Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена
Институт детства
Кафедра начального естественно-математического образования

О. А. Граничина

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебно-методическое пособие

Печатается по решению
Учебно-методического объединения
по направлениям педагогического образования
Министерства образования и науки РФ

Санкт-Петербург
2012

ББК 88.372я7
УДК 159.923(075)

Рецензенты:

Г. И. Вергелес, доктор педагогических наук, профессор кафедры педагогики и психологии начального образования Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена

О. Н. Граничин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного программирования Санкт-Петербургского государственного университета

Граничина О.А.

Математико-статистические методы психолого-педагогических исследований. – СПб.: Издательство ВВМ, 2012. – 115 с.
ISBN 978-5-9651-0617-2

В предлагаемом учебно-методическом пособии рассматриваются теоретические и практические вопросы проведения математической обработки результатов психолого-педагогических исследований в образовательных учреждениях. Большое внимание уделено рассмотрению наиболее простых способов проверки статистических гипотез научного исследования. Учебно-методическое пособие рассчитано на студентов – слушателей курса «Математические методы психолого-педагогических исследований», выпускников бакалавриата и магистратуры, обучающихся по педагогическому и психолого-педагогическому направлениям. Данное пособие окажет практическую помощь преподавателям вузов, методистам, слушателям факультета повышения квалификации, а также всем тем, кто ведет исследовательскую работу в области психологии и педагогики.

ISBN 978-5-9651-0617-2

Оглавление

I. ИЗМЕРЕНИЯ. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ДАННЫХ

1. Основные понятия математической статистики

1.1. Предмет математической статистики

«Статистика знает все» – такими словами начинается вторая часть романа И.Ильфа и Е.Петрова «Двенадцать стульев». «Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики… Известно, сколько в стране охотников, балерин… станков, собак всех пород, велосипедов, памятников, девушек, маяков и швейных машинок. Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли, глядит на нас со статистических таблиц!»

Зачем нужны эти таблицы, как их составлять и обрабатывать, какие выводы на их основании можно делать – на эти вопросы отвечает статистика (от итальянского stato – государство, латинского status – состояние). Термин «статистика» был введен в 18 веке Готфридом Ахенвалем. Термин употребляется в нескольких значениях:

1) отрасль общественных наук;
2) совокупность данных о каком-либо явлении или процессе;
3) некоторая обобщающая характеристика процесса или явления.

Надо отметить, что статистический учет существовал еще в далекой древности. Задолго до наступления новой эры проводились переписи населения в Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала различных стран, велся учет имущества граждан в Древнем Риме.

Издавна в каждом государстве соответствующими органами власти собирались сведения о числе жителей по полу, возрасту, занятости в различных сферах труда, наличии различных воинов, вооружения, денежных средств, орудий труда, средств производства и т.д. Все эти и подобные им данные называются статистическими.

С развитием государства и международных отношений возникла необходимость анализа статистических данных, их прогнозирование, обработка, оценка достоверности основанных на их анализе выводов и т.п. К решению таких задач стали привлекаться математики. Таким образом, в математике сформировалась новая область – математическая статистика, изучающая общие закономерности статистических данных или явлений и взаимосвязи между ними.

Первые работы по статистике относятся к XVIII в. и были связаны со статистикой народонаселения, проблемами, возникающими в сельском хозяйстве, и с вопросами страхования. У истоков статистической науки стояли две школы: немецкая описательная и английская школа политических арифметиков. Приверженцы первой (Конринг, Ахенваль) стремились систематизировать существовавшие способы описания государств, создать теорию описаний. Все их описания реализовывались в словесной форме, без числовых характеристик, вне динамики развития процессов, характеризуя их на данный момент наблюдения. Целью же второй школы (Граунт, Галлей, Петти) было изучение общественных явлений с помощью числовых характеристик, а, значит, и измерение общественных процессов и явлений и построение гипотез их дальнейшего развития. Последующее развитие статистики было связано с созданием теории ошибок в конце XVIII - начале XIX в. А уже в XIX веке статистика была выделена в самостоятельную науку, а толчком к этому послужили социологические исследования Чарльза Бута и исследования в области биологии. В это же примерно время появляется учение бельгийца Кетле о средних величинах.

Сфера применения математической статистики распространилась во многие, особенно экспериментальные, науки. Так появились экономическая статистика, медицинская статистика, биологическая статистика, статистическая физика и т.д.

Обычно к статистическим методам прибегают в тех случаях, когда требуется изучить распределение большой совокупности предметов, явлений или индивидуумов по некоторому признаку.

Определение 1.1. Общее свойство, присущее нескольким статистическим данным, называют их **статистическим признаком.**

Пример 1. Можно интересоваться распределением множества людей по возрасту, множества животных данного вида по массе, распределением земель по урожайности, ростом игроков команды, результатом бега на 100 м, принадлежностью к виду спорта, частотой сердечных сокращений и т.д.

Определение 1.2. **Математическая статистика** – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Обе эти математические дисциплины изучают массовые случайные явления. При этом математическая статистика опирается на методы и понятия теории вероятностей, но решает в каком-то смысле обратные задачи.

В теории вероятностей рассматриваются случайные величины с заданным распределением или случайные эксперименты, свойства которых целиком известны. Но часто эксперимент представляет собой черный ящик, выдающий лишь некие результаты, по которым требуется сделать вывод о свойствах самого эксперимента. Наблюдатель имеет набор числовых (или их можно сделать числовыми) результатов, полученных повторением одного и того же случайного эксперимента в одинаковых условиях.

Итак, о статистике имеет смысл вспоминать, если имеется случайный эксперимент, свойства которого частично или полностью неизвестны, и мы умеем воспроизводить этот эксперимент в одних и тех же условиях некоторое число раз. Примером такой серии экспериментов может служить опрос, набор экономических показателей или, наконец, последовательность гербов и решек при тысячекратном подбрасывании монеты.

Определение 1.3. **Предметом** математической статистики является изучение случайных величин по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-то образом обработать: упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде. Затем оценить интересующие нас характеристики случайной величины.

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам исследования выборки (т.е. части исследуемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении признака изучаемых объектов по всей совокупности. Для обработки статистических данных созданы специальные программные пакеты, которые выполняют трудоемкую работу по расчету различных статистик, построению таблиц и графиков. Простейшие статистические функции имеются в программируемых калькуляторах и популярных офисных программах (Excel).

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Рассмотрим **основные статистические категории**. Вне зависимости от области применения статистических методов рассматривают:

1. Статистическую совокупность.
2. Единицу совокупности – носителя интересующего исследователя признака.
3. Признак (качественный или количественный).
4. Статистические показатели: плановые, отчетные, прогностические.
5. Систему статистических показателей – совокупность показателей, которые отражают взаимосвязи, объективно существующие между явлениями.

Таким образом, при проведении различного рода исследований изучаются как количественная, так и качественная стороны массовых явлений. Количественная сторона массовых явлений выражается в конкретных величинах, характеризующих явления общественной жизни, например, численность населения. Изучение количественной стороны общественных явлений должно обязательно сопровождаться учетом их качественных особенностей, т.к. количественные характеристики общественных явлений обусловлены их качественным содержанием.

При проведении статистического исследования применяются статистические методы, под которыми понимают общие правила и приемы, образующие пять последовательных стадий статистического исследования:

1) массовое статистическое наблюдение, то есть сбор первичного статистического материала;
2) сводка результатов наблюдения в подлежащие изучению статистические совокупности;
3) графическое изображение данных;
4) исчисление обобщающих статистических показателей;

5) анализ полученных данных.

Контрольные вопросы

1. Что является предметом математической статистики?

2. Перечислите и охарактеризуйте основные статистические категории.

3. Представьте последовательность стадий статистического исследования.

Контрольное задание

1. Подготовьте сообщение на одну из следующих тем:

- Предпосылки возникновения статистической науки.
- Первые статистические школы.

Литература:

http://comp5.ru/Raznoe/Statistica/Stat1-2.php

http://art.ioso.ru/seminar/2009/projects11/rezim/stat2.html

1.2. Основные статистические понятия. Сущность статистической задачи

Так как закон распределения случайной величины, принимающей очень много значений, выяснить трудно, то приходится из всей совокупности объектов отбирать для исследования только ее часть, т.е. проводить выборочное исследование. Кроме того, в некоторых случаях исследование всей совокупности объектов не имеет смысла, так как они в результате исследования разрушаются.

Определение 1.4. Совокупность всех объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения значений определенной случайной величины, называется **генеральной совокупностью.**

Определение 1.5. **Выборочной совокупностью (выборкой)** называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

Определение 1.6. Число объектов в совокупности (генеральной или выборочной) называется ее **объемом** и обозначается соответственно N или n. Предполагается, что $n \ll N$.

Определение 1.7. Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений, называют **реализацией выборки** и обозначают $x_1;\ x_2;...;x_n$.

Определение 1.8. Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основе изучения выборочной совокупности делается заключение обо всей генеральной совокупности, называется **выборочным**.

Определение 1.9. Выборки называются **независимыми (несвязными),** если процедура эксперимента и полученные результаты измерения некоторого свойства у испытуемых одной выборки не оказывают влияния на особенности протекания этого же эксперимента и результаты измерения этого же свойства у испытуемых (респондентов) другой выборки.

Определение 1.10. Выборки называется **зависимыми (связными)** если процедура эксперимента и полученные результаты измерения некоторого свойства, проведенные на одной выборке, оказывают влияние на другую.

Пример 2. Одна и та же группа испытуемых, на которой дважды проводилось обследование (пусть даже разных качеств, признаков, особенностей), – зависимая или связная выборка. Другой пример менее сильной зависимости – мужья (первая выборка) и их жены (вторая выборка); дети 5-7 лет (одна выборка), их братья или сестры-близнецы (вторая выборка).

При составлении выборки возможны 2 случая:

а) после отбора предмета и его обработки, он может быть возвращен в генеральную совокупность;

б) предмет после обработки не возвращается в генеральную совокупность.

Определение 1.11. **Повторной** называют выборку, при которой отобранный предмет (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Определение 1.12. **Бесповторной** называют выборку, при которой предмет в генеральную совокупность не возвращается.

На практике в большинстве случаев более предпочтительна бесповторная выборка, однако в некоторых случаях технически сделать это очень сложно, и тогда применяется повторная выборка.

К выборке применяется ряд обязательных требований, определенных, прежде всего, целями и задачами исследования. Планирование эксперимента должно включать в себя учет как объема выборки, так и ряда ее особенностей. Так, в психолого-педагогических исследованиях важно требование однородности выборки. Оно означает, что исследователь, изучая, например, подростков, не может, включать в эту же выборку взрослых людей. Напротив, исследование, выполненное методом возрастных срезов, принципиально предполагает наличие разновозрастных испытуемых. Однако и в этом случае должна соблюдаться однородность выборки, но уже по другим критериям, в первую очередь таким, как возраст, пол. Основаниями для формирования однородной выборки могут служить разные характеристики такие, как уровень интеллекта, национальность, отсутствие определенных заболеваний и т.д., в зависимости от целей исследования.

Таким образом, выборочный метод, используемый для решения статистической задачи, сводится к следующему: из генеральной совокупности (N) берется выборка объема n и определяются характеристики выборки, которые принимаются в качестве приближенных значений соответствующих характеристик генеральной совокупности. Чем больше n, тем суждение более обоснованно. Требование: для верного суждения о некотором признаке генеральной совокупности необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Иными словами, выборка должна быть **репрезентативной** (представительной).

Можно сформулировать основные необходимые условия репрезентативности выборки.

1.По закону больших чисел выборка будет репрезентативной, если ее осуществить **случайным образом**: любой объект выбирается случайно из генеральной совокупности, и все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

2. **Стратифицированность** отбора. Выполнение этого условия предполагает изначальное выделение тех свойств, которые могут влиять на изучаемое свойство. Затем определяется доля каждой из групп (страт) в генеральной совокупности и в соответствии с этих случайно из этих групп выбираются представители.

3. **Статистическая достоверность** (статистическая значимость) результатов исследования. Это требование связано с определением адекватного объема выборки. Увы, но строгих правил здесь нет, можно только сформулировать общие рекомендации:

- наибольший объем выборки необходим для разработки диагностической методики (200 – 1000/2500 человек);
- при сравнении двух выборок их общая численность должна быть не менее 50 человек, примерно поровну в каждой;
- объем выборки прямо зависит от изменчивости изучаемого свойства; изменчивость можно уменьшить, увеличивая однородность выборки, однако в этом случае уменьшаются возможности генерализации выводов.

Вопрос о том, в какой степени по выборочной совокупности можно судить о генеральной, принадлежит к числу важнейших теоретических и практических вопросов в статистике. При исследовании этого вопроса надо обратить внимание на ряд аспектов. Очевидно, нельзя распространить, например, выводы, полученные на основании исследования выборочной совокупности учеников средней школы, на студентов, и наоборот. Аналогично, результаты исследования, проведенного в специализированной школе, нельзя распространить на учеников массовой школы, результаты исследования, проведенного среди людей определенной специальности, определенного образования и т.д. на всех людей.

Задачей исследования всякой совокупности является получение статистических характеристик или показателей, которые позволяют судить о данной совокупности в целом, о различиях внутри нее и об отличии ее от других, близких к ней совокупностей.

Совокупность становится статистической именно тогда, когда в ее описание вносится количественный метод. Применение количественного метода изучения совокупности и позволяет получать для нее статистические показатели. С их помощью мы получаем основную информацию о совокупности.

Контрольные вопросы

1. Как называется совокупность однородных объектов, на которой ставится статистическая задача?
2. Что такое выборка?
3. Что такое объем генеральной совокупности (выборки)?
4. Как называется выборка, объекты которой правильно отражают общую тенденцию?
5. Сформулируйте условия репрезентативности выборки.
6. Как называется основной метод решения статистических задач?
7. Каким образом можно получить выборку из генеральной совокупности?

Контрольные задания

1. Тема дипломного исследования сформулирована как «Использование технических средств обучения как средства повышения качества сформированных вычислительных навыков». Докажите, что эту тему можно рассматривать как формулировку статистической задачи.
2. Возраст (в годах) респондентов при социологическом опросе: 23, 58, 5, 14, 15, 37, 45, 24, 17. Чему равен объем данной выборки?
3. Приведите пример генеральной совокупности и случайной выборки.
4. Проводился опрос, в котором принимали участие мужчины и женщины. Объем выборки оказался равным 3000. Сколько мужчин приняли участие в опросе, если их число на 250 меньше, чем женщин?

1.3. Способы отбора

После того, как исследователь принимает решение о применении выборочного метода, перед ним встает вопрос, каким образом формировать выборку, т.е. каким способом отбирать предметы из генеральной совокупности в выборку. Рассмотрим основные методы отбора, применяющиеся в статистике.

Определение 1.13. **Простым случайным** называется отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

Пример 3. Пусть генеральная совокупность имеет объем N. Необходимо из нее извлечь n предметов. Рассмотрим одну из моделей реализации данного способа отбора.

Будем считать, что объекты генеральной совокупности перенумерованы. На карточках выписываем номера от *1* до N, перемешиваем их, наугад вынимаем одну карточку и объект, имеющий одинаковый номер с номером карточки, подвергаем обследованию; затем карточку возвращаем в общую пачку и процесс повторяем. Так поступаем n раз. В результате получаем простую повторную выборку. Если карточки не возвращаются в пачку, то имеем простой бесповторный отбор.

Если объем генеральной совокупности очень большой, то используют специально созданные таблицы «случайных чисел».

Определение 1.14. **Типическим** называется отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части с учетом ее представительности в генеральной совокупности. Этим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности.

Определение 1.15. **Механическим** называется отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а затем из каждой группы отбирают один предмет.

Иногда этот отбор не обеспечивает репрезентативности выборки.

Определение 1.16. **Серийным** называется отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

Этот способ отбора применим тогда, когда обследуемый признак незначительно колеблется в различных сериях.

В некоторых случаях применяют комбинированный отбор, сочетающий в себе признаки нескольких способов отбора.

Контрольные вопросы

1. Чем характеризуется простой случайный отбор?
2. Какой тип отбора обычно применяют, если изучаемый признак сильно варьируется в различных частях генеральной совокупности?
3. В чем особенность механического способа отбора?
4. Какой, на Ваш взгляд, способ отбора наиболее часто используется студентами при написании квалификационных работ?

Контрольные задания

1. Сформулируйте статистическую задачу, для решения которой необходимо использовать типический отбор? Каким образом будете производить стратификацию генеральной совокупности?
2. Сформулируйте статистическую задачу, для решения которой целесообразно использовать типический отбор? Каким образом будете производить упорядочивание генеральной совокупности?

2. Общие и специальные методы, используемые в психолого-педагогических исследованиях

Нетрудно убедиться, что любая психолого-педагогическая проблема, лежащая в основе выпускной квалификационной или дипломной работы – своего рода статистическая задача. При ее решении применяются различные методы исследования, которые вооружают исследователя необходимой информацией и данными.

Определение 2.1. **Метод** – в самом общем значении – способ достижения цели, представляющий собой определенным образом упорядоченную деятельность.

Для проведения психолого-педагогических исследований обычно применяется ряд общенаучных и специальных методов, рассматриваемых здесь в соответствии с двумя направлениями научного поиска, часто совпадающими с двумя этапами в научно-исследовательской работе. Речь идет о:

- методах работы с литературой;
- методах исследования реально существующего или специально организуемого практического опыта.

2.1. Методы работы с текстом

Как правило, исследование любой психолого-педагогической проблемы начинается с *изучения литературы.* Работа с литературными и электронными источниками предполагает использование таких общенаучных методов, как *составление библиографии, аннотирование, реферирование, конспектирование, выписывание данных и цитат.* Выбор метода работы с литературными источниками зависит от цели работы: некоторые книги и статьи внимательно изучаются, другие – просто прочитываются, третьи – лишь просматриваются.

Определение 2.2. **Библиография** – перечень литературных источников, отобранных для работы в связи с исследуемой проблемой. В случае наличия в библиотеке значительного числа работ по проблеме отбирается литература с учетом года издания, авторитетности, известности в науке автора, издательства, общей направленности работы (определяемой пока по заглавию). Решение о том, как работать с литературным источником, принимается уже после непосредственного ознакомления с книгой или статьей.

Общее содержание ее может найти отражение в краткой записи – **аннотации,** дающей общее представление о поднимаемых в работе вопросах, или в **реферате** – сжатом переложении основного содержания работы.

Конспектирование предполагает ведение достаточно подробных записей. Проводится оно для вычленения главных идей и положений, развиваемых в работе. В ряде случаев представляется необходимым сделать лишь отдельные **выписки** фактических или цифровых данных или цитат, дословных выражений или определений, даваемых самим автором.

Все виды работы с книгой требуют очень четкого оформления основных данных: обязательной записи фамилии и инициалов автора, названия работы, издательства (или для статьи – название журнала, газеты), места и года издания (для периодики – номера журнала или даты опубликования в газете).

Изучение литературы (всех ее видов или только части их) необходимо для более четкого представления методологии исследования и определения общих теоретических позиций, а также выявления степени научной разработанности данной проблемы. Всегда важно выявить, насколько и как эта проблема освещена в общих научных трудах и специальных работах по данному вопросу, отражающих результаты соответствующих исследований. Исследователь при этом узнает, какие стороны проблемы уже достаточно хорошо разработаны, по каким вопросам ведутся научные споры, сталкиваются разные научные концепции и идеи, что уже устарело, какие вопросы еще не решены, и на основании этого определяет область своего исследования. Изучение литературы, описывающей тот или иной опыт, вооружает исследователя также некоторыми конкретными данными, научными фактами.

Другой метод сбора фактических данных – **изучение документации,** характеризующей изучаемый процесс в том или ином заведении (журналов учета успеваемости, посещаемости, личных дел и медицинских карт и т.д.). В этих документах зафиксированы многие объективные данные, помогающие установить ряд характеристик, причинные связи, выявить некоторые зависимости.

Контрольные вопросы

1. Что такое метод в самом общем смысле?
2. Какие методы применяют на подготовительном этапе научно-исследовательской работы?
3. Что такое конспектирование?
4. Какие задачи решает исследователь, применяя методы работы с текстом?

2.2. Методы основного этапа исследования

Огромное значение для решения большинства проблем педагогики имеет **изучение реально складывающегося процесса**, теоретическое осмысление и переработка творческих находок практических работников, обобщение и пропаганда передового опыта. В этих целях применяются такие методы, как **наблюдение, беседа, анкетирование.**

Наблюдение

Определение 2.3. **Наблюдение** представляет собой целенаправленное восприятие какого-либо явления, с помощью которого исследователь вооружается конкретным фактическим материалом или данными.

Это один из самых важных методов, применяемых при решении психолого-педагогических проблем, поэтому остановимся на этом методе более подробно.

Существует несколько классификаций наблюдений.

1. Наблюдения можно классифицировать по *форме*. В этом случае выделяют два класса наблюдений: отчетность и специально организованное.

Определение 2.4. **Отчетность** – это форма статистического наблюдения, при котором данные в определенные сроки и в установленном порядке представляют в статистические органы и при этом скрепляются подписями лиц, ответственных за их достоверность.

Специально организованное статистическое наблюдение проводится по мере необходимости в виде различного рода обследований.

2. Наблюдения классифицируют *по виду.*

а) с учетом полноты охвата единиц совокупности наблюдения делятся на сплошное и несплошное;

б) с учетом факторов времени наблюдения делятся на непрерывные и прерывные (периодические и единовременные).

Определение 2.5. **Непрерывное наблюдение** – *это* такое наблюдение, при котором установление и обследование факторов происходит по мере их возникновения.

Определение 2.6. **Прерывное** – это наблюдение, при котором установление и обследование фактов производится либо регулярно через определенные промежутки времени – **периодическое статистическое наблюдение**, либо по мере надобности – **единовременное наблюдение.**

3. Наблюдения классифицируют *по способу учета факторов*. В данном случае они делятся на: непосредственный учет, документальный учет и заполнение опросных листов (экспедиционный, саморегистрация и корреспондентский опрос).

Определение 2.7. **Непосредственный учет** – это статистическое наблюдение, при котором необходимые сведения получают путем подсчета, измерения и взвешивания единиц совокупности.

