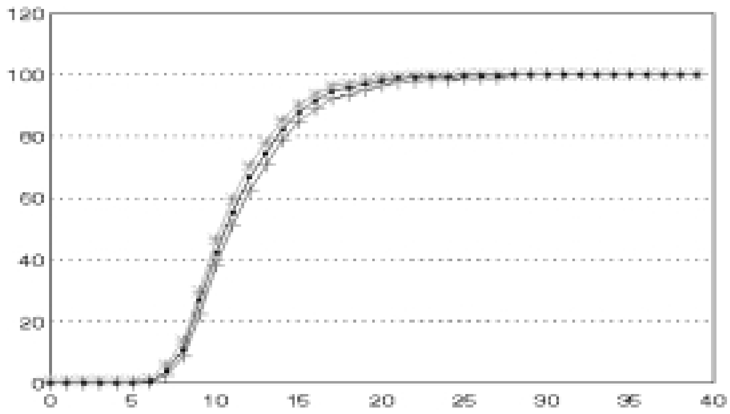

Рис. 3: Частота останова метода (7), (11).

4. Численное моделирование

Разработанный метод применялся для решения различных практических и тестовых задач. Рассмотрим его работу при решении задачи оптимальной организации труда [6]. Согласно условию задачи работодатель должен подобрать на нескольких уровнях иерархической системы организации труда количества постоянно работающих сотрудников. Также требуется определить часы сверхурочной работы постоянного персонала и потребность во временно нанимаемой рабочей силе, в зависимости от объема работ, которые предприятие обязано выполнить, и которое заранее известно лишь с некоторой определенностью, описываемой вероятностным способом.

В данном примере рассматривается трехуровневая структура (1 уровень — рабочие и рядовые исполнители, 2 — промежуточный уровень, 3 — руководящие сотрудники). Число рабочих и сотрудников на каждом уровне обозначим соответственно (x_1, x_2, x_3).

Таким образом, требуется найти набор $x = (x_1, x_2, x_3)$, минимизирующий средние затраты на оплату труда:

$$F(x,z) = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j + \sum_{t=1}^{12} E \min_{y,z} (\sum_{j=1}^{3} q_j y_{j,t} + r_j z_{j,t}),$$

где

$$x_j \geq 0,\ y_{j,t} \geq 0,\ z_{j,t} \geq 0,\ y_{j,t} \leq 0.2 a_t x_j,\ j = 1,2,3,\ t = 1,\dots,12,$$

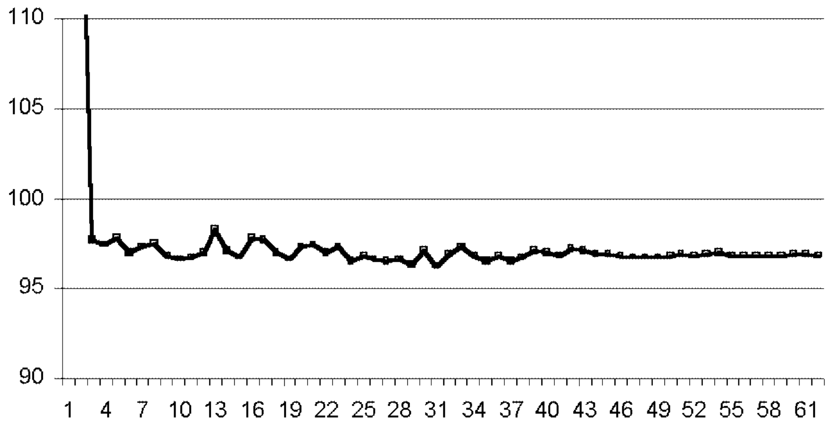

Рис. 4: Зависимость целевой функции $\tilde{F}(x^t)$ от t.