Определение 2.8. **Документальный учет** – это статистическое наблюдение, при котором все необходимые данные получают на основе различной документации.

Определение 2.9. **Опрос** – статистическое наблюдение, при котором необходимые сведения экспериментатор получают у опрашиваемого:

а) если регистраторы сами заполняют опросный лист со слов, то речь идет об **экспедиционном опросе;**

б) если сам опрашиваемый заполняет опросный лист и возвращает его на добровольных началах, то это пример *корреспондентского опроса;*

в) если сам опрашиваемый заполняет опросный лист, а регистратор только проводит инструктаж, то это **саморегистрация.**

Для того чтобы внимание исследователя не рассеивалось и было сосредоточено, прежде всего, на особо интересующих его сторонах наблюдаемого явления, заранее очень тщательно разрабатывается программа наблюдения, четко выделяются объекты наблюдения, предусматриваются способы регистрации тех или иных ожидаемых событий. С этой целью предварительно необходимо **определить**:

- цели, для достижения которых оно проводится;
- объект наблюдения, под которым понимают совокупность психолого-педагогических процессов, подлежащих обследованию;
- единицы совокупности.

После этого следует **разработать** программу статистического обследования, перечень вопросов, на которые необходимо получить ответы, инструкцию для заполнения статистических бланков. И, наконец, следует установить крайний срок окончания наблюдения.

Основные методы выявления суждений

При проведении психолого-педагогических исследований часто применяются такие методы исследований, как **анкетирование** и **интервьюирование.** Интрвьюирование, в свою очередь, делится на стандартизированное и нестандартизированное. Последнее часто называется **беседой.**

Беседа применяется как самостоятельный метод или как дополнительный в целях получения дополнительной информации или разъяснений по поводу того, что не было достаточно ясным при наблюдении. Она также проводится по заранее намеченному плану с выделением вопросов, подлежащих выявлению. Беседа ведется в свободной форме без записи ответов собеседника в отличие от стандартизированного интервьюирования (в дальнейшем просто интервьюирование), перенесенного в педагогику из социологии. При интервьюировании исследователь строго придерживается заранее намеченных вопросов, задаваемых в определенной последовательности. Ответы при этом открыто записываются.

При анкетировании – методе массового сбора информации с помощью анкет – ответы на вопросы записывают те, кому адресованы анкеты. Как правило, анкетирование применяется на заключительном этапе исследования и имеет целью получение таких данных, которые исследователь не может получить другим путем.

Эффективность беседы, интервьюирования, анкетирования во многом зависит от содержания и формы задаваемых вопросов, тактичного объяснения их цели и назначения. В частности, рекомендуется, чтобы вопросы были посильными, однозначными, краткими, ясными, объективными, т.е. не содержали бы в скрытом виде внушения, вызывали бы интерес и желание отвечать и т.п.

Научный эксперимент

Наиболее важный этап в работе с применением указанных выше методов – *анализ и научная интерпретация* собранных данных, умение исследователя от конкретных фактов перейти к более общим выводам, а в некоторых случаях даже дать прогноз развития интересующего его процесса.

Однако для того, чтобы судить об эффективности тех или иных педагогических взаимодействий или ценности методических находок, сделанных практическими работниками, а тем более для того, чтобы давать какие-либо рекомендации относительно применения тех или иных нововведений в массовой практике, рассмотренных методов недостаточно, так как они улавливают в основном лишь чисто внешние связи между отдельными сторонами изучаемого явления.

Поэтому значительное внимание уделяется **эксперименту** – специальным образом организованной проверке того или иного метода или приема для определения его эффективности. В отличие от изучения реально сложившегося опыта с применением методов, регистрирующих лишь то, что уже существует, эксперимент всегда предполагает создание нового опыта, в котором активную роль должно играть предполагаемое и проверяемое нововведение.

Необходимость в эксперименте возникает тогда, когда учеными выдвигается какая-либо новая идея или предположение, требующее проверки, или же тогда, когда необходимо научно проверить интересный опыт, находки практиков, подмеченные и выделенные исследователем, дать им объективную оценку. Эксперимент необходим и тогда, когда нужно проверить разные точки зрения или суждения по поводу одного и того же явления или метода, уже подвергавшегося проверке, сопоставить их результаты и сделать выводы о том, какие из них более доказательны. Эксперимент нужен и тогда, когда необходимо найти наиболее рациональные и эффективные пути внедрения в практику обязательного или признанного положения, указания, постановления.

Определение 2.10. Научно обоснованное предположение о возможной эффективности того или иного проверяемого экспериментально нововведения называется **научной гипотезой.**

Таким образом, ясно, что в основе научного эксперимента всегда лежит научная гипотеза, а сам эксперимент проводится с целью ее проверки. Позже более подробно будут рассмотрены виды гипотез, которые возникают в ходе научного исследования. Если гипотеза выведена лишь на основании теоретического анализа и рассуждений и не имеет пока опоры в реальном опыте, то создание этого опыта в соответствии с выдвигаемым теоретическим положением может быть названо **созидающим экспериментом.**

Существенную часть эксперимента составляет наблюдение, проводимое по специально разработанной программе, а также сбор определенных данных, для чего применяются анкеты, беседа и т.д. В последнее время невозможно себе представить статистическое исследование без привлечения технических средств, особое место среди которых занимает компьютер.

Очень важен в научном отношении этап анализа собранных данных, их теоретического осмысления и обобщения. На этом этапе экспериментатор старается отделить случайное и частное от необходимого и существенного, стремясь обнаружить регулярность или порядок, которому следует целая масса индивидуальных случаев, вскрыть внутренние связи между ними, установить некоторую закономерность. При проведении такого анализа исследователь задумывается, прежде всего, о том, какова причинно-следственная зависимость между применяемыми методами или приемами воздействия и получаемыми результатами. В ходе анализа данных экспериментатор также ищет причины, объясняющие появление некоторых неожиданных, непредвиденных результатов, определяет условия, при которых наступало то или иное явление, стремится отделить то специфическое, что могло оказать влияние лишь в данном конкретном случае и что нетипично для других и т.п. Для проведения анализа данных и их интерпретации составляются таблицы, вычерчиваются диаграммы, графики, кривые зависимостей. Об этом подробно пойдет речь далее.

Самое важное в завершенном педагогическом исследовании – *внедрение его результатов в практику*. Под внедрением результатов может пониматься широкое информирование общественности о полученных выводах, или выявленных закономерностях, дающих основание для внесения каких-либо изменений в практику; создание новых учебных и методических пособий, базирующихся на полученных данных экспериментального исследования; разработка методических инструкций и рекомендаций и т.д. При этом если подтверждается эффективность и действенность каких-либо находок практиков, их опыт пропагандируется, показывается возможность переноса его в иные условия.

Принципиальным является вопрос о том, как разрабатывается программа научного эксперимента.

Методика разработки программы педагогического эксперимента

Рассмотрим последовательно основные действия исследователя, приступающего к разработке программы экспериментальной части своей работы:

1) прежде всего, необходимо решить вопрос о *необходимости* этой экспериментальной части;

2) далее решается вопрос о *выдвижении научной гипотезы*, которая должна быть положена в основу эксперимента; гипотеза называется научной и должна быть научной потому, что, хотя она и может содержать элемент догадки, интуитивной веры в возможный положительный эффект, она должна базироваться на определенных научных данных, подкрепляться теоретическими доводами или умозаключениями;

3) следует продумать вопрос о том, какие потребуется применять *виды эксперимента;* решение вопроса о видах и типах эксперимента зависит от ряда моментов: от цели и конкретной задачи исследования, этапа работы исследователя над проблемой, используемых средствах над решением проблемы и т.д.;

4) планирование эксперимента далее включает в себя также *выбор и оценку общих условий его проведения:* средства для его ведения, место для его проведения, обучаемые, преподаватель;

5) особо следует выделить оценку и правильный отбор *уравниваемых и варьируемых условий эксперимента.*

Уравниваемыми условиями проведения эксперимента называются условия, обеспечивающие сходство и неизменность протекания эксперимента в контрольных и экспериментальных классах. К уравниваемым условиям обычно относятся: состав обучаемых (примерно одинаковый в экспериментальных и контрольных классах или группах); учитель (один и тот же учитель ведет занятия в экспериментальных и контрольных группах); учебный материал (одинаковый круг вопросов, равный объем); равные условия работы (одна смена, примерно одинаковый порядок следования занятий по расписанию и т.д.). Правда, известный психолог Л.В. Занков утверждал, что уравнивание состава нереально, что это методологически ложно и практически недостижимо. Поэтому на практике, как правило, отбираются группы примерно равные по общей успеваемости. В случае же, если в условиях данного учебного заведения нельзя подобрать две примерно равные по этим показателям группы, в качестве экспериментальной принято брать группу с более низкой успеваемостью: в случае получения положительных результатов в итоге экспериментальной работы эти результаты будут более убедительными. Что касается уравнивания условий, связанных с преподавателем, то во всех случаях желательно, чтобы занятия и в контрольной, и в экспериментальной группах вел один и тот же преподаватель или сам экспериментатор. Ведение занятий в разных группах разными учителями при сравнительном эксперименте не допускается, так как личность учителя, его умение установить контакт с учениками, применяемые им методы воздействия на учащихся представляют собой такие характеристики, которые никогда не могут быть уравнены. В отдельных случаях, особенно на первом этапе исследовательской работы или тогда, когда идет опробование учебного материала, эксперимент можно вести в одной группе на разном, но однородном материале, применяя в работе с ним различные методы. В этом случае уравниваемыми условиями будут: группа (одна и та же), преподаватель (один и тот же), учебный материал (однородный, одинаковой степени трудности). Подобное проведение эксперимента может иметь место и в том случае, если не удается добиться примерного уравнивания состава обучаемых или обучения в обеих группах одним учителем. Неполное сходство учебного материала в этом случае будет иметь меньше влияния, нежели сильные различия в первых двух характеристиках.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о варьируемых условиях. Классический принцип проведения экспериментального исследования исходит из предположения о том, что в ходе эксперимента меняется – варьируется – лишь одна переменная при сохранении постоянными всех остальных. *Варьируемыми условиями* называются точно определяемые и сопоставимые условия, подлежащие изменению с целью экспериментального сравнения с аналогичными условиями в контрольных группах. Самое основное в этой работе – точное и четкое выделение того, что подлежит экспериментальной проверке и сравнению.

Составление собственно программы эксперимента включает в себя общую часть, связанную с постановкой конкретных задач, гипотез, определением методов получения экспериментальных данных, и частные программы работы участников эксперимента: учителя (или самого экспериментатора), ведущего занятия как в экспериментальном, так и в контрольном классах, наблюдателя или помощника, ведущего наблюдения, делающего по ходу занятия необходимые отметки.

Подобное распределение обязанностей между экспериментатором, его помощниками и учителем является практически важным, так как одному человеку не под силу осуществление программы наблюдения и одновременное ведение занятий. Правда, в ряде случаев экспериментатор, ведущий занятие, может также осуществлять плановое наблюдение за работой отдельных учащихся – специально подходить к заранее намеченным лицам, проверять, как у них идет работа, интересоваться тем, какие они встречают трудности в работе и т.д.

Общие задачи и методика организации эксперимента должны найти отражение в развернутом плане-программе эксперимента, куда могут быть занесены основные необходимые экспериментатору данные.

Методика анализа данных педагогического эксперимента

1. *Анализ и обработка протоколов наблюдений*

Протоколы наблюдений и хронометрирование занятий обычно представляют собой текстовую запись, воспроизводящую полностью или частично ход проведенного занятия. В ряде случаев, когда наблюдатель производит выборочное наблюдение за отдельными учащимися или фиксирует лишь отдельные интересующие его моменты, у него оказывается заполненной та или иная таблица, составленная в соответствии с целью проводившихся наблюдений. Чаще же всего экспериментатору при изучении общих записей, сделанных по ходу ведения занятий, приходится извлекать из них необходимую ему информацию, которую полезно для наглядности также оформлять в виде таблицы.

Не существует строгих регламентаций по работе с протоколами наблюдений, они должны лишь служить примерным ориентиром в этой работе. Самое важное при работе с протоколами и другими видами записи наблюдавшегося реального учебного процесса – уметь выделить данные, содержащие определенную информацию, найти причины тех или иных особенностей работы обучаемых на том или ином этапе работы над учебным материалом.

***2.** Анализ данных беседы*

Очень часто в ходе наблюдения за проведенным занятием у экспериментатора (или наблюдателя) могут возникнуть вопросы, связанные с содержанием работы, уточнением отдельных моментов организации работы, выявлением отношения обучаемых к тому или иному виду работы, оценкой ими трудностей, возникающих в ходе проведения работы. Беседа проводится экспериментатором, прежде всего, с целью получить необходимые разъяснения, уточнить записи, сделанные на занятии, проверить свои впечатления и т.п. Часто беседа проводится и с учениками, и с учителями по заранее разработанной программе, в которую включаются вопросы, интересующие экспериментатора. Особое значение имеют данные, сообщенные в ходе беседы учителем, участвующим в эксперименте, проводившим занятие по предложенной ему методике.

В случае положительной оценки экспериментатор получает подтверждение своего замысла, укрепляется его вера в то предположение (гипотезу), на котором основывается эксперимент. В случае отрицательных суждений или отдельных замечаний очень важно знать общее отношение учителя к предложенной ему методике – не был ли он уже заранее настроен против, проявлял ли готовность выполнить план-программу ведения занятий, разработанную экспериментатором. В любом случае все замечания должны быть тщательно записаны, изучены и обдуманы. Следует отметить, что замечания предубежденного учителя имеют особую ценность, так как он скорее увидит слабые места или недоработки в новой методике, нежели увлеченный данной идеей учитель-энтузиаст, сам горячо стремящийся к успеху.

Анализ результатов беседы (или отзыв) можно оформить в виде рабочей таблицы такого примерно вида:

Положительные моменты	*Недостатки*	*Выводы*
…	…	…

***3**. Анализ ответов на вопросы анкеты*

Если беседа имеет ценность непосредственного общения и обеспечивает немедленное получение ответов на интересующие экспериментатора вопросы, то анкеты дают возможность собрать значительный массовый материал.

Поскольку с помощью анкет можно собрать большой материал, он требует и количественной обработки, и проведения тщательного качественного анализа.

Количественная обработка может дать, прежде всего, общие данные о количестве утвердительных и отрицательных ответов, полученных по каждому вопросу анкеты. (При большом количестве ответов можно перевести эти данные в проценты). Количественный анализ должен быть направлен в первую очередь на анализ негативных суждений (выявление их причины и принятие решений о необходимости изменения тех или иных частей программы). Положительные суждения используются как материал, подтверждающий гипотезу.

При проведении экспериментальной проверки в разных местах большую наглядность этим данным придает сведение их в общие таблицы: в этих случаях виднее становятся совпадения данных (легче обнаружить тенденцию), а также разброс отдельных данных, который носит случайный характер или объясняется какими-либо причинами, характерными лишь для данных условий проведения эксперимента.

Таким образом, общая методика обработки анкетных данных сводится к их тщательному подсчету, проведению внимательного анализа всех случаев заметного совпадения, разнобоя в данных, разброса. Анкетные данные могут помочь выявлению возможных причин дачи разнородных ответов и более четко проявляющихся тенденций, которые могут указывать на определенную закономерность, связанную как с особенностями восприятия учащихся, так и с особенностями предлагаемой методики или организацией занятий с учащимися.

***4.** Анализ результатов контрольных работ*

Особое значение имеет сбор и интерпретация данных, полученных на контрольных работах (текущих, итоговых, отсроченных). Для экспериментатора большое значение имеет количественный и качественный анализ всех допущенных обучаемыми ошибок. Надежность и информативность этих данных во многом зависит от того, что и как проверялось, т.е. адекватны ли контрольные вопросы и задания содержанию, целям и задачам обучения, так ли они поставлены, то ли они выявляют, что действительно может служить показателем усвоения знаний. Поскольку это действительно вопрос, представляющий весь смысл проверки качеств усвоения, остановимся очень кратко на некоторых основных положениях, связанных с методикой проведения контрольных работ.

В настоящее время очень распространено выделение в учебном материале компетенций, усвоение которых затем проверяется дифференцированно в зависимости от их значимости и весомости. Необходимо отметить, что для осуществления правильного подбора заданий, проверяющих действительное усвоение самого главного и существенного, важно проведение предварительной оценки каждой из выделенных единиц учебной информации. Эта оценка производится с учетом их значимости и весомости в общей системе компетенций по данной учебной дисциплине.

Эта значимость определяется с точки зрения: а) значения для усвоения последующих тем и разделов курса или других, связанных с ним, курсов; б) практического значения; в) содержащихся в них трудностей для усвоения.

В результате каждой из единиц может быть дана соответствующая ориентировочная оценка, относящая их к определенной категории, т.е. это могут быть единицы, знание которых: абсолютно необходимо (1), полезно и необходимо (2), полезно, но не существенно необходимо (3). Естественно, при контроле главное внимание должно быть обращено на проверку усвоения единиц, относимых к 1 и 2 категориям. Ряд исследователей вводят числовые коэффициенты-«веса» заданий, соответствующих важности значимости проверяемых с их помощью компетенций, которые затем учитываются при подсчете числовых характеристик правильных и неправильных ответов. Если такие «веса» не вводятся, должна быть соблюдена определенная пропорция в количестве заданий, проверяющих более значимый материал. Для большей надежности проверки знаний можно вообще не давать заданий на проверку усвоения второстепенного по значимости учебного материала, выявляя усвоение единиц учебной информации, отнесенных лишь к 1 и 2 категориям.

При сборе массовых данных контроля при эксперименте большое значение имеет и форма, в которой даются контрольные задания.

При ограниченном числе испытуемых задания, направленные на проверку усвоения самого основного и существенного, могут даваться в любой форме, т.е. могут требовать развернутых ответов, обоснований и т.п. При сборе массового материала большой популярностью пользуются *тесты или задания тестового типа,* т.е. требующие или очень краткого ответа, или выбора ответа из числа данных. При проведении контрольных работ-тестов возможно использовать некоторые простейшие приспособления для убыстрения подсчета числа правильных или неправильных ответов (например, разного рода шаблоны, проверки по «ключу»), однако неоценимую помощь в этом могут оказать средства вычислительной техники. Кроме того, благодаря сокращению времени, затрачиваемого на запись ответа, можно за единицу времени дать больше заданий, с помощью которых можно глубже и полнее проверить усвоение знаний, охватить разные их связи и зависимости. Значение имеет, конечно, как сама формулировка задания, так и подбор вариантов, предлагаемых на выбор. Необходимо учитывать, что в числе вариантов ответов, даваемых на выбор, не должно быть абсурдных, нелепых, нелогичных ответов, ответов, содержащих ложную информацию, которая может непроизвольно остаться в памяти учащегося. Важно также проверить, чтобы формулировки контрольных заданий соответствовали в основном формулировкам заданий в упражнениях, чтобы в них не было ничего неожиданного для обучаемых.

Таким образом, при подборе контрольных заданий экспериментатор исходит из того, что задания должны проверять усвоение самого существенного и значимого в изученном материале, быть нацеленными на выявление определенных аспектов и компетенций (в соответствии с выбранными критериями) и при использовании методики тестового контроля должны соответствовать основным требованиям к подбору вариантов ответов, предлагаемых на выбор.

5. *Методика анализа ошибок.*

Огромное значение для выявления рассмотренных выше показателей и характеристик усвоенных компетенций имеет работа по анализу ошибок, допускаемых учащимися в контрольных работах. При правильном подборе и заранее продуманной нацеленности заданий некоторые характеристики выявляются сразу же при изучении ответов, данных на соответствующую группу вопросов (например, имеющих целью выявить объем знаний, прочность, осмысленность и т.д.).

Количество ошибок служит важным показателем для выявления как качества усвоения знаний, так и эффективности предлагаемой методики. Например, отсутствие ошибок в ответах на определенные задания может свидетельствовать не только о хороших знаниях обучаемых, но и служить сигналом о том, что задания – слишком легкие. Отдельные ошибки чаще всего носят случайный характер, но могут свидетельствовать о каких-либо пробелах в знаниях тех или иных учащихся, а также о каких-либо характерных особенностях протекания у них различных познавательных процессов.

Появление ошибок в ответах по тому или иному вопросу у многих обучаемых свидетельствует о какой-то закономерности, причиной появления которой может служить: недостаточная проработанность учебного материала; неточности в формулировке заданий; нечеткость исходных данных или даже какие-либо технические причины (опечатки, пропуск знака и т.д.). В ряде случаев ошибки могут быть вызваны особенностями психологии восприятия или других психических процессов, связанных с познавательной деятельностью обучаемых. Приведем примеры некоторых типовых ошибок с указанием причины их появления.

Так, встречаются *ошибки привычности*. Например, при переходе от сложения к умножению может иметь место сложение множителей: 3+2=5 и 7·5=*12*. *Ошибки устойчивости* проявляются в повторении или добавлении ранее встречающейся буквы, цифры. Например, 7+9=*19*. Распространены *ошибки сходства*, проявляющиеся в неумении дифференцировать сходные буквы, знаки. Например, путают буквы ъ и ь, знаки ∩ и ∪ и т.д. Эти последние ошибки во многом проистекают и от методики обучения. Важно также предупредить появление и всех других ошибок, которые связаны с каким-либо интерферирующим влиянием, например, влиянием предшествующих знаний. Например, «family» в английском языке означает «семья», а не «фамилия», как в русском языке.

При анализе ошибок, особенно при заданиях с выбором ответа, часть ошибок может объясняться осторожностью, например, если вообще не выбран ни один вариант ответа. Пропуск заданий может, однако, свидетельствовать и о недостаче времени (задание было пропущено, чтобы потом над ним подумать, а времени не хватило). Не-выполнение последних заданий довольно часто говорит именно о нехватке времени, отведенного на выполнение контрольной работы.

При заданиях с выбором ответа имеется всегда и элемент случайности, риска (угадал / не угадал).

Общая же методика анализа ошибок при сборе массового материала складывается из выполнения следующих действий:

- производится общий подсчет количества ошибок по каждому вопросу;
- выделяются задания: а) в ответах на которые было допущено очень мало ошибок (или вообще не было ошибок); б) были лишь отдельные ошибки; в) было много ошибок; г) которые не были выполнены большинством обучаемых;
- по выявленным группам заданий проводится анализ возможных причин появления ошибок, которые могут носить частно-методический характер (быть связанными с недостатками методики объяснения и закрепления конкретного учебного материла); могут проистекать от недостатков предлагаемой методики; носить психологический характер; быть чисто случайными;
- делаются педагогические и методические выводы, направленные на внесение соответствующих изменений в структуру предлагаемой системы занятий по формированию того или иного знания.

Контрольные вопросы

1. Какие методы применяют на основном этапе научно-исследовательской работы?
2. Что такое статистическое наблюдение?
3. Как называется статистическое наблюдение, при котором необходимые сведения получают путем подсчета, измерения или взвешивания единиц совокупности?
4. Перечислите основные методы выявления суждений.
5. Что такое саморегистрация?
6. В чем отличия анкетирования от интервьюирования, в чем их сходства?
7. Как организуется корреспондентский учет?
8. Какие классификации наблюдений Вам известны?
9. Что такое научный эксперимент, и в каких случаях он применяется?

10. Перечислите основные стадии организации педагогического эксперимента.

Контрольные задания

1. Составьте протокол наблюдения на уроке в начальной школе.
2. Составьте анкету для учителей и анкету для учащихся 4 класса. В чем Вы видите отличия этих анкет?
3. В ходе практики проведите контрольную работу по математике и проанализируйте ее результаты.

3. Измерения и шкалы

В последнее время предпринимаются серьезные шаги, направленные на внедрение в педагогику и психологию кибернетических и математических методов оценки и измерения явлений и установления количественных зависимостей между ними. Кибернетические и математические методы позволяют подойти к решению одной из сложнейших задач этих наук – количественной оценки изучаемых явлений. Лишь обработка количественных данных и полученные при этом выводы могут объективно доказать или опровергнуть выдвинутую гипотезу.

При организации любого измерения всегда предполагается соотнесение (сравнение) измеряемого с измерителем (эталоном). После процедуры соотнесения (сравнения) производится оценка результата измерения. Если в технике в качестве измерителей используют, как правило, материальные эталоны, то в социальных измерениях, в том числе при педагогических и психологических измерениях, измерители могут быть идеальными. Действительно, чтобы определить сформировано или не сформировано у обучаемого конкретное умственное действие, необходимо сравнить действительное с необходимым. В этом случае, необходимое – это идеальная модель, существующая в голове учителя.

Следует заметить, что только некоторые психолого-педагогические явления могут быть замерены. Большинство же из них не поддаются измерению, поскольку отсутствуют эталоны этих явлений, без которых не может быть выполнено измерение.

Что касается таких явлений, как активность, бодрость, пассивность, усталость, умения, навыки и т.д., измерить их в физическом смысле не представляется возможным, поскольку нет эталонов активности, пассивности, бодрости и т.д.

Мы будем придерживать более общего понимания измерения.

Определение 3.1. **Измерение** – это приписывание чисел объектам или событиям согласно определенным правилам.

В процессе измерения мы представляет реальные события, явления и свойства в виде чисел в соответствии с принятой математической моделью измерения.

Основное значение измерения состоит в том, что операции с числами, которые приписаны объектам, позволяют сравнивать между собой эти объекты по состоянию измеряемого свойства. Правило, по которому проводится измерение, порождает тип измерения- «измерительную шкалу».

Определение 3.2. **Шкала** – это средство фиксации результатов измерения свойств объектов путем упорядочивания их в определенную числовую систему, в которой отношение между отдельными результатами выражено в соответствующих числах. В процессе упорядочивания каждому элементу выборки ставится в соответствие определенный балл (шкальный индекс), устанавливающий положение наблюдаемого результата на шкале.

Определение 3.3. **Шкалирование** – это операция упорядочивания исходных эмпирических данных путем перевода их в шкальные оценки. Шкала дает возможность упорядочить наблюдаемые явления, при этом каждое из них получает количественную оценку (квантифицируется). Шкалирование помогает определить низшую и высшую ступени исследуемого явления.

Пример 1. При исследовании учебных интересов учеников мы устанавливаем их границы: очень большой интерес – очень слабый интерес. Между этими границами определяется ряд ступеней. В результате складывается следующая шкала учебных интересов: очень большой интерес (1); большой интерес (2); средний (3); слабый (4);

очень слабый (5). Рекомендуется вводить и экстремальные обозначения крайних границ шкалы.

В психолого-педагогических исследованиях применяют классификацию шкал, предложенную С.Стивенсоном (см. рис.1), согласно которой четыре основных способа измерения, связанные с различными правилами, называют **измерительными шкалами** (номинальная, порядковая, интервальная и шкала отношений).

Рис. 1. Классификация шкал по С. Стивенсу

1. **Номинальная шкала** (шкала наименований, неметрическая), которую правильнее было бы считать классификацией, а не измерением, делит все объекты на группы по какому-либо признаку (различию). Этим признакам присваиваются определенные числа (код), что создает удобства при дальнейшей обработке экспериментальных данных. Никакого количественного соотношения между объектами в номинальной шкале нет.

Пример 2. Учащиеся класса делятся на две категории и обозначаются: девочки – 01, мальчики – 02.

Группы нарушителей дисциплины и их обозначение (кодирование): на уроке – 1, на улице – 2, дома – 3.

В процессе проверки соответствия подготовки выпускников школ требованиям ФГОС появляется группа аттестованных и не аттестованных учеников.

2. **Шкала порядка** (порядковая, ранговая, ординальная) предназначена для измерения (обозначения) степени различия какого-либо признака или свойства у разных объектов. Самым ярким примером порядковой шкалы является пятибалльная система оценки ЗУН учащихся. Для нее разработаны критерии и различные методы измерения. Значительно труднее применять порядковую шкалу для количественных оценок других качеств личности (в воспитательном процессе). Имеется несколько **разновидностей порядкового шкалирования** (измерения):

- ранжирование (в ряд),
- группировка (ранжирование по группам),
- парное сравнение,
- метод рейтинга,
- метод полярных профилей.

Ранжирование. Изучаемые объекты располагаются в ряд (упорядочиваются) по степени выраженности какого-либо качества. Первое место в этом ряду занимает объект с наиболее высоким уровнем данного качества, и ему присваивается наивысший балл (числовое значение выбирается произвольно). Затем каждому объекту ранжированного ряда присваиваются более низкие оценки, соответствующие занимаемым местам.

Группировка всей совокупности объектов наблюдения в несколько рангов, достаточно ясно отличающихся друг от друга по степени измеряемого признака.

Пример: учащиеся класса согласно пятибалльной системе оценки ЗУН делятся на отличников, хорошистов и т. д.

Парное сравнение. Учащиеся сопоставляются друг с. другом (каждый с каждым) по какому-либо качеству. Если они одинаковы, то каждый получает по баллу. Если у одного этого качества больше, чем у другого, первый получает два балла, второй – 0 (как при спортивных играх по круговой системе). Суммируя полученные каждым баллы, получаем количественное выражение уровня развития данного качества у каждого учащегося (его ранг).

Рейтинг. В этом приеме оценка объекта производится путем усреднения оценочных суждений группой компетентных экспертов. Имея общие критерии оценки (в порядковой шкале, в баллах), эксперты независимо друг от друга (в устной или письменной форме) выносят свои суждения. Усредненный результат экспертной оценки является достаточно объективным и называется рейтингом.

Метод полярных профилей. Этот прием предполагает применение для оценки условной шкалы, крайними точными которой являются противоположные значения признака (например, добрый – злой, теплый – холодный и т. п.). Промежуток между полюсами делится на произвольное количество частей (баллов).

Пример 3. Оценка степени доверия кандидату на выборную должность дается в полярной шкале:

(Доверяю полностью) 10 – 9 – 8 – 7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1 (Совсем не доверяю)

3. **Интервальная шкала** (интервальное намерение, метрическая) – это такое присвоение чисел объектам, когда определено расстояние между объектами и предусмотрена общая для всех объектов постоянная единица измерения. Иначе говоря, в интервальной шкале вводится единица и масштаб измерения. Нулевая точка шкалы выбирается произвольно.

Пример 4. Температурные шкалы; шкалы стандартизированного тестирования интеллекта.

Интервальная шкала – количественная. В ней возможны все арифметические действия над числами, кроме операции деления. Таким образом, в интервальной шкале нельзя определить во сколько раз один объект больше или меньше другого. Например, если ученик ответил правильно на 10 заданий, то это не означает, что он знает вдвое больше ученика, ответившего на 5 заданий теста.

4. **Шкала отношений** (метрическая) отличается от интервальной только тем, что ее нулевая точка не произвольна, а указывает на полное отсутствие измеряемого свойства. Сюда относятся и все количественные данные, получаемые пересчетом объектов какого-либо множества (число учащихся, уроков и т. п.).

Уровни измерения и математические вычисления, используемые на данных уровнях, показаны в таблице ниже. Из этой таблицы видно, что переход от одного уровня к другому сопровождается расширением класса допустимых математико-статистических операций. Как следует из таблицы, наилучшей является шкала отношений, которую на сегодняшний день удалось реализовать только в рамках физических измерений.

Шкала	**Математические и статистические величины, вычисление которых допустимо на данном уровне**
Номинальная	Мода, процентные частоты, доли, корреляция
Порядковая	Мода, медиана, квартили, коэффициент корреляции, дисперсионный анализ
Интервальная	Мода, медиана, квартили, коэффициент корреляции, ранговые критерии, средняя, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент корреляции
Отношений	Все арифметические операции, все понятия и методы математической статистики

Контрольные вопросы

1. Какие виды шкал известны? Какие из них метрические?
2. Какие операции возможны, если полученные данные номинативные?
3. Какие операции возможны, если полученные данные ранговые?
4. Какие операции возможны, если данные получены по интервальной шкале?
5. Какие вы знаете разновидности порядкового шкалирования? В чем их отличия?

Контрольные задания

1. Приведите примеры номинальных шкал.
2. Приведите примеры ранговых шкал, использующихся в образовании.

4. Количественные методы оценки психолого-педагогических явлений

Широко известны следующие два метода приближенной количественной оценки педагогических явлений: метод регистрации и ранговый метод.

4.1. Метод регистрации

Суть метода регистрации заключается в приписывании определенных чисел объектам, различающимся по некоторому, интересующему исследователя признаку. Например, выделяют какой-нибудь признак и отмечают каждый случай, когда в наблюдении или эксперименте встречается объект или явление с этим признаком. Каждому такому объекту или явлению приписывается «1». Каждому из наблюдаемых объектов или явлений, у которых этот признак отсутствует, приписывают «0».

Чтобы произвести регистрацию предметов или явлений, достаточно уметь отличать предметы или явления, имеющие данный признак, от предметов и явлений, у которых он отсутствует.

Такая регистрация дает меру для определения величин, характеризующих исследуемые явления.

Пример 1. Регистрируя в классе каждого неуспевающего ученика, получают число неуспевающих учащихся в классе, регистрируя каждый неуважительный пропуск занятий, получают число прогулов за соответствующий период времени и т.д.

Из этих примеров следует, что с помощью метода регистрации можно числено оценить такие признаки, как рождаемость, смертность, успеваемость класса и т.д.

Таким образом, метод регистрации не требует знаний каких-либо количественных эталонов. В его основе лежит операция не физическая (сопоставление с эталоном), а логическая, т.е. определение принадлежности данного объекта к некоторому классу с заданным признаком. Это очень важная особенность. Она позволяет осуществлять измерение даже тогда, когда невозможно количественно определить сами свойства изучаемых явлений.

С такой ситуацией педагог-исследователь сталкивается очень часто. Вот почему метод регистрации является одним из наиболее доступных и широко применяемых педагогами способов количественной оценки процессов обучения и воспитания. Регистрируя ошибки, которые допускают в письменных работах ученики, поступки, которые они совершают и т.п. можно определить косвенные количественные характеристики всех этих признаков. А это значит, что можно строго математически исследовать закономерность учебного процесса.

Из самой сущности метода регистрации вытекают и граничные условия его применимости.

Необходимым и достаточным условием такой оценки является условие наличия точного критерия, пользуясь которым, исследователь в любой ситуации может однозначно отличить объект, имеющий данный признак, от объекта, который этого признака не имеет.

Критерий должен точно и однозначно характеризовать признак, который мы собираемся регистрировать. Необходимо точное предварительное описание (определение) тех показателей признака, по которым мы будем устанавливать, имеется ли данный признак у данного объекта или нет.

Так, например, нельзя браться за подсчет количества успевающих учеников в классе, пока не условились, кого из учащихся считать успевающим, пока не установили совершенно четко, как будем отличать успевающего ученика от неуспевающего.

Одна из распространенных ошибок педагогов-исследователей заключается в том, что, проводя количественные исследования, авторы даже не пытаются сформулировать подобные критерии. А это приводит к тому, что полученные разными исследователями числовые данные нельзя сопоставлять, поскольку они получены при разных условиях.

Итак, в ходе применения метода регистрации мы получаем данные, соответствующие шкале наименований. В этом случае все изучаемые объекты распределяются на несколько классов в соответствие с состоянием измеряемого свойства. Всем объектам, попавшим в один класс, приписывается одно число. Полученные числа обладают лишь свойствами равенства или различия: если объекты попали в один класс, то они равны по состоянию изучаемого свойства, если же они попали в разные классы, то они различны по состоянию изучаемого свойства. Числа, которые используются в этом случае, являются ярлыками и могут быть заменены любыми символами. Количественная обработка производится не с самими символами, а с числами, характеризующими количество объектов, попавших в каждый класс.

Итак, возможные операции:

- подсчитать число объектов в каждом классе;

- найти процентное отношение числа объектов в каждом классе к общему числу объектов;
- выделить класс с максимальной частотой (модальный);
- вычислить вероятность попадания следующего объекта в тот или иной класс.

Контрольные вопросы

1. В чем суть метода регистрации?
2. Сформулируйте необходимое условие применения метода регистрации.
3. Какие недостатки метода регистрации?

Контрольные задания

1. Разработайте методику измерения усвоения детьми младших классов одной из тем математики согласно методу регистрации.

Литература:

Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть I

http://www.ed.gov.ru/obedu/noc/rub/standart/p1/1287/

Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть II

2. Найдите пример измерения какого-либо психологического свойства в соответствии с шкалой наименований.

<u>*4.2. Метод ранговой оценки*</u>

Важное место в психолого-педагогических исследованиях занимает ранговый метод оценки изучаемых явлений. Ранговой оценкой пользуются в тех случаях, когда величину признака измерить не представляется возможным и в тех случаях, когда мы не знаем, что представляет собой эта величина.

Суть метода ранговой оценки заключается в том, что явления или объекты располагаются в порядке возрастания или убывания величины рассматриваемого признака. Затем каждому объекту или явлению приписывается порядковое число, обозначающее его место в данном ряду. Это число называют рангом.

Ранговые числа подбирают так, чтобы объектам с большей величиной изучаемого признака приписывались числа большие, чем у объектов с меньшей величиной этого признака. При этом расстояние между значениями соседних рангов может быть произвольным (это определяет сам исследователь).

Примером ранговой оценки может служить оценка работ и ответов учащихся по пятибалльной шкале, оценка работ, выполняемых рабочими, оценка результатов конкурсов или соревнований и подобные им измерения.

Приведем пример применения метода ранговой оценки.

Пример 2. Группа испытуемых отвечала на вопросы теста. Каждый из испытуемых должен был ответить на 10 вопросов (измеряем степень компетентности по некоторому вопросу). Оценка ответов проводилась по пятибалльной шкале следующим образом:

число правильных ответов:	1 2 3 4 5 6	7	8 9	10
оценка в баллах:	2	3	4	5

Следует заметить, что любой ряд чисел, написанный в возрастающем порядке, был бы пригоден, т.к. нулевая точка отсчета и интервалы между двумя соседними цифрами в порядковых измерения неизвестны.

Нетрудно видеть, что числа 2,3,4 и 5 характеризуют только место испытуемого, которое он занимает в своей группе. Иначе говоря, эти цифры дают ранговую оценку знаний испытуемого по данной теме, а не объем знаний.

Ранговая оценка показывает только положение участника эксперимента среди других участников, но она не определяет величины самого интервала, на которые разбита вся последовательность возможных значений величины признака, поскольку эта разбивка делается произвольно.

Если вернуться к нашему примеру, то нетрудно заметить, что неудовлетворительная оценка охватывает шесть интервалов признака (1,2,3,4,5 и 6 правильных ответов), удовлетворительная и отличная – только один интервал. Это не значит, что величина «объема знаний» у участника, получившего оценку 4, в два раза больше, чем у получившего оценку 2, а только показывает, что у первого испытуемого объем знаний больше, чем у второго. Насколько и во сколько раз больше, – этого сказать нельзя.

Поскольку ранговые числа являются порядковыми и ни в коей мере не характеризуют интервальных значений (для них интервалы условные, непостоянные значения), то над этими числами нельзя производить арифметические действия.

Основной областью, где широко применяется метод ранговой оценки, является исследование субъективных, нематериальных явлений и различных психических свойств и процессов.

Необходимыми и достаточными условиями такого измерения являются:

1. Наличие точного критерия для установления наличия или отсутствия нужного признака у исследуемых объектов или явлений.

2. Наличие критерия для выявления количественных величин данного признака у исследуемых объектов или явлений.

Последний критерий должен дать исследователю возможность хотя бы приближенно оценить величину изучаемого признака (по формуле «больше-меньше»), т.е. установить, одинаково или не одинаково развит у этих объектов данный признак.

Эти два условия позволяют исследователю не только отличить объекты с данным признаком от объектов, не обладающих этим признаком, (как в методе регистрации), но также установить, у кого какие результаты по формуле «выше-ниже», «больше-меньше» (второе условие).

Итак, в ходе применения метода рангового оценивания мы получаем данные, соответствующие шкале порядка.

Контрольные вопросы

1. В чем суть метода рангового оценивания?
2. Сформулируйте необходимое условие применения метода рангового оценивания.
3. Какие недостатки метода рангового оценивания?

Контрольные задания

1. Разработайте методику измерения усвоения детьми младших классов одной из тем математики согласно методу рангового оценивания.

Литература:

Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть I

http://www.ed.gov.ru/obedu/noc/rub/standart/p1/1287/

Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть II

2. Найдите пример измерения какого-либо психологического свойства в соответствии с ранговой шкалой.

3. Разработайте рейтинг учащихся начальных классов.

4. Разработайте рейтинг студентов вашей группы.

5. Понятие вариационного ряда

Обычно полученные в результате наблюдений данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, зачастую бывает трудно выявить какую – либо закономерность их варьирования. Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины, если таковые имеются, опытные данные подвергаются обработке.

Пример 1. Эксперимент заключается в наблюдении числа пропуска уроков учащихся исследуемых классов за некоторый период времени:

3; 1; 3; 1; 4; 2; 2; 4; 0; 3;
0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1;
4; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 0; 3; 4;
1; 3; 2; 7; 2; 0; 0; 1; 3; 3;
1; 2; 4; 2; 0; 2; 3; 1; 2; 5;
1; 1; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 1; 5.

Здесь случайная величина X – это число пропусков занятий. Она является дискретной, а полученные о ней сведения представляют собой статистические данные. Это первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, прежде всего – упорядочению.

Определение 5.1. Полученная в результате ранжирования последовательность значений случайной величины называется ***вариаци-***

онным рядом. Разность между крайними членами вариационного ряда называется ***размахом*** R вариации.

Пример 2. Вернемся к совокупности статистических данных примера 1 и ранжируем их:

0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 7.

Полученная последовательность значений случайной величины X – числа пропусков занятий, расположенных в порядке неубывания, есть вариационный ряд. Размах вариации равен $R= 7 – 0 = 7$.

После проведения операции ранжирования опытные данные нетрудно объединить в группы, т.е. сгруппировать так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы.

Пример 3. Из полученного в примере 6 ряда чисел видно, что все 60 значений случайной величины разбиты на 7 групп, в пределах которой все значения случайной величины одинаковы:

0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1;
2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2;
3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3;
4; 4; 4; 4; 4; 4;
5; 5;
7.

Каждое такое значение называют **вариантой.**

Определение 5.2. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе группированного ряда наблюдаемых данных, называется **вариантой**, а изменение этого значения – **варьированием**.

Обозначается варианта x_i. В нашем примере 7 вариант:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4;\ x_6 = 5;\ x_7 = 7.$$

После того, как исследователь, получил данные, следует их систематизировать и, таким образом, начинается этап статистической обработки данных.

Группировку данных при количественной дискретной вариации просто показать на примере.

Пример 4. Пусть 40 человек выполняли контрольную работу по математике, в которой было 5 задач. Варианты (количество решенных учеником задач) этой совокупности выражаются числами:

4,3,5,2,4,5,4,4,4,2,4,5,3,4,5,3,3,4,3,3,4,5,4,4,4,5,4,1,4,2,3,3,4,1,4,3,2,4,3,4.

Группировку вариант целесообразнее всего провести по значениям отдельных вариант: минимальное число решенных задач – 1, максимальное – 5. Для данной совокупности целесообразнее всего установить 5 классов: одна решенная задача, две и т.д. Далее все эти варианты следует распределить по этим 5 классам.

Классы (кол-во решенных задач)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	
Численность	*2*	*4*	*10*	*18*	*6*	*Σ=40*

В нашем примере количество классов было взято таким, каково число возможных значений вариант (т.к. число возможных вариант невелико по сравнению с объемом выборки). В этом случае, очевидно, интересующий нас признак имеет точечное распределение. Если признак распределен интервально, для систематизации полученных данных используют несколько иной подход.

Например, часто используются тесты с большим числом вопросов (более 50).

Пример 5. Результаты тестирования по 50 вопросам 40 людей приведены в таблице (интересующий признак – количество вопросов, на которые даны верные ответы):

36	*45*	*36*	*41*	*44*	*32*	*41*	*33*
38	*43*	*42*	*40*	*36*	*42*	*21*	*29*
44	*28*	*31*	*31*	*38*	*37*	*34*	*43*
44	*43*	*41*	*36*	*44*	*43*	*22*	*36*
35	*34*	*36*	*41*	*44*	*27*	*41*	*50*

Если для данных вариант совокупности классы наметить по значениям каждой варианты, т.е. от 21 до 50, то может получиться 30 классов (количество их сравнимо с объемом выборки), ряд в этом случае окажется растянутым. Для такого типа распределений намечают классы, охватывающие несколько значений вариант, например, *20-25, 25-30, 30-35, 35-40, 40-45, 45-50.* Следует иметь в виду следующие обстоятельства:

- конец предыдущего интервала является началом следующего;

- левая граница интервала принадлежит данному интервалу, а правая – нет (кроме последнего интервала);
- длина всех интервалов одинаковая.