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j,t} + z_{j,t} \geq w_t - \alpha_t \sum_{j=1}^{3} x_j,\ t = 1, \ldots, 12,$$

$$\gamma_{j-1}(x_j + y_{j-1,t} + z_{j-1,t}) - (x_j + y_{j-1,t} + z_{j-1,t}),\ j = 2, 3,\ t = 1, \ldots, 12,$$

x_j — число постоянного персонала на уровне $j = 1, 2, 3$,
$y_{j,t}$ — количество часов сверхурочной работы,
$z_{j,t}$ — объем временно требуемой работы,
c_j — оплата труда сотрудника на уровне $j = 1, 2, 3$,
q_j — стоимость сверхурочных,
r_j — стоимость временной работы,
w_t — объем работ за период t,
α_t — прогнозируемая неявка рабочих в период t,
γ_{j-1} — соотношение числа сотрудников на уровнях j и $j-1$.

Исходные данные:
$c = [7.03, 4.53, 3.44]$,
$q = [9.59, 6.18, 4.69]$,
$r = [11.70, 9.95, 5.78]$,
$\alpha = [.8943, .8917, .8948, .9086, .9032, .8842, .8513, .8798, .8871, .9043, .8606, .8341]$,
$\gamma = [0.6, 0.2]$,
w_t — независимые величины, $t = 1, \ldots, 12$, $\mathcal{N}(\bar{\mu}_t, \bar{\sigma}_t^2)$, где $\bar{\sigma}_t^2 = \eta\mu_t$,
$\bar{\mu} = [11975, 11740, 12169, 13132, 13525, 12598, 13503, 14168, 12602, 11807, 11334, 10410]$,
η — коэффициент вариации объема требующихся работ, равный 0, 1, 10, 20, 30.

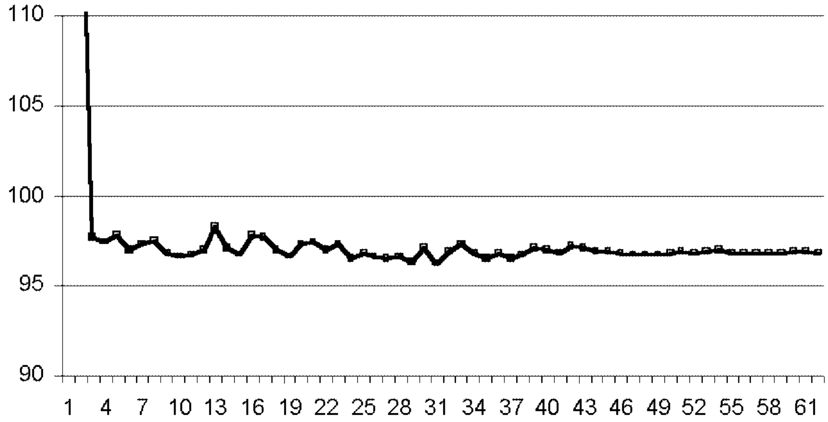

Рис. 5: Длина доверительного интервала.

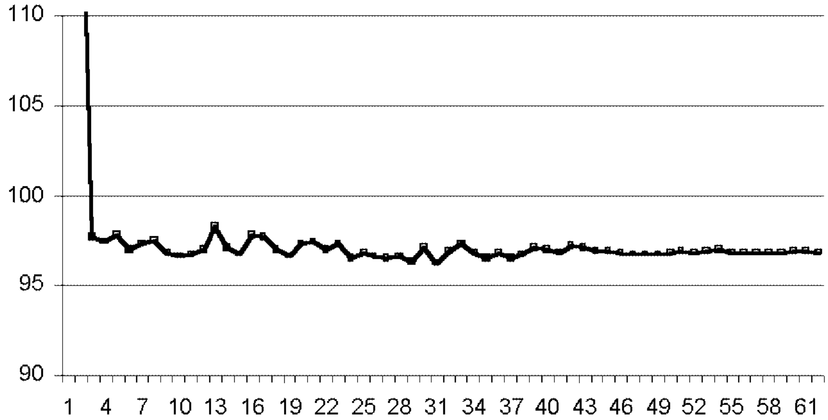

Рис. 6: Зависимость $T_t^2/Fish(\mu, n, N^t - n)$ от числа итераций t.