Следует иметь в виду, что в статистических справочниках часто встречаются таблицы, при составлении которых не все эти условия выполнены.

Таким образом, в нашем примере вариационный ряд будет состоять из 6 классов:

Интервалы (классы)	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*	*40-45*	*45-50*	
Численности	*2*	*3*	*6*	*10*	*17*	*2*	$\Sigma = 40$

Обычно количество интервалов (классов) варьируется от 6 до 12. Для расчета длины интервалов, необходимо сначала определиться с тем, сколько будет интервалов. Затем разность между максимальным и минимальным значениями вариации следует разделить на количество интервалов. Таким способом высчитывается длина интервалов (или шаг).

Из вышесказанного следует, что после распределения всех вариант по интервалам (классам) мы получаем ряды, из которых видно, как часто встречаются варианты каждого интервала и как варьируют признаки от минимальной величины до максимальной.

Приведенные выше таблицы называют таблицами распределений. Их составляют при статистических исследованиях и на их основе делают серьезные научные и практические выводы. Если повторить наблюдения, то данные с большой вероятностью изменятся, но общая картина достаточно устойчива. Эта устойчивость еще сильнее, если рассматривать не сами наблюдаемые численности, а частоты, т.е. n_i/n, где n-общая численность наблюдений или объем выборки. В этом случае речь идет о статистическом распределении выборки.

Определение 5.3. Таблица, в первую строку которой помещены наблюдаемые значения с.в. X в порядке возрастания (варианты), во вторую – относительные частоты: $p_i = n_i/n$ называют **статистическим рядом или статистическим распределением выборки:**

x_i	x_1	x_2	…	x_k
p_i	p_1	p_2	…	p_k

Эта таблица в математической статистике называется

Очевидно, $p1 + p2 + ... + pк = 1$.

Пример 6. В результате изучения признака X получены следующие результаты:

набл.знач. признака	*2*	*6*	*10*	*12*	*14*
частота	*1*	*5*	*7*	*3*	*4*

Найти статистическое распределение выборки.

Решение. Найдем относительные частоты:

$p1 = 1/20$, $p2 = 5/20$, $p3 = 7/20$, $p4 = 3/20$, $p5 = 4/20$ (сумма относительных частот равна 1).

Ответ:

xi	*2*	*6*	*10*	*12*	*14*
pi	*1/20*	*5/20*	*7/20*	*3/20*	*4/20*

Контрольные вопросы

1. Что такое варианта?
2. Какие существуют типы распределения статистических данных?
3. Что такое статистический ряд?

Контрольные задания

1. Получены данные о результатах тестирования в баллах: *50 26 46 38 37 36 35 39 46 24 20 45 46 34 38 49 47 46 34 48 23 26 29 31 38 30 40 41 42 46 49 34 35 38 36 37 39 35 40 42.*

Задание: разгруппировать данные в соответствие с распределением.

2. Получены данные о размерах проданной одежды в магазине: *48 50 46 48 46 48 48 48 50 50 52 56 48 46 48 50 50 52 50 48 46 44 42 48 50 48 46 46 48 48 50 50 48 52 54 52 50 48 46 48 50 50 48 42 46 48 50 50 52 52.*

Задание: разгруппировать данные в соответствие с распределением.

3. Получены данные о продаже 50 пар женской обуви в магазине: *37 38 36 37 37 38 39 36 40 38 37 35 39 38 37 37 38 38 38 39 41 40 38 37 38 37 38 38 36 35 36 37 34 38 39 37 37 38 38 37 39 39 38 37 37 36 37 38 38 39.*

Задание: разгруппировать данные в соответствие с распределением.

4. Построить статистическое распределение выборки из 60-ти абитуриентов, которые исследовались на число баллов, полученных ими на приемных экзаменах:

20,19,22,24,21,18,23,17,20,16,15,23,21,24,21,18,23,21,19,20,24,21,20,18,17,22,20,16,22,18,20,17,21,17,19,20,20,21,18,22,23,21,25,22,20,19,21,24,23,21,19,22,21,19,20,23,22,25,21,21.

5. Дано распределение признака *X*:

xi	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
pi	*2*	*4*	*6*	*5*	*2*	*1*

Найти статистическое распределение выборки.

6. Дана выборка *1, 1, 1, 4, 3, 1, 5, 2, 2, 4, 4, 5.* Запишите статистическое распределение выборки.

7. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	2	4	5	8	9
p_i	0,1	0,3	___	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты варианта 5 будет равно:

1) *0,3* *2)* *0,2*

3) *0,5* *4)* *0,4*

8. Чему равна сумма частот статистического распределения выборки?

9. Докажите, что сумма относительных частот статистического распределения выборки равно 1.

10. В результате тестирования группа абитуриентов набрала баллы:

5,3,0,1,4,2,5,4,1,5.

Запишите статистическое распределение данной выборки.

11. Дано статистическое распределение выборки:

ξ_i	1	2	4	7	9
n_i	1	1	3	k	2

Найдите значение *k*, если объем выборки равен 8.

12. По статистическому распределению выборки установите ее объем:

x_i	*1*	*2*	*3*
ni	*3*	*8*	*4*

13. По статистическому распределению выборки установите ее объем:

x_i	1	2	3
ni	2	5	6

14. В результате 10 опытов получена следующая выборка:

2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 6.

Для нее законом распределения будет:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,3	0,2

x_i	2	3	4	6
p_i	0,3	0,3	0,3	0,2

x_i	2	3	4	6
p_i	0,3	0,2	0,3	0,2

x_i	2	3	4	6
p_i	0,3	0,2	0,3	0,2

15. В результате 10 опытов получена следующая выборка:

2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6.

Установите закон распределения вероятностей для данной выборки.

6. Графическое изображение статистических данных

6.1. Основы создания графического образа

Какова же роль графического метода в статистическом анализе, какие преимущества дает он в сравнении с традиционным табличным методом?

Познавательная ценность статистических графиков объясняется их способностью отображать реальную действительность в простом, ясном и наглядном виде. Визуальная интерпретация объективных статистических показателей позволяет облегчить познание предмета исследования, делает его более осязаемым. Таким образом, статистические графики могут дать новое знание о предмете исследования, которое в исходном цифровом материале непосредственно не проявляется. Выявление закономерностей, присущих тем или иным явлениям, факторов, их определяющих, дифференциация этих явлений во времени и пространстве – задачи, эффективно решаемые с использованием графического метода.

Основные элементы графика

Рассмотрим основные элементы статистического графика.

Определение 6.1. **Поле графика** – пространство, где расположены геометрические знаки, образующие график. Поле характеризуется его форматом, т.е. размером и пропорциями (соотношением сторон). Размер графика выбирается в соответствии с его назначением (демонстрация в аудитории, иллюстрация в статье, дипломной работе и т.д.). Пропорции графика определяются законами геометрической гармонии и требованием обеспечения неискаженного зрительного восприятия графического образа. Неудобны для восприятия графики сильно удлиненной формы (как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях).

Определение 6.2. **Геометрические знаки** – знаки-символы, изображающие статистические величины, составляющие графический образ. Это – точки, прямые и кривые линии и их отрезки, части плоскости (круги, прямоугольники, квадраты), объемные фигуры (кубы, параллелепипеды, шары), негеометрические фигуры (знаки-символы, изображения предметов). Выбор вида геометрических знаков определяется характером исходной информации (счетные множества – точки, динамика явлений – линейные графики, сравнение абсолютных и относительных величин – плоскостные и объемные фигуры и т.д.), а также основной целью, заложенной в данный график.

Пространственные ориентиры задаются координатной сеткой (диаграммы) или контурными линиями (картограммы). Координатная сетка образуется пересечением линий, проходящих через деления вертикальной и горизонтальной шкал. Наиболее часто применяемая система координат – декартовая (прямоугольная), реже – полярная (круговые графики). На горизонтальной шкале прямоугольных диаграмм обычно размещают независимые переменные (в т.ч. время), на вертикальной – зависимые переменные.

Основная горизонтальная (нулевая) линия обязательно должна быть показана на графике (координатные оси для координатных графиков и «платформа» для столбиковых диаграмм) и для наглядности выделена толщиной. Если уровни изображаемых показателей таковы, что основная часть координатной сетки остается неиспользованной, то на шкале делается разрыв ($\wr\wr, \approx$), исключающий ненужную часть сетки, но с обязательным указанием нулевой линии. Невключение нуля в вертикальную шкалу является распространенной ошибкой, искажающей изображение, что может привести к неправильному выводу.

Масштабные ориентиры задаются масштабными шкалами (в координатных графиках) или масштабными знаками (в картограммах). При выборе масштаба на вертикальной и горизонтальной шкалах следует добиваться правильной пропорции, соотношения между ними. Чрезмерное укорочение или удлинение вертикальной или горизонтальной шкалы также искажает изображение и может привести к неправильному выводу. Получение оптимальной пропорции достигается подбором (пробное построение нескольких вариантов) или опытностью составителя диаграммы.

Виды масштабных шкал: непрерывные и прерывистые. Непрерывная шкала применяется для непрерывно меняющихся величин (всем точкам шкалы соответствует какое-либо число, а все промежуточные значения могут быть интерпретированы). Прерывистая (порядковая) шкала – шкала с величинами, промежуточные значения которой не интерпретируются. Так, например, если деления шкалы представлены помесячными данными – январь, февраль и т.д., то точка между январем и февралем ничего не обозначает, т.к. масштаб не предполагал дневных данных. В этих случаях графическое изображение не непрерывно. Оно представляет собой, как правило, отдельные точки и их нельзя соединять непрерывной линией. В дипломных работах часто встречаются ошибки такого рода.

Экспликация состоит из названия графика и объяснения знаков-символов. Название графика должно быть лаконичным и ясным, отвечающим на три основных вопроса: что, где, когда. Пояснения к вертикальным и горизонтальным шкалам должны раскрыть содержание отображаемых показателей, единицы их измерения.

Композиция статистического графика

Под композицией графика понимается сочетание всех его элементов. Правильная композиция предполагает:

- тщательно продуманный отбор из имеющегося цифрового статистического материала тех данных, которые будут изображены на графике (таким образом, далеко не все полученные данные следует изображать графически);
- выбор формата (размера и пропорций) графика;
- выбор вида графика (такого, который, по мнению исследователя, наиболее ярко отражает полученные данные);
- подбор масштаба (масштабных шкал и знаков);
- правильное расположение и сочетание всех элементов графика.

Создание правильной композиции должно преследовать главную цель – получить компактное простое и логичное изображение описываемого явления, дающее цельное представление о нем и, в то же время, подчеркивающее при необходимости те или иные особенности этого явления (состав, структуру, дифференциацию, динамику и т.п.).

Немаловажной задачей композиции графика является художественная, эстетическая сторона его оформления. График должен привлекать внимание, обеспечивая в то же время легкость его прочтения и усвоения.

Чтобы композиция графика отвечала отмеченным требованиям, следует при построении графиков соблюдать определенные правила.

Основные правила построения графиков

1. Название графика должно быть ясным и полным, отражающим содержание и имеющим при необходимости особые пояснения.

2. Масштаб на горизонтальной и вертикальной шкалах должен быть оптимальным, не искажающим реальные соотношения анализируемых явлений.

3. Надписи и цифры располагаются, как правило, в нижней или правой части диаграммы.

4. Основной ряд полученных диаграмм следует располагать слева направо. Горизонтальную шкалу (по оси абсцисс) строить слева направо, вертикальную (по оси ординат) – снизу вверх.

5. Цифры шкалы следует наносить слева и снизу или вдоль осей.

6. Полезно включать в диаграммы числовые значения, соответствующие отдельным точкам кривой или математическую формулу кривой.

7. Если числовые данные не включены в диаграммы, желательно их дать рядом в табличной форме.

8. Нулевые линии (как вертикальную, так и горизонтальную) рекомендуется выделять на чертеже отдельно от всех других линий координатной сетки. Если по характеру данных это неудобно, то нужно показать нулевую линию посредством «разрыва» диаграммы.

9. Густота координатной сетки должна быть оптимальной, не затрудняющей чтения диаграммы.

10. Линии на диаграмме следует выделять от линий координатной сетки (толщиной или цветом). Т.о. самая заметная линия – это линия самой диаграммы, немного тоньше – нулевая линия и самые незаметные – линии координатной сетки.

11. Если графики отражают серию наблюдений, рекомендуется ясно обозначать все точки, соответствующие отдельным наблюдениям.

12. Во всех случаях, когда это возможно, сравниваемые величины изображаются с помощью линий или полос и столбиков одинаковой ширины, но не площадей или объемов.

Классификация графических изображений

По мере развития графического метода разработано большое число видов и форм графических изображений. Этот процесс продолжается и поныне. В зависимости от целей и назначения, характера применяемых графических образов различают несколько видов графиков.

1. Показательные графики или сравнительные диаграммы: диаграммы простого сопоставления; диаграммы структуры; графики динамических рядов; изобразительные диаграммы.

2. Аналитические графики математической статистики: кривые и поверхности распределения (огивы, кумулянты, полигоны и гистограммы); выравнивающие и интерполяционные кривые; кривые эмпирических закономерностей.

3. Статистические карты: картограммы, картодиаграммы.

В свою очередь, эти основные виды графиков имеют многообразие подвидов и форм в зависимости от способа построения, вида масштабных шкал и знаков, графических форм и образов.

Рассмотрим подробнее только некоторые из видов статистических графиков, которые чаще всего используются при изображении данных, полученных в ходе психолого-педагогических исследований.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные элементы графического образа и охарактеризуйте каждый из них.
2. Что такое композиция статистического графика и что она предполагает?
3. Дайте классификацию графических образов.

Контрольные задания

1. Найдите в интернете графический образ статистической информации и выделите основные его элементы.
2. Проанализируйте композиционную сторону выбранного вами графического образа.

6.2. Показательные графики и сравнительные диаграммы

Наиболее широко известны и часто применяются линейные графики, линейные, столбиковые, круговые (секторные) и векторные диаграммы.

При помощи линейного графика можно передать изменения какого-либо признака рядом чисел. Для сравнения двух или нескольких рядов чисел они обычно наносятся на одни и те же оси координат.

Пример 1. Для проверки эффективности предлагаемого метода в двух группах – контрольной и экспериментальной – был проведен контрольный срез. Участникам эксперимента предложили ответить на 15 вопросов теста. Получены следующие статистические данные:

Количество верных ответов	*Данные эксперим. группы*	*Данные контр. группы*
1	*3*	*5*
2	*4*	*7*

3	*3*	*5*
4	*3*	*5*
5	*4*	*8*
6	*3*	*6*
7	*3*	*5*
8	*5*	*6*
9	*5*	*7*
10	*5*	*10*
11	*5*	*7*
12	*4*	*8*
13	*4*	*7*
14	*39*	*7*
15	*10*	*7*

Изобразить линейный график, показывающий количество людей (в %) в контрольной и экспериментальной группах, давших верные ответы на различные вопросы теста.

Так как речь идет о двух группах (классах) людей, будем использовать линии двух различных видов, изображающие данные соответствующей группы. В этой задаче целесообразно по оси абсцисс задать количества верных ответов, а по оси ординат – % людей, показавших этот результат. Следует иметь в виду, что в данном случае имеет место прерывная масштабная шкала.

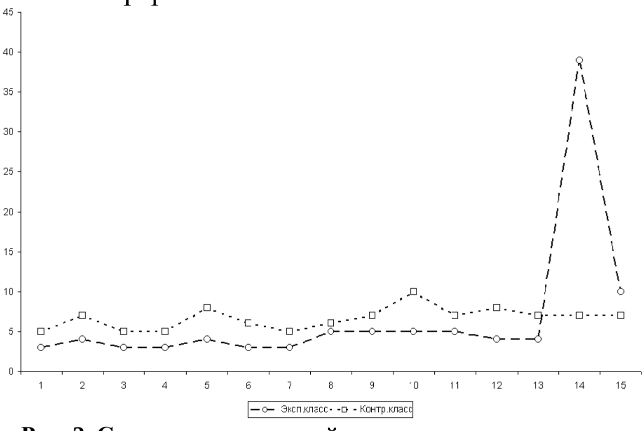

Рис. 2. Сравнительная линейная диаграмма количества людей, давших верные ответы на вопросы теста в ходе контрольного эксперимента в контрольной и экспериментальной группах.

Таким образом, нельзя изображенные точки соединять непрерывной линией такого же цвета, как и координатные оси. В этом случае мы будем использовать различные прерывные линии.

Соответствующий линейный график представлен на рис.2.

Данные исследования можно изобразить в виде *линейной диаграммы*.

Пример 2. Исследовалась некоторая совокупность людей. Интересующий нас признак – процент людей, занимающихся спортом. В ходе исследования было проведено 5 срезов и получены следующие данные:

Номер среза	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Занимаются спортом (в %)	*52*	*58*	*56*	*55*	*64*

В данном случае речь идет о том, что измеряется значение одного и того же признака на основе одного и того же критерия. В противном случае можно получить несопоставимые данные.

На рисунке 3 дана линейная диаграмма, отражающая данные о процентах людей, занимающихся спортом. По оси *Ox* откладываем номер среза, по оси *Oy* – количество людей, занимающихся спортом (в %).

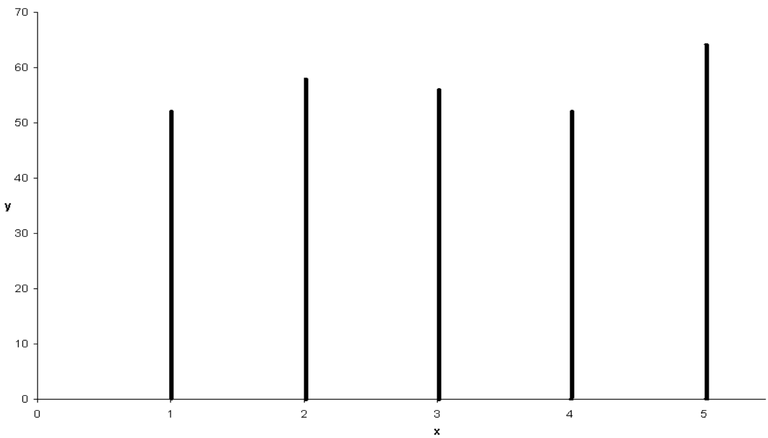

Рис. 3. Линейная диаграмма результатов серии срезов, проведенных в экспериментальной группе, о % людей, занимающихся спортом.

Для большей наглядности эти данные можно соединить ломаной линией, хотя следует помнить, что промежуточные данные при этом истолковать никак нельзя (рис. 4).

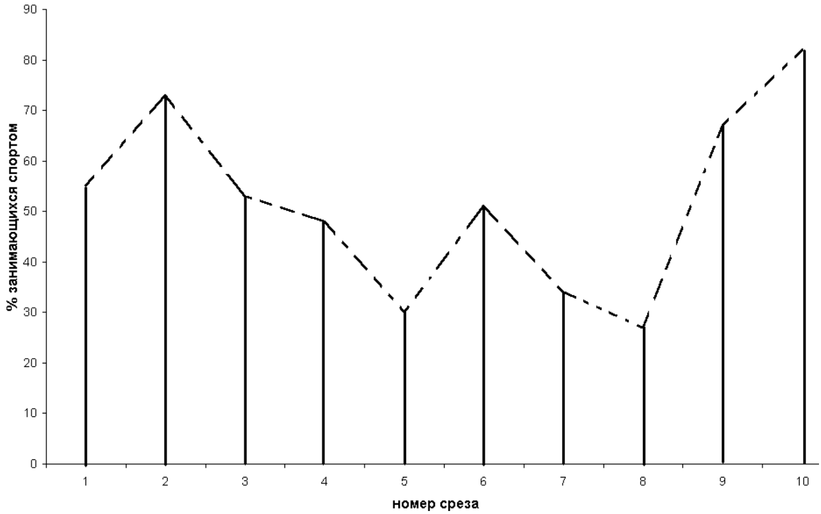

Рис. 4. Диаграмма результатов серии срезов, проведенных в экспериментальной группе, о % людей, занимающихся спортом.

Диаграммы в виде горизонтальных полос или вертикальных столбиков – наиболее простой и достаточно эффективный для анализа вид графических изображений. Применяются достаточно часто в психолого-педагогических исследованиях для сравнения уровней показателей по различным единицам, группам, для анализа состава и структуры по ряду объектов и в динамике.

Пример 3. Респондентам предлагалось выбрать, как они предпочитают проводить свободное время. Возможные варианты: а) посещаю кинотеатры; б) хожу в театры; в) посещаю молодежные клубы; г) обычно провожу дома (допускалась возможность неоднозначного ответа).

Результаты опроса следующие:

Вид досуга	*Кинотеатры*	*Театры*	*Клубы*	*Дом. дела*
% людей, указавших данный вид досуга	*52*	*35*	*46*	*60*

В этом случае столбиковая диаграмма имеет следующий вид:

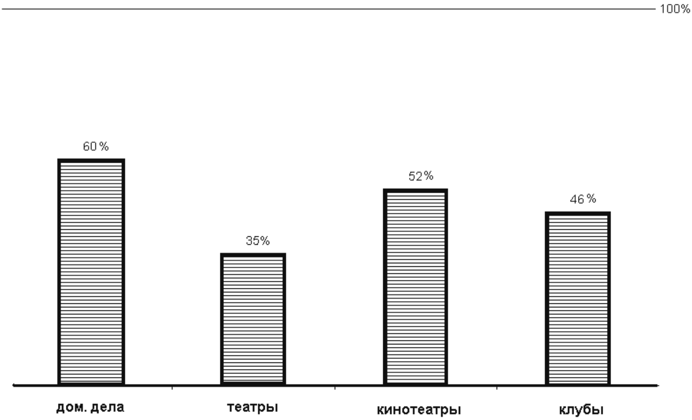

Рис. 5. Столбиковая диаграмма, отражающая предпочтения молодежи при выборе досуга по результатам опроса выборочной совокупности, проведенного….

Основа сравнения в полосовых и столбиковых диаграммах – линейная (одномерная). Длины полос (высоты столбиков) или их составляющих пропорциональны величине изображаемых показателей. Ширина же полос и столбиков и промежутков между ними не имеет специального значения (произвольная), но должна быть одинаковой в пределах одной диаграммы. Обычно придерживаются правила, чтобы ширина промежутков была вдвое больше ширины самих полос. Рекомендуется включение в диаграмму масштабной шкалы.

Рассмотрим еще один вид часто встречающихся графических изображений.

<u>Круговые диаграммы</u> эффективнее применять для анализа состава или структуры явлений. При этом составные части целого изображаются секторами окружности соответствующей угловой величины (1% удельного веса принимается за 3,6 градуса длины окружности). Техника построения секторных круговых диаграмм предполагает соблюдение следующих рекомендаций. Последовательность размещения секторов определяется их величиной: самый крупный помещается сверху, справа от вертикальной оси симметрии круга, а остальные – по движению часовой стрелки в порядке уменьшения их угловой величины. Каждый сектор должен иметь четкое обозначение

на экспликации. Допускается указание цифр в пределах секторов или вне окружности. При малом угле сектора экспликация к нему указывается стрелкой.

Пример 4. Представим с помощью круговой диаграммы успеваемость учащихся параллели по конкретному предмету. Пусть оценку «5» по данному предмету имеют 15% учащихся, оценку «4» – 38% учащихся, «3» – 44% и оценку «2» – 3%.

Изобразим соответствующую круговую диаграмму:

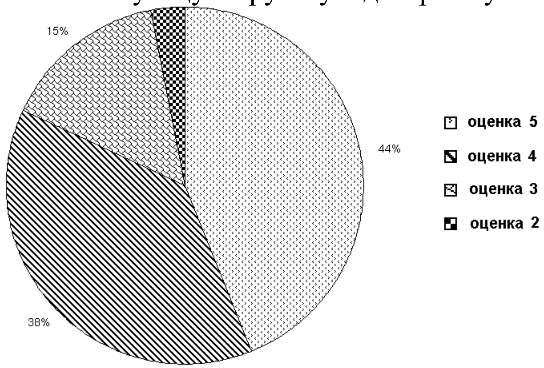

Рис. 6. Круговая диаграмма успеваемости по данному предмету учащихся …параллели по итогам … четверти.

Перед тем, как нарисовать данное изображение, мы подсчитывали угловые величины соответствующих секторов:

$L5=(360°\cdot 15)/100=54°$; $L4=(360°\cdot 38)/100=136.8°\approx 137°$

$L3=(360°\cdot 44)/100=158.4°\approx 158°$; $L2=(360°\cdot 3)/100=10.8°\approx 11°$.

Подсчитаем угловые величины соответствующих секторов:

$L5=(360°\cdot 15)/100=54°$; $L4=(360°\cdot 38)/100=136.8°\approx 137°$

$L3=(360°\cdot 44)/100=158.4°\approx 158°$; $L2=(360°\cdot 3)/100=10.8°\approx 11°$.

Круговые диаграммы могут иметь различный вид.

Пример 5. В исследовании Г.В. Ивановой проверялась эффективность тестового контроля знаний, учитывались дифференцированно результаты тестов по проверке различных видов языковых знаний (тесты группы А – лексики, В – правил произношения, С – орфографии и т.д.). Поэтому круг был разделен на секторы, пропорционально тем долям, которые приходились на каждый вид тестов (A – 25%, B – 20%, C – 20%, D – 32%, E – 3%). Внутри же каждого сектора заштриховывался процент учеников, давших неправильные ответы. В этом случае сам сектор принимался за 100%. Такого типа круговая диаграмма несет в себе очень большой информационный потенциал. Вместо того чтобы рисовать пять отдельных круговых диаграмм, изображается только лишь одна:

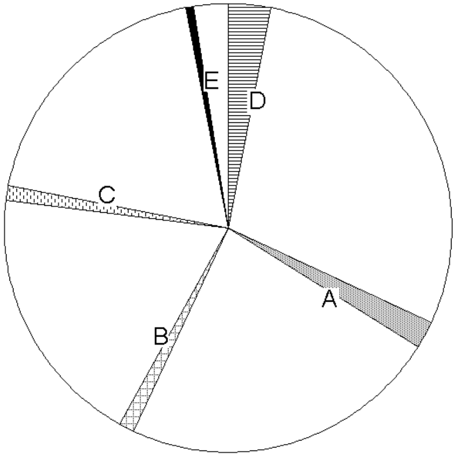

Рис.7. Круговая диаграмма результатов тестового контроля знаний по английской грамматике по результатам исследования….

Сравнительные диаграммы объединяют большую группу графиков, решающих задачи представления результатов статистического наблюдения в сопоставимом виде и дающих возможность сравнения изучаемых явлений в том или ином аспекте – по величине, структуре, территории, в динамике и т.д. Очень часто сравнительные диаграммы используются студентами при написании дипломных работ: при сопоставлении либо результатов констатирующего и контрольного срезов в одной группе, либо при сравнении результатов одного и того же среза в контрольной и экспериментальной группах. Важно помнить, что данные, изображаемые на сравнительных диаграммах должны быть сопоставимы.

Пример 6. Изобразим результаты констатирующего и контрольного экспериментов в экспериментальной группах. Для замера уровня осведомленности по данной теме людям предлагались вопросы трех типов. В таблицу занесены сведения о проценте людей, справившихся с вопросами:

Эксперимент	*I тип*	*II тип*	*III тип*
Констатирующий	*40%*	*50%*	*56%*
Контрольный	*45%*	*67%*	*76%*

А теперь изобразим эти данные:

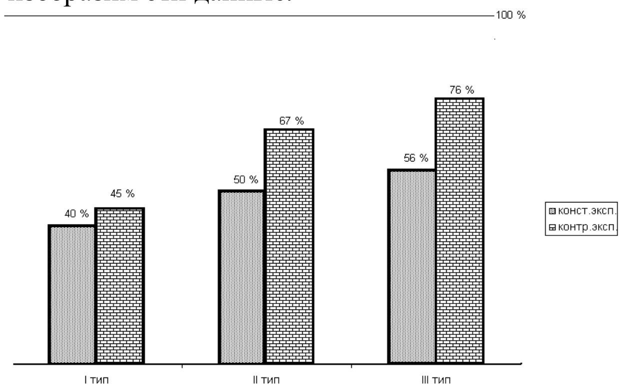

Рис. 8. Сравнительная диаграмма результатов двух экспериментов, показывающая уровень осведомленности участников экспериментальной группы по данному вопросу.

Наиболее распространенным видом сравнительных диаграмм являются арифметические линейные диаграммы, используемые, главным образом, для характеристики динамических рядов и рядов распределений, состоящих из большого количества исследующихся величин.

В ряде случаев, когда необходимо показать динамику интересующего нас показателя в отношении отдельных людей, используют векторные диаграммы. Особенно целесообразно построение векторных диаграмм, если в эксперименте участвует небольшое количество респондентов, и для исследователя интересен вопрос о динамике прогресса каждого человека, принимающего участие в эксперименте.

Пример 7. В ходе констатирующего и контрольного обследования учеников некоторого класса получены ранговые данные, свидетельствующие об уровне сформированности некоторого приема. Данные представлены в таблице:

N фамилии	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Ранг (конст. эксп.)	*2*	*1*	*2*	*3*	*2*	*1*	*2*	*2*	*2*	*3*
Ранг (контр. эксп.)	*3*	*3*	*2*	*2*	*3*	*2*	*3*	*1*	*3*	*3*

Покажем на векторной диаграмме изменения интересующего нас количественного признака для каждого ребенка.

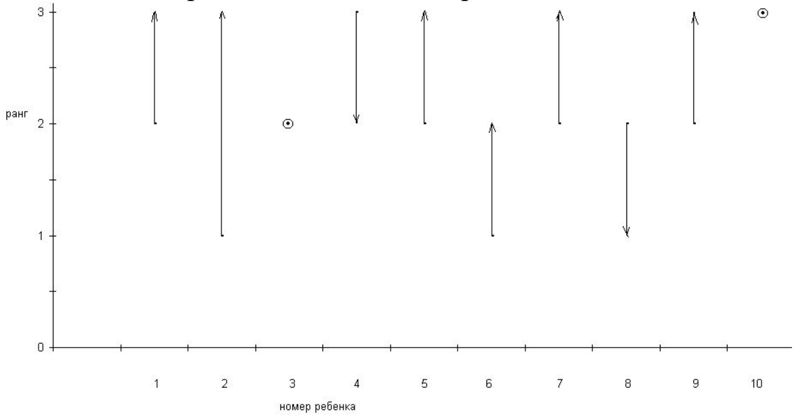

Рис. 9. Векторная диаграмма изменения количественного состава семей, участвующих в эксперименте, проведенного….

Контрольные вопросы

1. Какой графический образ наиболее удобен для отражения динамики интересующего процесса в целом?
2. Какой графический образ наиболее удобен для отражения динамики интересующего процесса в частности?
3. Какой графический образ наиболее удобен для отражения структуры интересующего явления?
4. Какой графический образ наиболее удобен для сопоставления данных?

<u>*6.3. Эмпирическая функция распределения*</u>

Пусть имеем некоторое статистическое распределение X. Обозначим n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака X, меньшее x $(X<x)$. Если n – общее число наблюдений

(объем выборки), то относительная частота события $X<x$ равна n_x/n. Если x меняется, то n_x/n меняется, т.е. относительная частота – функция от x. Поскольку эта функция находится опытным путем, то ее называют эмпирической.

Определение 6.3. **Эмпирической функцией распределения** (функцией распределения выборки) называют функцию $F(x)$, которая каждому х сопоставляет относительную частоту события $X< x$: $F(x) = n_x/n$.

Существует теорема Бернулли, согласно которой $F(x)$ стремится к функции распределения. В этом состоит целесообразность использования эмпирической функции распределения.

Свойства $F(x)$

1. $F(x) \in [0,1], \ \forall x$
2. $F(x)$ возрастает
3. Если x – минимальное значение признака, X – максимальное значение признака, то $F(x)=0$, $F(x)=0, \ \forall\, x<x$, $F(x)=1, \ \forall x>X$.

Эмпирическая функция распределения всегда ступенчатая функция.

Пример 8. Построить $F(x)$ по данным выборки:

значение признака	*2*	*6*	*10*
частоты	*12*	*18*	*30*

Объем выборки $n = 12+18+30=60$. Минимальное значение $x=2$, максимальное значение $X=10$, следовательно, $F(2)=0$, $F(x>10)=1$. Значение $x<6$ ($x=2$) наблюдалось 12 раз, поэтому $F(6)=12/60=0{,}2$. Значение $x<10$ ($x=2, x=6$) наблюдалось $12+18=30$ раз, следовательно, $F(10)=30/60=0{,}5$.

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & x< 2 \\ 0{,}2, & 2<x<6 \\ 0{,}5, & 6<x<10 \\ 1\ , & x>10. \end{cases}$$

График функции имеет вид:

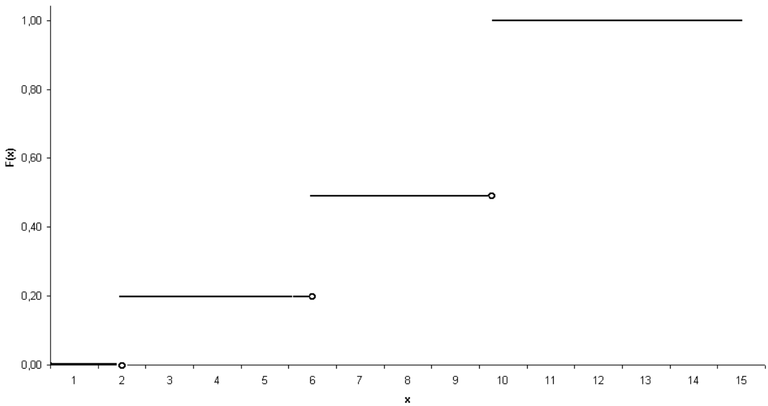

Рис. 10. Эмпирическая функция распределения выборки.

Контрольные вопросы

1. С какой целью строят эмпирическую функцию распределения?
2. Перечислите свойства функции распределения.

Контрольное задание

1. Получена выборка результатов экзамена по математике в некоторой школе. Получены следующие данные: «удовлетворительно» – 6 , «хорошо» – 18 , «отлично» – 10. По данным этой выборки составить эмпирическую функцию распределения.

6.4. Аналитические графики математической статистики

Полигон и гистограмма – это графические изображения результатов статистического исследования. Они относятся к аналитическим кривым математической статистики. Здесь и далее мы рассмотрим, как изображаются количественные данные, полученные в ходе статистических исследований. Полигон строится в тех случаях, когда распределение изучаемого признака – точечное.

Определение 6.4. **Полигон** – это статистическая аналитическая кривая, для построения которой необходимо по оси абсцисс отложить значения вариант x_i , а по оси ординат – соответствующие им относительные частоты. Полученные точки с координатами (x_i, p_i) соединяют отрезками.

При построении полигона необходимо всегда доводить линии справа и слева до нулевых значений относительных частот, т.е. указывать такие значения вариант, которые в выборочной совокупности не встречались.

Пример 9. Пусть дано статистическое распределение:

x_i	1.5	3.5	5.5	7.5
n_i	1	2	4	3
p_i	0.1	0.2	0.4	0.3

Построим полигон частот: по оси абсцисс отложим значения вариант, а по оси ординат – относительные частоты. Изобразим полученные точки, а затем их соединим:

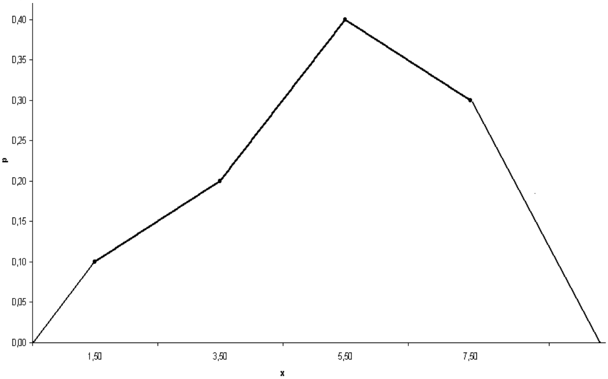

Рис. 11. Полигон распределения относительных частот

По изображению полигона можно наглядно судить о том, какое значение признака наиболее популярно, а также, насколько это значение «популярнее», чем все остальные значения вариант. Также по виду полигона, можно судить о том, каков характер распределения изучаемого признака (близок ли он к нормальному или нет).

В случае, когда изучаемый признак имеет интервальное распределение, вместо полигона строится гистограмма по следующему правилу.

Определение 6.5. **Гистограмма** – это графическое изображение статистических данных, для построения которого по оси абсцисс откладываются интервалы, а затем над каждым интервалом строится прямоугольник, площадь которого равна численности этого интервала.

Очевидно, что самый высокий прямоугольник будет построен над интервалом, в котором сосредоточено большинство вариант.

Пример 10. Проиллюстрируем понятие гистограмма построением этого графического изображения для исследования, результаты которого представлены в таблице из примера 5 п.5.

Рекомендуется перед построением гистограммы вычислить высоту каждого прямоугольника, беря во внимание длину интервалов.

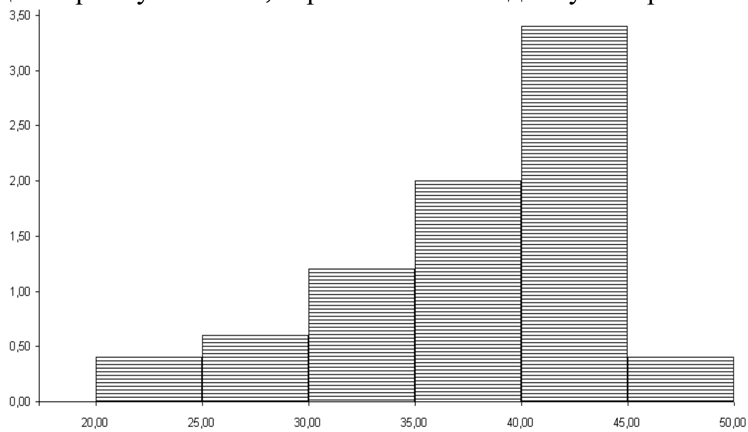

Рис. 12. Гистограмма

Рассмотрим еще два вида аналитических графиков математической статистики. Нам потребуются вспомогательные определения.

Определение 6.6. **Накопленной частостью (частотой) в точке х** называют суммарную частоту (частость) членов генеральной совокупности со значением признака меньшим, чем х.

Если в статистическом ряду вместо относительных частот записать соответственно накопленные частоты, то получим **кумулятивный ряд.**

Определение 6.7. **Кумулянта** – это аналитическая кривая математической статистики, для построения которой по оси абсцисс отмечаются точки, соответствующие границам интервалов или значениям признака, в каждой такой точке восстанавливается перпендикуляр, длина которого пропорциональна накопленной частости и концы соседних перпендикуляров соединяют отрезками.

Если по горизонтальной оси откладывать накопленные частости, а по вертикальной – значения признака, то полученная ломаная называется **огива**.

Пример 11. Предположим проведено 1000 испытаний на предмет наличия или отсутствия интересующего нас признака. Полученные результаты были занесены в таблицу:

Знач. вар.	*180-190*	*190-200*	*200-210*	*210-220*	*220-230*	*230-240*	*240-250*
Числ.	*50*	*90*	*150*	*280*	*220*	*120*	*90*

Построить кумулятивный ряд и начертить кумулянту.

Решение. Найдем накопленные частоты:

$w(190)=50$, $w(200)=50+90=140$, $w(210)=290$, $w(220)=570$, $w(230)=790$, $w(240)=910$, $w(250)=1000$.

Следовательно, кумулятивный ряд для этой задачи имеет вид:

Знач. вар.	*180-190*	*190-200*	*200-210*	*210-220*	*220-230*	*230-240*	*240-250*
Нак.част.	*50*	*140*	*290*	*570*	*790*	*910*	*1000*

На основе полученных данных начертим кумулянту (рис. 13).

Графическое оформление результатов, тем не менее, не должно быть самоцелью. Это лишь средство более наглядного представления связей и зависимостей в изучаемых явлениях, и поэтому они всегда должны служить подспорьем в проведении качественного и количественного анализа собранного массового материала. Выбор того или иного вида графиков или диаграмм целиком определяется целью и задачами эксперимента и характером собранных экспериментатором данных. Здесь приведены лишь наиболее распространенные способы графического оформления.

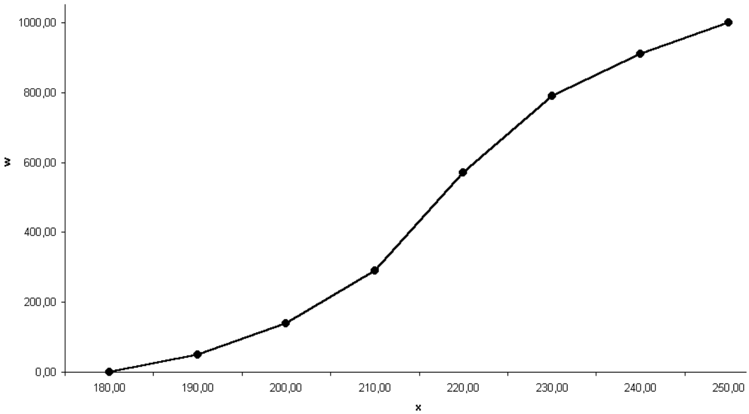

Рис. 13. Кумулянта

Контрольные вопросы

1. Какие вам известны аналитические графики математической статистики?
2. Для какого типа распределения данных изображают полигон?
3. Для какого типа распределения данных изображают гистограмму?

Контрольные задания

1. Какие Вы знаете аналитические графики математической статистики?
2. Какую информацию исследователь может получить на основе аналитических графиков математической статистики? На какие группы можно разбить числовые показатели ряда?
3. Получены данные о результатах тестирования в баллах: *50 26 46 38 37 36 35 39 46 24 20 45 46 34 38 49 47 46 34 48 23 26 29 31 38 30 40 41 42 46 49 34 35 38 36 37 39 35 40 42*. Построить гистограмму и кумулянту.
4. Получены данные о размерах проданной одежды в магазине: *48 50 46 48 46 48 48 48 50 50 52 56 48 46 48 50 50 52 50 48 46 44 42 48 50 48 46 46 48 48 50 50 48 52 54 52 50 48 46 48 50 50 48 42 46 48 50 50 52 52*. Нарисовать полигон и кумулянту.

7. Оценки параметров распределения

Математические методы уже находили применение в описанных выше приемах и способах анализа и обработки массового материала. Это были и общий подсчет результатов ответов, и вычисление процента давших правильные и неправильные ответы, и расчет угловых величин секторов для круговых диаграмм и т.д. Остановимся специально на вопросе о применении статистических методов для обработки результатов психолого-педагогического эксперимента.

При использовании методов математической статистики следует иметь в виду, что сама статистика не раскрывает сущности явления и не может объяснить причины возникающих различий между отдельными сторонами явления. Например, анализ результатов проведенного исследования показал, что используемый метод работы дал более высокие результаты по сравнению с ранее зафиксированными. Однако данные вычисления не могут дать ответ на вопрос, почему новый метод лучше прежнего.

Статистические методы в педагогике и психологии используются лишь для количественной характеристики явлений. Для того чтобы сделать выводы и заключения, необходим качественный анализ. Таким образом, в исследованиях методы математической статистики следует использовать осторожно, учитывая особенности изучаемых явлений.

Каждый статистический ряд и его графическое изображение представляют собой сгруппированный и наглядно представленный материал, который следует подвергнуть статистической обработке.

Статистические методы обработки позволяют получить ряд числовых характеристик, позволяющих сделать прогноз развития интересующего нас процесса. Эти характеристики, в частности, позволяют сравнивать разные ряды чисел, полученные при исследованиях, и делать соответствующие выводы и рекомендации.