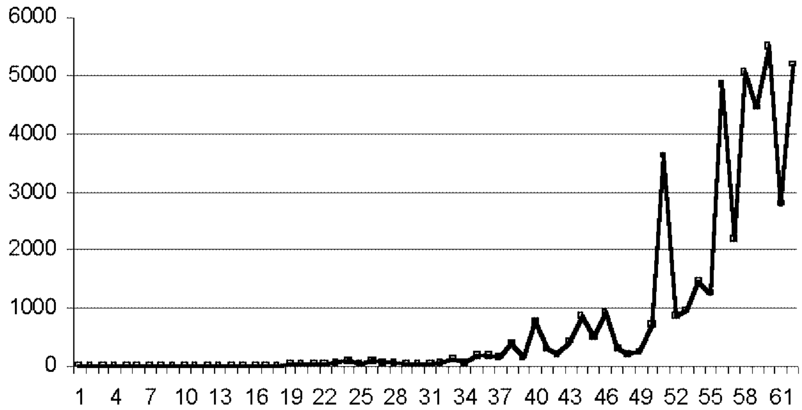

Рис. 7: Объем выборки в зависимости от числа итераций.

Результаты решения этой задачи, полученные методом Монте-Карло, представлены в табл. 1 и на рис. 4–8. В таблице представлены оптимальные объемы рабочей силы на всех уровнях и затраты на нее в зависимости от коэффициента вариации объема требующихся работ η (длина доверительного интервала — 100 USD, затраты на рабочую силу в USD). На рис. 4–7 изображены изменение целевой функции (6), ее доверительного интервала (13), статистики $T_t^2/Fish(\mu, n, N^t - n)$, вычисленной согласно (12), и объема выборки, вычисленного согласно (11), в зависимости от числа итераций при $\eta = 10$. На рис. 8 представлена зависимость отношения объема текущей выборки к общему числу вычислений, иллюстрирующая ограниченность этого отношения. Представленные результаты иллюстрируют сходимость разработанного метода, а также объем вычислений, необходимый для решения задачи с требуемой точностью.

Табл. 1. Опт. распределение рабочей силы и ее стоимость.

η	x_1	x_2	x_3	F
0	9222	5533	1106	94,899
1	9222	5533	1106	94,899
10	9376	5616	1046	96,832
30	9452	5672	1036	98,614

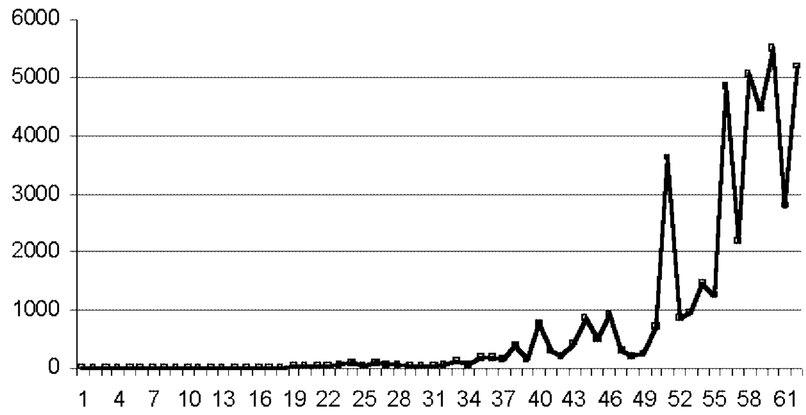

Рис. 8: Отношение $N^t / \sum_{i=0}^{t} N^i$.