Все вариационные ряды могут различаться друг от друга следующими признаками:

1. Размахом, т.е. верхней и нижней его границами, которые обычно называют лимитами.

2. Значением признака, вокруг которого концентрируется большинство вариант. Это значение признака отражает центральную тенденцию ряда, т.е. типичное для ряда.

3. <u>Вариациями вокруг центральной тенденции ряда</u>.

В соответствии с этим, все статистические показатели вариационного ряда подразделяются на две группы:

- показатели, которые характеризуют центральную тенденцию или уровень ряда;
- показатели, характеризующие уровень вариации вокруг центральной тенденции.

К первой группе относятся различные характеристики средней величины: мода, медиана, средняя арифметическая, средняя геометрическая. Ко второй – вариационный размах (лимиты), среднее абсолютное отклонение, среднее квадратичное отклонение, дисперсия, коэффициенты асимметрии и вариации.

<u>7.1. Показатели, характеризующие центральную тенденцию ряда</u>

Математическое ожидание

Математическое ожидание или среднее арифметическое значение выборки – одна из основных числовых характеристик, показывающая центральную тенденцию ряда. При составлении прогноза развития интересующего нас процесса эта характеристика является базовой. Вместе с тем, при сопоставлении различных исследований она позволяет объективно оценить различия между ними. Показатель «математическое ожидание» может быть использован при определении средней численности населения, средней продолжительности жизни, среднегодового дохода семьи, среднего количества решенных задач, допущенных ошибок, усвоенных единиц знаний и т.д., т.е. тех характеристик психолого-педагогических явлений, которые носят количественный характер.

Пусть интересующий нас признак имеет точечное распределение.

Определение 7.1. **Математическим ожиданием** выборки называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие относительные частоты:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_к p_к, \quad где\ p_к=n_i/n,\ i=1,\ldots,k \qquad (7.1)$$

Т.е. математическое ожидание – это «среднее взвешенное» возможных значений.

Пример 1. Найти математическое ожидание для следующих данных:

Варианта	*2*	*6*	*10*	*12*	*14*
Частота	*1*	*5*	*7*	*3*	*4*
Относительная частота	*1/20*	*5/20*	*7/20*	*3/20*	*4/20*

В этом случае: $M(X)=2\cdot 1/20+ 6\cdot 5/20+10\cdot 7/20+12\cdot 3/20+ 14 \cdot 4/20=9{,}7$.

По сути, как было подчеркнуто выше, математическое ожидание – это ни что иное, как среднее арифметическое наблюдаемых значений интересующего нас признака (в этом нетрудно убедиться).

Смысл (интерпретация) математического ожидания состоит в том, что оно заменяет все значения совокупности чисел. Иными словами, если взамен каждого значения ряда взять математическое ожидание, то мы при этом обеспечим минимальную ошибку отклонений от среднего.

А теперь обратимся к случаю, когда изучаемый признак имеет интервальное распределение. Пусть интервалы имеют длину h. Введем номера этих интервалов в порядке возрастания их величины, поместив начало отсчета вблизи от середины опытных данных и одновременно стремясь поместить его в интервал, соответствующий максимальной численности. Будем считать, что все наблюдения, попавшие в данный отрезок длины h, имеют значение, равное средней абсциссе этого отрезка.

Предположим, что для нулевого интервала это значение равно z_o. Тогда для отрезка с номером k среднее значение равно $z_к = z_o +kh$.

Если в отрезок с условной вариантой $z_к$ попало $n_к$ наблюдений, а всего наблюдений было n, то среднее их значение равно

$$M(X)=1/n\, \Sigma\, nk\, zk =1/n\, \Sigma\, (zo +kh)nk =zo +h/n\, \Sigma\, knk =zo +\mathbf{k}h \qquad (7.2),$$

где $\mathbf{k}=1/n\, \Sigma\, knk$. Здесь и далее суммирование по k.

Пример 2. Вычислим математическое ожидание для признака, имеющего интервальное распределение. Данные возьмем те, которые были приведены в примере 5 п.5. Расширим таблицу, введя дополнительные строчки так, как было указано выше:

Интервалы (классы)	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*	*40-45*	*45-50*	
ni	*2*	*3*	*6*	*10*	*17*	*2*	$\Sigma = 40$
ki	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	
niki	*-8*	*-9*	*-12*	*-10*	*0*	*2*	$\Sigma = -37$

Тогда математическое ожидание равно:

$M(X)= 42{,}5+ 5\cdot(-37)/40\approx 37{,}9.$

Мода и медиана

Следующая средняя величина – мода. Ею пользуются в тех случаях, когда хотят охарактеризовать явление на основе значения признака, встречающегося чаще всего.

Определение 7.2. **Мода** – это наиболее часто встречающееся значение признака.

Необходимо подчеркнуть, что мода представляет собой наиболее частое значение признака, а не частоту этого значения.

Рассмотрим случай точечного распределения. В совокупности оценок успеваемости *2, 3, 4, 4, 4, 5, 5* модой является оценка 4, потому, что эта оценка встречается чаще других. Принято считать, что в случае, когда все значения оценок встречаются одинаково часто, совокупность данных моды не имеет. Например, в совокупности *3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5* моды нет.

Если две несмежные оценки в совокупности имеют равные частоты и они больше частот других оценок, то существуют две моды. В примере совокупности *2, 3, 3, 4, 5, 5* модами являются оценки 3 и 5. В этом случае говорят, что совокупность оценок является **бимодальной.** Большие совокупности данных являются бимодальными, если они образуют полигон относительных частот с двумя вершинами даже тогда, когда частоты не строго равны. В последнем случае различают большие и малые моды. Наибольшей модой в группе данных называют то значение варианты, которое чаще встречается, т.е. удовлетворяет определению моды. В практике встречаются большие совокупности, имеющие несколько малых мод. Это характерно для полигона с тремя и более вершинами.

Мода, как мера центральной тенденции, имеет следующую интерпретацию. Мода является такой характеристикой, т.е. имеет такое значение, которое наилучшим образом «заменяет все значения». Когда заменяют модой любое значение ряда чисел, мы имеем наибольшую частоту совпадений с числами ряда. Таким образом, мода тоже является характеристикой, на основе которой можно составлять прогноз развития интересующего нас процесса.

Следует заметить, что для малых групп часто о такой замене не может быть и речи. Например, группа из пяти учащихся имеет следующие оценки: *2, 2, 2, 5, 5*. Модальное значение данной группы равно 2. Эта цифра точно характеризует успеваемость первых трех учеников, но является слишком некорректной для двух других.

Теперь рассмотрим другой случай. Пусть распределение интервальное. Как в этом случае вычисляется мода? Для начала следует найти модальный интервал, т.е. интервал, которому соответствует максимальная частота n_s. Если $X'_s - X''_s$ – модальный интервал, а интервалы вариационного ряда имеют постоянную ширину h, то мода изучаемого признака вычисляется:

$$Mo\ X = X'_s + h\cdot (n_s - n_{s-1})/((n_s - n_{s-1}) + (n_s - n_{s+1})) \quad (7.3),$$

где n_{s-1}, n_{s+1} – частоты, находящиеся в соответствии с интервалами, предшествующим модальному и следующим за ним.

Пример 3. Данные статистического исследования представлены в таблице:

Количественное Значение признака	*120-140*	*140-160*	*160-180*	*180-200*	*200-220*	*220-240*	*240-260*	*260-280*
Число случаев	*1*	*6*	*19*	*58*	*53*	*24*	*16*	*3*

Найти *Mo X*.

Т.к. максимальная частота ($n = 58$) соответствует интервалу 180-200, то $X'_s = 180$, $n_{s-1} = 19$, $n_{s+1} = 53$. Значит, $Mo\ X = 180 + 20\cdot(58-19)/(39+5) = 197{,}73$.

Еще одним показателем, характеризующим центральную тенденцию ряда, является медиана.

Определение 7.3. **Медианой** *MeX* называется значение признака, относительно которого генеральная совокупность делится на две равные по объему части, причем в одной из них содержатся члены, у которых значение признака не превосходит *MeX*, а в другой – не меньше *MeX*.

Пример 4. Пусть в результате проведения опроса в контрольной и экспериментальной группах получены следующие данные (количество посещений музеев в год):

Группы	*Количественное значение признака*
Контрольная	*434223443453343224334334355342543*
Экспериментальная	*3442443345534454334545533442544 34*

Расположим полученные ряды чисел по порядку от минимальных значений до максимальных:

Группы	*Количественное значение признака*
Контрольная	*2222233333333333**3**3444444444445555*
Экспериментальная	*22333333333444444**4**4444444445555555*

Теперь можно назвать медиану для каждой группы (значение ее выделено). Но это очень приблизительное значение медианы. Для уточнения его следует использовать другой подход, аналогичный тому, который используется в случае интервального распределения.

Если распределение интервальное, то сначала надо найти медианный интервал $X'p$- $X''p$, интервал, в котором расположено значение признака, являющегося медианой. Тогда можно вычислить значение самой медианы по следующей формуле:

$$MeX = X'p + h\cdot (n/2 - w(X'p))/ np \qquad (7.4),$$

где h – ширина интервала, n – объем генеральной совокупности, $w(X'p)$ – накопленная частота до p-го интервала, n_p – частота p-го интервала, p – номер медианного интервала.

Пример 5. Рассмотрим пример 3 и вычислим для данного вариационного ряда медиану. Для ее нахождения строим кумулятивный ряд:

xi	*120-140*	*140-160*	*160-180*	*180-200*	*200-220*	*220-240*	*240-260*	*260-280*

wi	*1*	*7*	*26*	*84*	*137*	*16*	*177*	*180*

Найдем номер медианного интервала *s* из условия:

$w(X'p) < n/2$, $w(X''p) > n/2$. Имеем $n/2=180/2=90$. Тогда $w(X'4)=84 < 90$, $w(X'5)=137 > 90$, следовательно, $MeX = 200 + 20\cdot(90-84)/53 = 202{,}26$.

Вернемся к примеру 4. Ранее было отмечено, что полученные нами значения медиан весьма приблизительны. Вычислим их точнее. Как и в случае интервального распределения,

$$MeX = X'_p + h\cdot (n/2 - w(X'_p))/n_p \quad (7.5),$$

здесь X'_p – начало класса, в котором находится медиана, h – величина классового промежутка, n_p – частота медианного класса, остальные обозначения имеют стандартное значение.

Найдем для каждой группы точное значение медианы.

Для контрольной: $X'_p = 3$, $h=1$, $n=33$, $w(X'_p)=5$, $n_p=13$. Значит,

$$MeX = 3+1\cdot(33/2-5)/13 \approx \underline{3{,}9}.$$

Для экспериментальной группы: $X'_p = 4$, $h=1$, $n=33$, $w(X'_p)=11$, $n_p=15$. Значит,

$$MeX = 4+1\cdot(33/2-11)/15 \approx \underline{4{,}37}.$$

Таким образом, мы можем сказать, что среднее число посещений музеев в контрольной группе – 3,9, а в экспериментальной группе – 4,37.

Следует отметить, что каждая мера центральной тенденции числовых рядов обладает характеристиками, которые являются ценными в определенных условиях. Мода проще всего вычисляется, и для больших совокупностей она является достаточно стабильной мерой центра распределения. В малых совокупностях чисел мода, как правило, нестабильна. Например, для ряда чисел *333455* мода равна 3, но если одну из троек заменить 5, то мода станет уже равной пяти.

Медиана более стабильная числовая характеристика. На нее не влияют «большие» и «малые» варианты. Например, для больших совокупностей вариант медиана не изменится, если число максимальных или минимальных вариант резко изменится. Например, совокупности *22233334445555* и *33333334444445* имеют одинаковые медианы. А вот на величину математического ожидания влияет изменение каждого значения варианты. Для многих числовых совокупностей педагогических измерений мода близка к двум другим мерам – медиане и математическому ожиданию. Медиана занимает промежуточное положение между модой и математическим ожиданием.

Центральная тенденция совокупности данных с большими крайними выбросами наилучшим образом характеризуется медианой, когда гистограмма унимодальна. Например, достаточно одного большого крайнего значения, чтобы сместить математическое ожидание совокупности намного дальше, чем это характерно для данной выборки.

В симметричных унимодальных совокупностях математическое ожидание, мода и медиана совпадают, что соответствует нормальному распределению выборочных данных. Отсутствие симметрии в полигоне или гистограмме оказывает определенное влияние на соотношения между модой, медианой и математическим ожиданием. Если большинство оценок расположено слева от вершины полигона относительных частот, то математическое ожидание примет минимальное значение, мода – максимальное, а медиана – между ними. Если группа данных измерения выбрана из большой симметричной группы, то математическое ожидание выборки будет ближе к центру большой группы, чем медиана и мода.

Далее рассмотрим числовые характеристики выборочной совокупности, которые характеризуют вариации вокруг центральной тенденции. Их нахождение основывается на вычислении математического ожидания, которое, как отмечалось выше, имеет ограниченное применение и не подходит для вычисления по характеристикам успеваемости в баллах, а также для различных ранговых измерений.

Выбор меры центральной тенденции

При использовании номинальной шкалы (шкалы наименований), в качестве среднего показателя выбирают моду. С остальными шкалами все не так однозначно. При этом обычно меры центральной тенденции используют для сравнения различных групп по степени выраженности признака. Если экспериментатор сомневается в выборе меры центральной тенденции, то можно руководствоваться следующей рекомендацией.

Математическое ожидание можно использовать, если выполняются эти условия:

- группы большие и полигон дает достаточно точное представление о распределении данных;
- распределение симметричное;
- отсутствуют «выбросы».

Если же какое-то из указанных условий не выполняется, то надо ограничиться модой и медианой.

Контрольные вопросы

1. На какие группы можно разбить числовые показатели ряда?
2. С какой целью исследователь исчисляет числовые характеристики?
3. Для чего служат показатели, характеризующие центральную тенденцию ряда?
4. Что такое математическое ожидание, мода и медиана?

Контрольные задания

1. Вычислите среднюю выборочную (математическое ожидание) вариационного ряда *1, 2, 2, 3, 3, 4, 6.*
2. Вычислите среднюю выборочную (математическое ожидание) вариационного ряда *1, 2, 4, 4, 5, 8.*
3. Вычислите среднюю выборочную (математическое ожидание) вариационного ряда *1, 2, 3, 3, 4, 5.*
4. Дана выборка: *10; 11; 12; 11; 11; 14; 10*. Её выборочная мода равна…

   1) 11,29 *2) 14*

   3) 10 *4) 11*
5. Дана выборка*: 1; 1,3; 2,1; 1,2; 1,2; 1,4; 1,5; 1,2; 1,4.* Её выборочная медиана равна:

1) 2,1 *2) 1,3*

3) 1,5 *4) 1,367*

7.2. Показатели, характеризующие вариации вокруг центральной тенденции

Ранее указывалось, что к показателям, характеризующим вариации вокруг центральной тенденции, относятся размах вариации, дисперсия, среднеквадратичное отклонение от среднего и коэффициент вариации.

Определение 7.4. **Дисперсия** выборки («рассеивание») – это величина, характеризующая разброс ее значений вокруг среднего. Обозначается *Д(Х)*.

Чем больше дисперсия, тем «случайнее» изучаемый процесс. Дисперсия определяет степень правдоподобия прогноза развития изучаемого процесса. Рассмотрим пример. Допустим, вариационный ряд имеет следующий вид: *42635445362264435*. Нетрудно убедиться, что математическое ожидание для этой выборки равно 4. Это значит, как указывалось выше, что варианта 4 отражает центральную тенденцию ряда, т.е. является типичной для него и поэтому, если пытаться оценить значение восемнадцатой варианты, самое вероятное значение − это 4. При этом следует помнить, что 100%-ых прогнозов не существует, а можно говорить лишь о более или менее вероятных значениях. Теперь рассмотрим другой вариационный ряд: *43553444355533435*. И здесь математическое ожидание выборки равно 4, а значит, для прогноза значения восемнадцатой варианты тоже стоит выбрать число 4. Возникает сразу ряд вопросов: в каком из этих двух случаев прогноз более состоятелен, т.е. в каком случае вероятность ошибиться меньше, с чем это связано? Забегая вперед, ответим. Во втором случае процесс менее случаен, у него суммарная степень отклонения вариант от математического ожидания меньше или, как говорят, меньше разброс. А значит, вероятность того, что значение восемнадцатой варианты равно 4, во втором случае выше, чем для первой выборки. То есть, для первой выборки значение дисперсии выше, чем для второй.

Рассмотрим, как вычисляется дисперсия.

Для точечного распределения имеем

$$Д(X)= (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 +\ldots+(x_n - M(X))^2 p_n \quad (7.6),$$

где x_i – значения вариант, p_i – значения соответствующих относительных частот.

Для примера 1 вычислим дисперсию. Напомним, что *М(Х)=9,7*. По формуле:

Д(X)= $(2-9,7)^2 \cdot 1/20+ (6-9,7)^2 \cdot 5/20+ (10-9,7)^2 \cdot 7/20+ (12-9,7)^2 \cdot 3/20+(14-9,7)^2 \cdot 4/20=10,91$.

С дисперсией связана другая характеристика – среднеквадратичное отклонение (или стандарт):

$$\sigma^2 = Д(X). \qquad (7.7).$$

Если для некоторой выборки мы имеем *M(X)* и σ, то это дает нам ориентировочное представление о том, в каких пределах могут лежать наиболее вероятные значения интересующего нас признака: $[M(X)-\sigma, M(X)+\sigma]$.

Для примера 1 $\sigma \approx 3,3$ и, значит, соответствующий интервал для выборки из примера 1 будет [6,4; 13]. Нетрудно9щ видеть, что при большом значении дисперсии интервал прогноза будет большим, а значит, такой прогноз для исследователя не очень интересен, и он лишний раз свидетельствует о том, что интересующий процесс «весьма случаен».

Вычислим дисперсию в случае интервального распределения изучаемого признака. Каждый интервал мы заменяем его средним значением, а далее пользуемся формулой, которая использовалась для точечного распределения:

$$Д(X) =1/n \Sigma (z_к - M(X))^2 n_к =1/n \Sigma (z_o +kh-z_o -\mathbf{k}h)^2 n_k =h^2 /n \Sigma (k-\mathbf{k})^2 n_k = h^2(1/n \Sigma \ k^2 n -\boldsymbol{к}^2),$$

где $\mathbf{k}=1/n \Sigma \ kn_k$ и суммирование по *k*.

Проиллюстрируем описанные вычислительные процедуры, рассмотрев случай интервального распределения выборочных данных. Обратимся опять к примеру 4. Для упрощения вычислений дополним таблицу:

Интервалы (классы)	*20-25*	*25-30*	*30-35*	*35-40*	*40-45*	*45-50*	
ni	*2*	*3*	*6*	*10*	*17*	*2*	$\Sigma = 40$
ki	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	
niki	*-8*	*-9*	*-12*	*-10*	*0*	*2*	$\Sigma=-37$
niki²	*32*	*27*	*24*	*10*	*0*	*2*	$\Sigma=95$

Для данного примера

$$Д(X)= 5^2 \cdot (1/ 40 \cdot 95- (37/40)^2) \approx 37,98; \ \sigma \approx 6,16.$$

Следующая характеристика, также свидетельствующая об уровне вариации вокруг центральной тенденции – размах вариации (ранее она уже определялась).

Определение 7.5. **Коэффициент вариации** – это числовая характеристика выборки, которая показывает соотношение между математическим ожиданием выборки и ее дисперсией:

$$R(X)=M(X)/Д(X)\cdot 100\% \qquad (5.8).$$

Контрольные задания

1. Для какой цели служат показатели, характеризующие вариации вокруг центральной тенденции?
2. Какие показатели характеризуют вариации вокруг центральной тенденции?

Контрольные задания

1. Чему равен объем выборки целых чисел: *1, –3, 8, 2*?

Составьте ее вариационный ряд. Чему равен размах вариации?

2. Имеются данные о сдаче экзамена студентами:

5 3 3 4 2 4 4 3 5 4 4 5 5 4 4 3 3 3 2 5 5 4 5 2 2 .

Постройте вариационный ряд этих данных. Какие варианты встречаются в данном ряду? Чему равен размах вариации?

3. Имеются данные о количестве студентов в 30 группах физико-математического факультета:

26	*25*	*25*	*26*	*25*	*23*
23	*24*	*19*	*23*	*20*	*19*
22	*24*	*24*	*23*	*20*	*23*
24	*19*	*21*	*18*	*21*	*18*
20	*18*	*18*	*21*	*15*	*15*

Определите объем предложенной совокупности чисел. Постройте вариационный ряд количества студентов в группах. Какие варианты встречаются в данном ряду? Определите размах вариации.

4. В результате тестирования группа абитуриентов набрала баллы: *5,3,0,1,4,2,5,4,1,5.*

Запишите полученную выборку в виде вариационного ряда, определите ее объем и размах.

Определение 7.6. Связи (зависимости) между двумя и более переменными в статистике называются **корреляцией**.

Оценивается корреляция с помощью значения коэффициента корреляции, который и является мерой степени и величины этой связи.

Среди множества различных коэффициентов корреляции мы рассмотрим только часть из них, которые учитывают наличие линейной связи между переменными. Выбор коэффициентов корреляции зависит от того, в какой шкале измерялись переменные, корреляцию между которыми надо вычислить. В психолого-педагогических исследованиях наиболее часто вычисляют коэффициенты Пирсона и Спирмена.

Нахождения коэффициентов корреляции удобно иллюстрировать на примере конкретных задач.

Пример 6. Рассмотрим два ряда данных: X – семейное положение, Y – исключение из университета. Предположим, что измеряются они по шкале наименований (0-нет, 1-да для каждой из переменных).

В силу того, что данные получены в результате использования такой шкалы наименований, пары (x_i, y_i) могут быть только вида (0,0); (0,1), (1,0), (1,1).