5. Выводы

Разработан метод итеративного решения задач стохастической оптимизации сериями выборок Монте-Карло. Метод основан на правилах проверки гипотезы оптимальности и останова (12), (13), а также на правилах (8) и (11) регулирования объема выборки Монте-Карло. Предложена процедура останова алгоритма, основанная на проверке статистическим образом равенства градиента целевой функции нулю и оценке ее доверительного интервала. Правила (8) и (11), согласно которым объем выборки на каждом шаге берется обратно пропорциональным квадрату нормы оценки градиента, позволяет экономно проводить вычисления и в тоже самое время гарантирует сходимость п. н. к решению задачи. Численное моделирование и решение практических примеров подтвердили теоретические выводы и показали, что разработанный метод позволяет решать задачи стохастической оптимизации с заданной точностью за приемлемое вычислительное время.

6. Приложение

Лемма 1 *Если выполнены условия теоремы 1,* **то** *для $x \in R^n$ имеет место оценка:*

$$EF(x - \rho\tilde{G}(x)) \leq F(x) - \rho E|\tilde{G}(x)|^2(1 - \frac{\rho L}{2}) + \rho \left(1 - \frac{\rho L}{2}\right). \qquad (15)$$

Доказательство. С помощью теоремы Лагранжа получаем оценку [22]:

$$F(x-\rho\tilde{G}(x)) = F(x) - \rho\tilde{G}(x)^T \int_0^1 \nabla F(x-\tau\rho\tilde{G}(x))d\tau = \tag{16}$$

$$= F(x) - \rho\tilde{G}(x)^T\nabla F(x) - \rho\tilde{G}(x)^T \int_0^1 \nabla(F(x-\tau\rho\tilde{G}(x)) - \nabla F(x))d\tau.$$

Теперь формулу (15) можно получить, взяв математические ожидания обеих сторон (16), и далее применив условие Липшица и оценку:

$$E|\tilde{G}(x) - \nabla F(x)|^2 \leq \frac{K}{N},\ \forall x \in R^n,\ \forall N \geq 1, \tag{17}$$

следующую, в свою очередь, из независимости отдельных слагаемых в монтекарловской оценке (5). Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 1. Пусть $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$ является потоком σ-алгебр, порожденных последовательностью векторов $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$. Введем случайную величину

$$V_t = F(x^t) + \frac{3}{2}\frac{\rho K}{N^t}.$$

Заметим, что эта последовательность ограничена снизу: $V_t \geq F^+ > -\infty$. При $0 < \rho < 1/L$ с помощью (15) и (17) получаем, что

$$E(V_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leq V_t - \frac{\rho}{2}\left(|\tilde{G}(x^t)|^2|\mathcal{F}_t\right) + \frac{3\rho K}{2}E\left(|\frac{1}{N^{t+1}}|\mathcal{F}_t\right) \leq$$

$$\leq V_t - \frac{\rho}{2}(1-\frac{3K}{C})E\left(|\tilde{G}(x^t)|^2|\mathcal{F}_t\right),\ t = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, V_t является полумартингалом при $3K/C < 1$. Согласно леммам о мартингальной сходимости [23] получаем, что при $C \geq 4K$ п. н. $\lim_{t\to\infty} E\left(|\tilde{G}(x^t)|^2|\mathcal{F}_t\right) = 0$ и п. н. $\lim_{t\to\infty} |\nabla F(x^t)|^2 = 0$, поскольку $\lim_{t\to\infty} |\nabla F(x^t)|^2 \leq \lim_{t\to\infty} E(|\tilde{G}(x^t)|^2|\mathcal{F}_t)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Введем функцию Ляпунова:

$$W(x, N) = |x - x^+|^2 + \frac{\rho K}{N}.$$

С помощью формулы Лагранжа и (17) получаем, что

$$E|x^{t+1} - x^+|^2 = E\left(E(|x^{t+1} - x^+|^2|\mathcal{F}_t)\right) =$$

$$= E\left(E(|x^t - x^+ - \rho(\nabla F(x^t) - \nabla F(x^+)) - \rho(\tilde{G}(x^t) - \nabla F(x^t))|^2|\mathcal{F}_t)\right) \leq$$

$$\leq (1-\rho l)E|x^t - x^+|^2 + \rho^2 K E\left(\frac{1}{N^t}\right). \tag{18}$$