Составим таблицу:

<table>
<tr><td rowspan="4">Признак Y</td><td colspan="3">Признак X</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$x_i = 0$</td><td>$x_i = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y_i = 0$</td><td>a</td><td>b</td><td>$a+b$</td></tr>
<tr><td>$y_i = 1$</td><td>c</td><td>d</td><td>$c+d$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого</td><td>$a+c$</td><td>$b+d$</td><td>N</td></tr>
</table>

В общем виде формула корреляции Пирсона для такого вида данных имеет вид:

$$\varphi = \frac{(bc - ad)}{\sqrt{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}}$$

Вернемся к нашему примеру. Получены данные по шкале наименований:

№ испытуемого	*Переменная X*	*Переменная Y*
1	*0*	*0*
2	*1*	*1*
3	*0*	*1*
4	*0*	*0*
5	*1*	*1*
6	*1*	*0*
7	*0*	*0*
8	*1*	*1*
9	*0*	*0*
10	*0*	*1*

Составим таблицу, удобную для вычисления коэффициента корреляции:

		Признак X		
		$x_i = 0$	$x_i = 1$	
Признак Y	$y_i = 0$	*2*	*3*	*5*
	$y_i = 1$	*4*	*1*	*5*
Итого		*6*	*4*	*10*

Подставим в формулу данные из этой таблицы:

$$\varphi = \frac{(12-2)}{\sqrt{(2+4)(3+1)(2+3)(4+1)}} = 0{,}32.$$

Таким образом, коэффициент корреляции Пирсона для выбранного примера равен 0,32, т.е. зависимость между семейным положением студентов и фактами исключения из университета незначительная.

Пример 7. Если обе переменные измеряются в шкалах порядка, то в качестве меры связи используется коэффициент ранговой корреляции Спирмена *(R)*, который вычисляется по формуле:

$$R = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N(N^2-1)},$$

где d_i – разность рангов сравниваемых объектов, N – количество сравниваемых объектов.

Значение коэффициента Спирмена изменяется в пределах от -1 до 1. В первом случае между анализируемыми переменными существует однозначная, но противоположно направленная связь (при увеличении одной, уменьшается другая). Во втором – с ростом значений одной переменной пропорционально возрастает значение второй переменной .Если R=0 или близкое к нему значение, то значимая связь между переменными отсутствует.

Вычислим коэффициент Спирмена для данных, представленных в таблице:

N	*Ранги*		*Разность рангов*	*Квадрат разности*
	X	*Y*		
1	*1*	*2*	*-1*	*1*
2	*5*	*7*	*-2*	*4*
3	*6*	*3*	*3*	*9*
4	*8*	*6*	*2*	*4*
5	*7*	*8*	*-1*	*1*
6	*3*	*4*	*-1*	*1*
7	*4*	*5*	*-1*	*1*
8	*2*	*1*	*1*	*1*
Сумма квадратов разностей рангов = 22				

Тогда

$$R = 1 - \frac{6 \cdot 22}{8(8^2 - 1)} = 0{,}74,$$

Результаты вычислений говорят о том, что существует достаточно выраженная связь между рассматриваемыми переменными.

Контрольные вопросы

1. Какой коэффициент, характеризующий наличие или отсутствие связей между рядами, используют, если данные соответствуют номиналной шкале?
2. Какой коэффициент, характеризующий наличие или отсутствие связей между рядами, используют, если данные соответствуют ранговой шкале?

Контрольные задания

1. Установить, имеется ли достаточно выраженная связь между признаками (измерения по номинальной шкале):

Наличие 1 признака	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-

Наличие 2 признака	+	-	-	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-

2. Установить, имеется ли достаточно выраженная связь между признаками (измерения по ранговой шкале):

1 признак	*3*	*4*	*4*	*3*	*5*	*2*	*1*	*3*	*3*	*4*	*4*	*4*	*5*	*6*	*5*
2 признак	*4*	*4*	*4*	*5*	*3*	*2*	*3*	*3*	*4*	*3*	*2*	*3*	*5*	*6*	*4*

II. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

1. Статистические гипотезы

Определение 1.1. В самом общем смысле, **статистическая гипотеза** – это любое предположение о свойствах случайных величин или событий. Отметим, что любое психологическое или педагогическое явление или процесс, изучаемый в ходе дипломного исследования, носит случайный характер. Вот почему говоря о гипотезах, мы подразумеваем статистическую гипотезу. Гипотеза, которая подлежит проверке, называется нулевой (*H0*). Суть ее заключается в отсутствии связи в генеральной совокупности. Наряду с ней рассматривается еще одна – альтернативная гипотеза (*H1*) – наличие таковой связи. Проверка нулевой гипотезы осуществляется через сравнение ее с альтернативной: если в ходе проверки принимается нулевая гипотеза, то альтернативная отклоняется, если же отклоняем нулевую гипотезу, то принимаем альтернативную.

Изначально рассмотрим классификацию гипотез. Заметим, что от того, к какому классу относится сформулированная гипотеза, зависит способ проверки ее.

1. Гипотезы о типах вероятностных законов распределения случайных величин, характеризующих изучаемое свойство явления или процесса. В общем виде такие гипотезы могут быть сформулированы в следующем виде: некоторое свойство педагогического явления имеет определенный закон распределения. Проверка таких гипотез осуществляется с помощью критерия согласия и возможна только на основе количественных измерений изучаемого свойства.

2. Гипотезы о свойствах тех или иных числовых характеристик таких, как математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия и др., характеризующих изучаемые случайные величины. В общем виде такие гипотезы могут быть сформулированы в следующем виде: значение параметра, характеризующего некоторое свойство изучаемого педагогического явления, не превосходит (не меньше) некоторого заданного значения или лежит в определенном диапазоне. Такие гипотезы проверяются на основе параметрических методов, в частности критерия Стьюдента. Как и в первом случае требуются количественные измерения изучаемого явления.

3. Гипотезы о стохастической зависимости двух или более признаков, характеризующих некоторое свойство рассматриваемого явления. В обобщенной форме такие гипотезы формулируются так: два или более свойств рассматриваемого педагогического явления стохастически зависимы; некоторый фактор (или факторы) оказывают влияние на изучаемое свойство педагогического явления и эта зависимость подчинена определенному закону. Для проверки таких гипотез используются методы корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализов, но на основе данных количественных измерений. Справедливости ради, заметим, что при проверки такого рода гипотез можно сделать и качественные измерения интересующего нас процесса, однако выводы будут менее глубокими.

4. Гипотезы о равенстве или различии законов распределения случайных величин, характеризующих изучаемое свойство в двух или более совокупностях рассматриваемых явлений. Обобщенно такие гипотезы формулируются так: состояние одного и того же свойства имеет одинаковое или различное распределение в каждой из двух (или более) совокупностях учащихся, отличающихся содержанием, методом или организаций обучения или социальной средой. Следует заметить, что подавляющее большинство гипотез, лежащих в основе дипломных исследований выпускников вузов, относится к этому типу гипотез. Для поверки их можно производить как количественные, так и качественные измерения и использовать, например, критерии значимости.

Проверка гипотезы предполагает измерение интересующего исследователя явления и обобщение результатов измерения в виде, дающем возможность сделать вывод в отношении гипотезы.

Заметим, что при выборе подходящего критерия в ходе проверки выдвинутой гипотезы большое значение имеет то, какие выборки рассматривает исследователь – зависимые или независимые, а также какая шкала измерений применялась.

Контрольный вопрос

1. Какие вы знаете типы статистических гипотез? Охарактеризуйте каждый из них.

2. Проверка статистических гипотез

2.1.Уровень статистической значимости

Следующей задачей статистического анализа, решаемой после определения основных (выборочных) характеристик и анализа одной выборки, является совместный анализ нескольких выборок. Важнейшим вопросом, возникающем при анализе двух выборок, является вопрос о наличии связей (различий) между выборками. Обычно для этого проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве средних.

Определение 2.1. **Статистическая значимость (p-уровень значимости)** – главный результат проверки статистических гипотез, количественная оценка надежности установленной связи.

Пример.1. Пусть в ходе сравнения двух выборочных средних получено значение уровня статистической значимости p =0.05. Следовательно, если проверка статистической гипотезы о равенстве средних в генеральной совокупности подтвердила ее, то вероятность случайного появления обнаруженных различий составляет не более 5%.

Чем меньше значение p-уровня, тем выше статистическая значимость результата исследования, который подтверждает научную гипотезу.

Уровень значимости выше (при равных других условиях), если:

- величина связи больше;
- изменчивость признака;
- объем выборки больше.

Контрольные вопросы

1. Что такое статистическая значимость результата исследования?
2. От чего зависит уровень значимости результата исследования?

2.2. Статистический критерий и число степеней свободы

Определение 2.2. **Статистический критерий** – это инструмент для определения уровня статистической значимости гипотезы

Критерий всегда подразумевает *формулу*, применяя которую, исследователь вычисляет *эмпирическое значение* критерия. Полученное эмпирическое значение позволяет определить р-уровень – значение вероятности того, что нулевая статистическая гипотеза верна.

Помимо формулы эмпирического значения, критерий задает формулу для определения числа степеней свободы.

Определение 2.3. **Число степеней свободы** – это количество возможных направлений изменчивости признака. Обычно число степеней свободы линейно зависит от объема выборки, от числа признаков – чем больше эти показатели, тем больше число степеней свободы. Важно, что каждая формула для расчета эмпирического значения критерия обязательно сопровождается правилом определения числа степеней свободы.

Определение 2.4. **Назначение критерия** – проверка статистической гипотезы путем определения р-уровня значимости (вероятности того, что H_0 верна).

Выбор критерия определяется проверяемой статистической гипотезой. Любой критерий включает в себя:

- формулу расчета эмпирического значения критерия по выборочным статистикам;
- правило определения числа степеней свободы;
- теоретическое распределение для данного числа степеней свободы;
- правило соотнесения эмпирического значения критерия с теоретическим распределением для определения вероятности того, что H_0 верна.

Для проверки статистических гипотез применяются различные критерии. При этом одному теоретическому распределению могут соответствовать разные формулы критериев – в зависимости от проверяемой статистической гипотезы. Но принцип проверки является общим для всего этого многообразия: вычисленное по формуле эмпирическое значение критерия сопоставляется с теоретическим распределением для заданного числа степеней свободы, что позволяет определить вероятность того, что H_0 верна.

Для проверки гипотезы исследователь совершает сложную последовательность действий, включающую применение специальных таблиц критических значений критерия:

1. Выбор критерия в зависимости от вида исходных данных и статистической гипотезы: теоретического распределения, формул расчета эмпирического значения критерия и числа степеней свободы.
2. Расчет по исходным данным (или по имеющимся статистикам) эмпирического значения критерия и числа степеней свободы.
3. Применение «Таблицы критических значений критерия» позволяет определить значение р-уровня для данного числа степеней свободы.

Контрольные вопросы

1. Что такое статистический критерий? Что он подразумевает?
2. Что включает в себя статистический критерий?

2.3. Выбор метода статистической проверки гипотезы

Приступая к определению того, как будут измерены изучаемые явления, исследователю стоит задуматься о том, какому методу статистического вывода будут соответствовать получаемые в процессе исследования исходные данные. Иначе он рискует оказаться в ситуации, когда данные уже собраны, но невозможно определить метод их анализа.

Выше отмечалось, что любая содержательная гипотеза научного исследования касается связи между явлениями (свойствами, событиями) – не важно, содержит ли формулировка гипотезы указание на связь или на различия. Помимо этого одна и та же гипотеза может быть проверена при помощи самых разных статистических методов. Как же определить, какой из методов годится в той или иной ситуации?

Кроме типов шкал, в которых измерены или представлены изучаемые признаки, на выбор метода статистической проверки гипотезы влияют такие параметры, как количество сравниваемых групп, зависимость или независимость сравниваемых выборок и пр. Вот почему проблема выбора критерия часто становится затруднительной даже для опытных исследователей.

Однако все бесчисленное множество содержательных гипотез может быть сведено к относительно небольшому числу типичных исследовательских ситуаций. Каждой такой ситуации соответствует своя структура исходных данных и оптимальный метод статистической проверки.

Выделяют две группы критериев.

Непараметрические критерии статистики – свободны от допущения о законе распределения выборок и базируются на предположении о независимости наблюдений.

Параметрические критерии – критерии, используемые в тех случаях, когда вид распределения или функция распределения выборки нам заданы.

Наиболее многочисленная группа методов относится к случаю, когда одна из переменных является количественной, а другая – качественной. В этом случае задача сводится к сравнению групп по уровню выраженности признака (количественной переменной). Для решения этой задачи применяются *методы сравнения,* которые можно классифицировать по двум основаниям (здесь и далее полагаем, что сравнивают две выборки): а) *соотношение сравниваемых групп:* зависимые выборки или независимые выборки; б) *шкала, в которой измерен количественный признак:* метрическая, ранговая. Таким образом, можно выделить следующие методы сравнения:

Зависимость выборок		Независимые	Зависимые
Признак	метрический	Параметрические методы сравнения	
		t-Стьюдента, для независимых выборок	t-Стьюдента, для зависимых выборок
		Непараметрические методы сравнения	
	ранговый	Медианный критерий	Критерий знаков
	номинальный		Критерий Макнамара

Контрольные вопросы

1. Какие вы знаете группы критериев?
2. От чего зависит выбор критерия для проверки гипотезы?

2.4. Параметрические критерии

В группу **параметрических критериев** методов математической статистики входят методы для вычисления описательных статистик, построения графиков на нормальность распределения, проверка гипотез о принадлежности двух выборок одной совокупности. Эти методы основываются на предположении о том, что распределение выборок подчиняется нормальному (гауссовому) закону распределения. Рассмотрим **t-критерий Стьюдента.**

При использовании критерия можно выделить два случая. В первом случае его применяют для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух **независимых**, **несвязанных** выборок (так называемый **двухвыборочный t-критерий**). В этом случае есть контрольная группа и экспериментальная (опытная) группа, количество испытуемых в группах может быть различно.

Во втором случае, когда одна и та же группа объектов порождает числовой материал для проверки гипотез о средних, используется так называемый **парный t-критерий**. Выборки при этом **зависимые**, **связанные**.

Случай независимых выборок

Статистика критерия для случая несвязанных, независимых выборок вычисляется по формуле:

$$t_{эмп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{x-y}} \qquad (2.1)$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — средние арифметические в экспериментальной и контрольной группах, σ_{x-y}- стандартная ошибка разности средних арифметических. Находится из формулы:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \qquad (2.2)$$

где n_1 и n_2 соответственно объемы первой и второй выборки.

Если $n_1 = n_2$, то стандартная ошибка разности средних арифметических будет считаться по формуле:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n-1)\cdot n}} \qquad (2.3)$$

где *n* величина каждой из выборок.

Подсчет **числа степеней свободы** осуществляется по формуле:

$$k = n_1 + n_2 - 2 \qquad (2.4)$$

При численном равенстве выборок $k = 2n - 2$.

Далее необходимо сравнить полученное значение $t_{эмп}$ с критическим значением *t*-распределения Стьюдента (см. приложение 1).

Принятие решения. **Если $t_{эмп} < t_{крит}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза.**

Рассмотрим пример использования t-критерия Стьюдента для несвязных и неравных по численности выборок.

Пример 2. В двух группах учащихся – экспериментальной и контрольной – получены следующие результаты по учебному предмету

Первая группа (экспериментальная) N_1*=11 человек*	*Вторая группа (контрольная)* N_2*=9 человек*
12 14 13 16 11 9 13 15 15 18 14	*13 9 11 10 7 6 8 10 11*

H_0: учащиеся экспериментальной группы показывают в среднем такой же уровень знаний, как и контрольной группы.

Общее количество членов выборки: $n_1=11$, $n_2=9$.

Расчет средних арифметических: $X_{ср}=13{,}636$; $Y_{ср}=9{,}444$

Стандартное отклонение: $\sigma_x=2{,}460$; $\sigma_y=2{,}186$

По формуле (2.2) рассчитываем стандартную ошибку разности арифметических средних:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{60{,}545 + 38{,}222}{11+9-2}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{9}\right)} = 1{,}053$$

Считаем статистику критерия:

$$t = \frac{13.636 - 9.444}{1.053} = 3.981$$

Сравниваем полученное в эксперименте значение t с табличным значением с учетом степеней свободы, равных по формуле (2.4) числу испытуемых минус два (18).

Табличное значение $t_{крит}$ равняется 2,1 при допущении возможности риска сделать ошибочное суждение в пяти случаях из ста (уровень значимости = 5 % или 0,05).

Если полученное в эксперименте эмпирическое значение t превышает табличное, то есть основания принять альтернативную гипотезу (H_1) о том, что учащиеся экспериментальной группы показывают в среднем более высокий уровень знаний. В эксперименте $t=3,981$, табличное $t=2,10$, $3,981>2,10$ (эмпирическое значение t превышает табличное), откуда следует вывод о преимуществе экспериментального обучения.

Здесь могут возникнуть такие ***вопросы***:

1. Что если полученное в опыте значение t окажется меньше табличного? Тогда надо принять нулевую гипотезу.

2. Доказано ли преимущество экспериментального метода? Не столько доказано, сколько показано, потому что с самого начала допускается риск ошибиться в пяти случаях из ста ($p=0,05$). Наш эксперимент мог быть одним из этих пяти случаев. *Но* 95% возможных случаев говорит в пользу альтернативной гипотезы, а это достаточно убедительный аргумент в статистическом доказательстве.

3. Что если в контрольной группе результаты окажутся выше, чем в экспериментальной? Поменяем, например, местами, сделав $\bar{y}$ средней арифметической экспериментальной группы, а $\bar{x}$ – контрольной:

$$t = \frac{9.444 - 13.636}{1.053} = -3.981$$

Отсюда следует вывод, что новый метод пока не проявил себя с хорошей стороны по разным, возможно, причинам. Поскольку абсолютное значение *3,9811>2,1*, принимается вторая альтернативная гипотеза (H_2) о преимуществе традиционного метода.

Случай связанных (парных) выборок

В случае связанных выборок с равным числом измерений в каждой можно использовать более простую формулу *t*-критерия Стьюдента.

Вычисление значения *t* осуществляется по формуле:

$$t_{эмп} = \frac{d}{Sd} \qquad (2.5)$$

где $d_i = x_i - y_i$ – разности между соответствующими значениями переменной *X* и переменной *У*, а *d* – среднее этих разностей; *Sd* вычисляется по следующей формуле:

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}} \qquad (2.6)$$

Число степеней свободы *k* определяется по формуле *k* = *n-1*. Рассмотрим пример использования t-критерия Стьюдента для связных и, очевидно, равных по численности выборок.

Принятие решения. **Если $t_{эмп} < t_{крит}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.**

Пример 3. Изучался уровень ориентации учащихся на художественно-эстетические ценности. С целью активизации формирования этой ориентации в экспериментальной группе проводились беседы, выставки детских рисунков, были организованы посещения музеев и картинных галерей, проведены встречи с музыкантами, художниками и др. Закономерно встает вопрос: какова эффективность проведенной работы? С целью проверки эффективности этой работы до начала эксперимента и после давался тест. Из методических соображений в таблице приводятся результаты небольшого числа испытуемых.

Ученики (n=10)	**Баллы**		**Вспомогательные расчеты**	
	до начала эксперимента (X)	**в конце эксперимента (У)**	**d**	**d^2**
Иванов	14	18	4	16
Новиков	20	19	-1	1
Сидоров	15	22	7	49
Пирогов	11	17	6	36
Агапов	16	24	8	64

Суворов	13	21	8	64
Рыжиков	16	25	9	81
Серов	19	26	7	49
Топоров	15	24	9	81
Быстров	9	15	6	36
$\sum$	148	211	63	477
Среднее	14,8	21,1		

Вначале произведем расчет по формуле:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{63}{10} = 6,3$$

Затем применим формулу (2.6), получим:

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{477 - (63 \cdot 63)/10}{10 \cdot (10-1)}} = \sqrt{\frac{477 - 396,9}{90}} = \sqrt{0,890} = 0,943$$

И, наконец, следует применить формулу (2.5). Получим:

$$t_{эмп} = \frac{\bar{d}}{Sd} = \frac{6,3}{0,943} = 6,678$$

Число степеней свободы: $k=10-1=9$ и по таблице Приложения 1 находим $t_{крит}=2.262$, экспериментальное $t=6,678$, откуда следует возможность принятия альтернативной гипотезы (H_1) о достоверных различиях средних арифметических, т.е. делается вывод об эффективности экспериментального воздействия.

В терминах статистических гипотез полученный результат будет звучать так: на 5% уровне гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1.

Контрольное задание

1. Рассмотрим пример расчета для сравнения стрессоустойчивости для двух профессий: учителя и менеджера по продажам для двух групп ($n1=32$, $n2=33$).

учителя	*менеджеры*

устойчивость к стрессу (баллы)		*устойчивость к стрессу (баллы)*	
1	*23*	*1*	*25*
2	*17*	*2*	*24*
3	*18*	*3*	*17*
4	*19*	*4*	*23*
5	*22*	*5*	*24*
6	*18*	*6*	*22*
7	*19*	*7*	*24*
8	*17*	*8*	*20*
9	*20*	*9*	*21*
10	*21*	*10*	*22*
11	*24*	*11*	*23*
12	*19*	*12*	*19*
13	*21*	*13*	*23*
14	*20*	*14*	*21*
15	*22*	*15*	*20*
16	*23*	*16*	*19*
17	*18*	*17*	*25*
18	*16*	*18*	*26*
19	*17*	*19*	*21*
20	*21*	*20*	*24*
21	*25*	*21*	*23*
22	*20*	*22*	*25*
23	*15*	*23*	*22*
24	*16*	*24*	*23*
25	*18*	*25*	*20*
26	*21*	*26*	*22*
27	*20*	*27*	*24*
28	*19*	*28*	*21*
29	*17*	*29*	*20*
30	*18*	*30*	*25*
31	*19*	*31*	*24*
32	*16*	*32*	*22*
		33	*22*

Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезу и проверьте их с помощью критерия Стьюдента.

2.5.Непараметрические критерии

Сравнивая на глазок (по процентным соотношениям) результаты до и после какого-либо воздействия, исследователь приходит к заключению, что если наблюдаются различия, то имеет место различие в сравниваемых выборках. Подобный подход категорически неприемлем, так как для процентов нельзя определить уровень достоверности в различиях. Проценты, взятые сами по себе, не дают возможности делать статистически достоверные выводы. Чтобы доказать эффективность какого-либо воздействия, необходимо выявить статистически значимую тенденцию в смещении (сдвиге) показателей. Для решения подобных задач исследователь может использовать ряд критериев различия. Ниже будет рассмотрены непараметрические критерии.