Далее в силу (8), условия Липшица и (17) следует оценка:

$$E(\frac{1}{N^t}) \le \frac{E|\nabla F(x^t) - \nabla F(x^+)|^2}{C} + \frac{K}{C}E(\frac{1}{N^t}) \le \frac{L^2}{C} + \frac{K}{C}E(\frac{1}{N^t}). \quad (19)$$

Используя (18) и (19) получаем:

$$E(W(x^{t+1}, N^{t+1})) \le \left(1 - 2\rho l + \rho^2 l^2 \frac{\rho K L^2}{C}\right) E|x^t - x^+|^2 +$$

$$+\rho K \left(\rho + \frac{K}{C}\right) E\left(\frac{1}{N^t}\right) \le \left(1 - \rho(l - \frac{KL^2}{C})\right) E(W(x^t, N^t),$$

если $0 < \rho \le \min\left[\frac{1}{L}, \frac{3}{4(1+l)}\right], C \ge K \max[4, \frac{L^2}{l}]$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] *Robins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. 1951. Vol. 22. № 3. P. 400–407.

[2] *Kiefer J., Wolfowitz J.* Statistical estimation on the maximum of a regression function // Ann. Math. Statist. 1952. Vol.23. P. 462–466.

[3] *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука. 1976.

[4] *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983.

[5] *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука. 1987.

[6] *Ermolyev Yu., Wets R.* Numerical Techniques for Stochastic Optimization. Springer-Verlag. Berlin. 1988.

[7] *Sakalauskas L.* Nonlinear stochastic optimization by Monte-Carlo estimators // Informatica. 2000. Vol. 11 (4). P. 1–19.

[8] *Sakalauskas L.* Nonlinear stochastic programming by Monte-Carlo estimators // European Journal of Operational Research. 2002. Vol. 137. P. 547–555.

[9] *Юдин Д. Б.* Численные методы анализа сложных систем // Изв. АН СССР. сер. Техническая кибернетика. 1965. № 1. С. 3–13.

[10] *Катковник В. И.* Линейное оценивание и проблемы оптимизации. М.: Наука. 1976.

[11] *Rubinstein R.* Smoothed functionals in stochastic optimization // Mathematical Operations Research. 1983. № 8. P. 26–33.

[12] *Беляков Ю. Н., Курмаев Ф. А., Баталов Б. В.* Методы статистической обработки ИС на ЭВМ. М.: Радио и связь. 1985.

[13] *Jun Shao* Monte-Carlo approximations in Bayesian decision theory // JASA. 1989. Vol. 84. № 407. P. 727–732.

[14] *Sakalauskas L.* A centering by the Monte-Carlo method // Stochastic Analysis and Applications. 1997. Vol. 15. № 4. P.

[15] *Канторович Л., Акилов Г.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз. 1959.

[16] *Сакалаускас Л.* Адаптивные методы стохастической оптимизации ИС // Автоматизация проектирования в электронике. 1990. Киев. № 41. С. 118–124.

[17] *Bhattacharya R. N., Ranga Rao R.* Normal Approximation and Asymptotic Expansions. John Wiley. 1976. New York-London-Toronto.

[18] *Box G., Watson G.* Robustness to non-normality of regression tests // Biometrika. 1962. Vol. 49. P. 93–106.

[19] *Bentkus V., Gotze F.* Optimal bounds in non-Gaussian limit theorems for U-statistics // Annals of Probability. 1999. Vol. 27. № 1. P. 454–521.

[20] *Большев и Смирнов* Таблицы математической статистики. М., Наука. 1983.

[21] *Sakalauskas L. L., Steishunas S.* Stochastic optimization method based on the Monte-Carlo simulation // Proc. Intern. AMSE Conference "Applied Modeling and Simulation". Lviv (Ukraine). Sept. 30-Oct. 2. 1993. AMSE Press. P. 19–23.

[22] *Дъедонне Ж.* Основания современного анализа. М.: Мир. 1964.

[23] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ч. 2. М.: Мир. 1984.