Критерий Макнамары

Условия:

- выборки зависимые;
- для получения данных использовалась шкала наименований;
- выборки случайные;
- результаты измерений интересующего свойства не влияют друг на друга.

Предположим, что случайная переменная X характеризует состояние некоторого свойства в рассматриваемой совокупности объектов при первичном измерении данного свойства. Пусть Y – характеризует состояние того же свойства при вторичном измерении. Таким образом, имеем две серии наблюдений:

$x_1, x_2, \ldots x_N$ – до применения средства;

$y_1, y_2, \ldots y_N$ – после применения средства.

В силу того, что данные получены в результате использования шкалы наименований, пары (x_i, y_i) могут быть только вида (0,0); (0,1), (1,0), (1,1).

Составим таблицу:

<table>
<tr><td rowspan="4">Классификация xi</td><td colspan="3">Классификация y_i</td></tr>
<tr><td></td><td>$y_i=0$</td><td>$y_i=1$</td></tr>
<tr><td>$x_i = 0$</td><td>a</td><td>b</td></tr>
<tr><td>$x_i = 1$</td><td>c</td><td>d</td></tr>
</table>

Сформулируем гипотезы:

Ho: $P(x_i=0,\ y_i=1) = P(x_i=1,\ y_i=0)$.

H_1: $P(x_i=0,\ y_i=1) \neq P(x_i=1,\ y_i=0)$.

Если H_1 справедлива, то это означает, что законы распределения переменных X и Y различны, то есть состояния изучаемого свойства существенно различны в одной и той же совокупности при первичном измерении этого свойства (например, до применения нового метода обучения) и при вторичном его измерении (после применения нового метода обучения).

Вычисление статистики критерия и принятие решения:

1. Если $n=b+c>20$, то $T_1=\dfrac{(b-c)^2}{b+c}$. Если $T_1>3.84$, то Ho – отклоняется и принимается альтернативная гипотеза.
2. Если $n=b+c\leq 20$, то вычисляем $T_2=\min(b,c)$. По n и T_2 находим $T_{набл.}$ по таблице 1 в приложении и сопоставляем это значение с $T_{критич.}=0.025$.

   Если $T_{набл.} < T_{критич.}$, то нулевая гипотеза отклоняется.

   а) Если $b<c$, то принимается гипотеза H_1: $P(x_i=0,\ y_i=1) < P(x_i=1,\ y_i=0)$.

   б) Если $b>c$, то принимается гипотеза H_1: $P(x_i=0,\ y_i=1) > P(x_i=1,\ y_i=0)$.

Пример 4. Проверка эффективности форм профориентационной работы среди учащихся выпускных классов. Эффективность каждого цикла работы выяснялась по отношению учащихся к некоторой профессии (ответы: да, нравится/ нет, не нравится). Из 150 человек отобрана выборка – 20 учащихся. Используется критерий Макнамары.

Результаты двукратного опроса учащихся представлены в таблице:

1 опрос	2 опрос	
	Нрав.	*Не нрав.*
Нрав.	$a=2$	$b=2$
Не нрав.	$c=11$	$d=5$

Гипотеза H_o: посещение данного профориентационного цикла лекций и экскурсий не оказывает влияния на отношение учащихся к данной профессии.

Гипотеза H_1: посещение данного профориентационного цикла лекций и экскурсий оказывает положительное влияние на отношение учащихся к данной профессии.

Вычислим $n=b+c= 11+2=13<20$. Вычислим значение статистики: $T=min(b,c)=2$. По таблице вероятность появления $T\leq 2$ *(при* $n=13)=0.011$. Сопоставляем это значение с $T_{критич.}= 0.025$ (для уровня значимости 0,05): $0.011<0.025$, следовательно, нулевая гипотеза отклоняется и принимается альтернативная.

Пример 5. Проверка влияния формы контроля знаний учащихся по некоторому разделу программы на результаты контрольного опроса.

На одном и том же материале были сопоставлены результаты письменных работ обычного типа из трех заданий и результаты выполнения теста из 20 вопросов (шкала: усвоил/ не усвоил).

Случайно выбраны 100 учащихся. Каждый выполнит контрольную работу и тест. Результаты приведены в таблице:

Результаты по к/р	*Результаты по тесту*		
	Усвоил	*Не усвоил*	
Усвоил	$a=63$	$b=21$	$\sum=84$
Не усвоил	$c=4$	$d=12$	$\sum=16$
	$\sum=67$	$\sum=33$	

Проверяем H_o: форма контроля за усвоением данного раздела программы не влияет на распределение учащихся по состоянию знаний.

H_1: форма контроля за усвоением данного раздела программы влияет на распределение учащихся по состоянию знаний.

Проверка гипотез: $n=b+c=4+21=25>20$. Следовательно статистику критерия вычисляем по формуле: $T_1=\dfrac{(b-c)^2}{b+c}=11.56$.

Уровень достоверности $p=0.05$. Ему соответствует $T_{крит.}=3.84$.

В этом случае $T_1 > T_{крит.}$

Следовательно, нулевая гипотеза отвергается и принимает альтернативная (форма влияет, выполнение теста сложнее).

Пример 6. Группа из 120 учащихся выполняла два задания (результаты выполнения: верно/неверно):

	2задание	
1 задание	*Верно*	*Неверно.*
Верно	*a=50*	*b=31*
Неверно	*c=19*	*d=20*

Проверяем *Но:* не существует различий в уровне выполнения этих заданий.

H1: уровень выполнения заданий существенно отличается.

Проверка гипотез: $n=b+c=31+19=50>20$. Следовательно статистику критерия вычисляем по формуле: $T_1=\dfrac{(31-19)^2}{31+19}=2.88$. $T_{крит.}=3.84$. В этом случае $T_1<T_{крит.}$ и нулевая гипотеза принимается.

Критерий знаков (G-критерий)

Критерий предназначен для сравнения состояния некоторого свойства у членов двух **зависимых выборок** на основе измерений, сделанных по шкале не ниже ранговой.

Имеется две серии наблюдений над случайными переменными *X* и *У*, полученные при рассмотрении двух зависимых выборок. На их основе составлено *N* пар вида (x_i, y_i), где x_i, y_i – результаты двукратного измерения одного и того же свойства у одного и того же объекта.

В педагогических исследованиях объектами изучения могут служить учащиеся, учителя, администрация школ. При этом x_i, y_i могут быть, например, балловыми оценками, выставленными учителем за двукратное выполнение одной и той же или различных работ одной и той же группой учащихся до и после применения некоторого педагогическою средства.

Элементы каждой пары x_i, y_i сравниваются между собой по величине, и паре присваивается знак «+», если $x_i < y_i$, знак «–», если $x_i > y_i$ и «0», если $x_i = y_i$.

Нулевая гипотеза формулируются следующим образом: в состоянии изучаемого свойства нет значимых различий при первичном и вторичном измерениях. Альтернативная гипотеза: законы распределения величин X и $У$ различны, т. е. состояния изучаемого свойства существенно различны в одной и той же совокупности при первичном и вторичном измерениях этого свойства.

Статистика критерия (T) определяется следующим образом: допустим, что из N пар $(x, y,)$ нашлось несколько пар, в которых значения x_i и y_i равны. Такие пары обозначаются знаком «0» и при подсчете значения величины T не учитываются. Предположим, что за вычетом из числа N числа пар, обозначенных знаком «0», осталось всего n пар. Среди оставшихся n пар подсчитаем число пар, обозначенных знаком «–», т.е. пары, в которых $x_i<y_i$. Значение величины T и равно числу пар со знаком минус.

Нулевая гипотеза принимается на уровне значимости 0,05, если наблюдаемое значение $T<n\text{-}t_a$, где значение $n\text{-}t_a$ определяется из статистических таблиц для критерия знаков Приложения.

Пример 7. Учащиеся выполняли контрольную работу, направленную на проверку усвоения некоторого понятия. Пятнадцати учащимся затем предложили электронное пособие, составленное с целью формирования данного понятия у учащихся с низким уровнем обучаемости. После изучения пособия учащиеся снова выполняли ту же контрольного работу, которая оценивалась по пятибалльной системе.

Результаты двукратного выполнения работы представляют измерения по шкале порядка (пятибалльная шкала). В этих условиях возможно применение знакового критерия для выявления тенденции изменения состояния знаний учащихся после изучения пособия, так как выполняются все допущения этого критерия.

Результаты двукратного выполнения работы (в баллах) 15 учащимися запишем в форме таблицы

Учащиеся (№)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Первое выполнение	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3
Второе выполнение	2	3	3	4	3	2	3	4	4	3	4	3	2	4	4
Знак разности отметок	0	+	+	+	+	-	0	+	+	0	+	+	-	+	+

Проверяется гипотеза H_0: состояние знаний учащихся не повысилось после изучения пособия. Альтернативная гипотеза: состояние знаний учащихся повысилось после изучения пособия.

Подсчитаем значение статистики критерия T равное числу положительных разностей отметок, полученных учащимися. Согласно данным таблицы $T=10, n=12$.

Для определения критических значений статистики критерия $n\text{–}ta$ используем табл. Приложения. Для уровня значимости $a = 0,05$ при $n=12$ значение $n\text{–}ta=9$. Следовательно выполняется неравенство $T>$ $n\text{–}ta$ $(10>9)$. Поэтому в соответствии с правилом принятия решения нулевая гипотеза отклоняется на уровне значимости $0,05$ и принимается альтернативная гипотеза, что позволяет сделать вывод об улучшении знаний учащихся после самостоятельного изучения пособия.

Пример 8. Предполагается, что изучение курса математики способствует формированию у учащихся одного из приемов логического мышления (например, приема обобщения) даже в том случае, если его формирование не проводится целенаправленно. Для проверки этого предположения был проведен следующий эксперимент.

Учащимся VII класса было предложено 5 задач, решение которых основано на использовании данного приема мышления. Считалось, что учащийся владеет этим приемом, если он дает верный ответ на 3 и более задачи.

Была разработана следующая шкала измерений: верно решена 1 или 2 задачи – оценка «0»; верно решено 3 задачи – оценка «1»; верно решено 4 задачи – оценка «2»; верно решено 5 задач – оценка «3».

№ уч-ся	*1 отм.*	*2 отм.*	*знак*	*№ уч-ся*	*1 отм.*	*2 отм.*	*знак*
1	*1*	*1*	*0*	*18*	*0*	*1*	+
2	*1*	*0*	-	*19*	*1*	*1*	*0*
3	*1*	*0*	-	*20*	*0*	*1*	+
4	*2*	*2*	*0*	*21*	*0*	*1*	+
5	*0*	*1*	+	*22*	*1*	*2*	+

6	*0*	*0*	*0*	*23*	*2*	*1*	-
7	*0*	*1*	+	*24*	*0*	*1*	+
8	*0*	*0*	*0*	*25*	*0*	*1*	+
9	*0*	*0*	*0*	*26*	*1*	*2*	+
10	*1*	*1*	*0*	*27*	*0*	*0*	*0*
11	*0*	*1*	+	*28*	*1*	*0*	-
12	*3*	*3*	*0*	*29*	*1*	*0*	-
13	*2*	*2*	*0*	*30*	*0*	*1*	+
14	*1*	*0*	-	*31*	*0*	*0*	*0*
15	*0*	*1*	+	*32*	*1*	*2*	+
16	*0*	*1*	+	*33*	*1*	*0*	-
17	*1*	*1*	*0*	*34*	*3*	*2*	-
				35	*0*	*1*	+

Работа проводилась дважды: в конце сентября и конце мая следующего года. Ее писали 35 одних и тех же учащихся, отобранных методом случайного отбора из 7 разных школ. Результаты двукратного выполнения работы запишем в форме таблицы.

В соответствии с целями эксперимента формулируем нулевую гипотезу следующим образом: H_0 – изучение математики не способствует формированию изучаемого приема мышления. Тогда альтернативная гипотеза будет иметь вид: H_1 – изучение математики способствует овладению этим приемом мышления.

Согласно данным таблицы, значение статистики $T=15$ – число разностей со знаком «+». Из 35 пар 12 имеют знак «0»; значит, $n = 35\text{-}12 = 23$.

По таблице Приложения для $n=23$ и уровня значимости 0,025 находим критическое значение статистики критерия, равное 16. Следовательно, верно неравенство $T< n - ta$ $(15<16)$.

Поэтому в соответствии с правилом принятия решений приходится сделать вывод о том, что полученные результаты не дают достаточных оснований для отклонения нулевой гипотезы, т.е. мы не располагаем достаточными основаниями для отклонения утверждения о том, что изучение математики само по себе не способствует овладению выделенным приемом мышления.

Медианный критерий

Условия:

- выборки независимые;
- выборки случайные;

- шкала измерений не менее порядковой;
- совокупный объем выборок не менее 40.

Обозначим $x_1, x_2,...x_{N_1}$ – состояния изучаемого свойства в первой совокупности; $y_1, y_2,...y_{N2}$ – состояния изучаемого свойства во второй совокупности. Объем первой выборки – N_1, объем второй выборки – N_2. Составим общую выборку объема *V*= $N_1 + N_2$. Найдем медиану этой выборки. Обозначим ее *MeX*. Систематизируем данные в таблицу:

	Выборка 1	*Выборка 2*
> MeX	*A*	*B*
$\leq$ *MeX*	*C*	*D*

Критерий можно применять, если *A,B,C,D*$\geq$*5*.

Сформулируем гипотезы:

H₀: обе совокупности имеют одинаковую медиану (нет значимых различий между выборками);

H₁: совокупности имеют различные медианы (существуют значимые различия между выборками).

Статистика критерия:

$$T_н = \frac{N(\left|AD - BC\right| - \frac{N}{2})^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

Принятие решения: H_0 отклоняется, если $T_н$*>3.84.*

Важное замечание: если наблюдается достаточно большое количество значений выборок вблизи медианы, то следует использовать уточненное значение медианы.

Пример 9. Два класса учащихся пишут контрольную работу, за которую можно получить максимум 12 баллов.

N_1 *=28,* N_2 *=32.*

Получены данные, систематизированные в таблицу:

Число баллов	*Абс.частота в 1 выборке*	*Абс.частота во 2 выборке*	*∑абс.частот*	*wi*
12	*2*	*1*	*3*	*60*

11	*1*	*2*	*3*	*57*
10	*0*	*1*	*1*	*54*
9	*0*	*5*	*5*	*53*
8	*3*	*3*	*6*	*48*
7	*4*	*7*	*11*	*42*
6	*6*	*3*	*9*	*31*
5	*5*	*5*	*10*	*22*
4	*4*	*3*	*7*	*12*
3	*1*	*0*	*1*	*5*
2	*2*	*2*	*4*	*4*
1	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*

Очевидно, *MeX=6*.

Составим другую таблицу:

	Выборка 1	*Выборка 2*
>6	*A=10*	*B=19*
≤ 6	*C=18*	*D=13*

Тогда $T_н = \dfrac{60(\left|10\cdot 13-19\cdot 18\right|-\frac{60}{2})^2}{29\cdot 31\cdot 28\cdot 32}=2.47$.

Очевидно, 2.47<3.84, следовательно нулевая гипотеза принимается и значимых различий в результатах выполнения работы нет.

Контрольные задания

1. Один и тот же класс подвергся опросу: нравится ли тебе урок «Окружающего мира»? Между срезами – реализация целенаправленной работы с использованием экскурсий в природу для повышения познавательного интереса к предмету «Окружающий мир». По приведенным данным оцените результативность примененного средства, сформулируйте статистические гипотезы (ответы: нравится – «+», не нравится – «-»):

№ уч-ся	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*
1 срез	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-
2 срез	+	-	-	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-

2. Проведены два опроса детей младших классов: «Нравится ли тебе ходить в школу?». Между ними – работа по формированию положительной мотивации. Сформулируйте статистические гипотезы и проверьте результативность этой работы на основе следующих данных (ответ «нравится» – «+», не нравится – «-»):

№ уч-ся	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*
1 срез	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
2 срез	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	+	-

3. Для развития логического мышления была разработана особая методика. Оценить ее результативность на основе двух серий срезов в одном классе (контрольные работы, стандартное оценивание: 2,3,4,5), сформулируйте статистические гипотезы:

№ ребенка	*1 срез*	*2 срез*	*№ ребенка*	*1 срез*	*2 срез*
1	*2*	*3*	*13*	*2*	*2*
2	*3*	*3*	*14*	*5*	*4*
3	*4*	*4*	*15*	*5*	*5*
4я	*2*	*4*	*16*	*4*	*4*
5	*5*	*3*	*17*	*4*	*3*
6	*5*	*4*	*18*	*4*	*5*
7	*2*	*3*	*19*	*3*	*4*
8	*3*	*4*	*20*	*3*	*4*
9	*4*	*4*	*21*	*3*	*3*
10	*4*	*5*	*22*	*5*	*4*
11	*4*	*3*	*23*	*3*	*2*
12	*3*	*3*	*24*	*3*	*3*

4. Решить с использованием критерия знаков следующую задачу. Результаты измерения уровня тревожности до и после проведения тренинга в группе испытуемых отображены в таблице.

№ испытуемого	*Уровень тревожности «до» тренинга*	*Уровень тревожности «после» тренинга*
1	*30*	*34*
2	*39*	*39*
3	*35*	*26*
4	*34*	*33*
5	*40*	*34*
6	*35*	*40*
7	*22*	*25*

8	*22*	*23*
9	*32*	*33*
10	*23*	*24*
11	*16*	*15*
12	*34*	*27*
13	*33*	*35*
14	*34*	*37*

Определить, является ли изменение уровня тревожности статистически значимым.

5. Развитие коммуникабельности детей осуществлялось на базе использования коллективных форм работы. Проверьте результативность проделанной работы на основе двух серий срезов в экспериментальном классе, где уровень коммуникабельности замерялся с помощью метода рангового оценивания:

Учащиеся (№)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
Первое выполнение	*3*	*4*	*4*	*3*	*5*	*2*	*1*	*3*	*3*	*4*	*4*	*4*	*5*	*6*	*5*
Второе выполнение	*4*	*4*	*4*	*5*	*3*	*2*	*3*	*3*	*4*	*3*	*2*	*3*	*5*	*6*	*4*

6. Результаты двукратного выполнения работы (в баллах) 15 учащимися запишем в форме таблицы:

Учащиеся (№)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
Первое выполнение	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*	*3*	*3*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
Второе выполнение	*2*	*3*	*3*	*4*	*3*	*2*	*3*	*4*	*4*	*3*	*4*	*3*	*2*	*4*	*4*

Сформулируйте статистические гипотезы и выясните, какая подтвердилась.

7. Проверьте, являются различия в умении классифицировать у учащихся двух разных вторых классов статистически значимыми? (результаты получены в ходе рангового оценивания):

Контр. класс	*Экспер. класс*	*Контр. класс*	*Экспер. класс*
3	*4*	*7*	*6*
4	*8*	*7*	*7*
7	*9*	*10*	*7*
8	*7*	*4*	*6*
7	*6*	*3*	*9*
7	*8*	*7*	*5*

6	*4*	*8*	*4*
2	*8*	*9*	*7*
5	*4*	*9*	*4*
7	*7*	*10*	*8*
8	*9*	*8*	*4*
9	*5*	*7*	*8*

8. Для сопоставления уровня развития визуальной памяти в двух классах были проведены замеры по шкале рангов. Результаты представлены в таблице:

Контр. класс	*3*	*4*	*5*	*4*	*4*	*6*	*6*	*4*	*5*	*7*	*4*	*4*	*5*	*5*	*3*
Экспер. класс	*6*	*4*	*5*	*4*	*6*	*3*	*5*	*5*	*6*	*7*	*7*	*4*	*7*	*5*	*4*
Контр. класс	*4*	*2*	*7*	*6*	*5*	*5*	*5* *6*	*4*	*6*	*3*	*4*	*5*	*4*	*4*	*6*
Экспер. класс	*7*	*3*	*5*	*7*	*5*	*5*	*6*	*4*	*6*	*7*	*4*	*4*	*3*	*5*	*6*

Являются ли различия в уровне развития визуальной памяти у учащихся двух этих классов статистически значимыми?

Вопросы для самоконтроля по курсу

1. Что является предметом изучения математической статистики?

2. Что такое статистический признак?

3. Объясните смысл термина «генеральная совокупность» на примере.

4. В чем разница понятий «генеральная совокупность» и «выборочная совокупность»? Приведите пример.

5. Что понимается под объемом генеральной или выборочной совокупности?

6. Объясните, какой статистический метод называется выборочным.

7. Что значит репрезентативная выборка?

8. Что такое ранжирование статистических данных? Приведите пример.

9. Что такое вариационный ряд? Приведите пример.

10. Что называется вариантом вариационного ряда?

11. Как вычислить средний выборочный вариант вариационного ряда?

12. Какие средние величины, кроме среднего выборочного, используются для характеристики вариационного ряда? Как они вычисляются?

13. Что такое размах вариации? Приведите пример.

14. Что такое мода вариационного ряда? Приведите пример.

15. Что такое медиана вариационного ряда? Приведите пример.

16. В чем разница понятий «частота» и «относительная частота» варианта? Приведите пример.

17. Что такое статистическое распределение выборки? Как его можно изобразить графически?

18. Что такое шкалирование?

19. Какие виды шкал вы знаете?

20. Приведите пример номинальной шкалы.

21. Приведите пример порядковой шкалы.

22. Приведите пример интервальной шкалы.

23. Приведите пример шкалы отношений.

24. Что такое статистическая гипотеза.

25. Какие виды статистических гипотез вы знаете?

26. Для проверки какой гипотезы используется критерий Стьюдента?

27. Для какого случая предназначен критерий Макнамары?

28. Для какого случая предназначен критерий знаков?

29. Для какого случая предназначен медианный критерий?

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Высш. шк., 2006
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей.- М.: Изд. центр «Академия», 2003
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. шк., 2003
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высш. шк., 2004
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.- М.: Изд-во МГУ, 2007
6. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. - М.: Педагогика, 1977 – 136с.
7. Граничина О.А. Начала социальной статистики. Элементы теории и задания. СПб, изд-во ГИПСР, 2006
8. Каменкова Н.Г., Челак Е.Н. Математика и информатика. Учебное пособие. СПб. 2010
9. Фирсов А.Н. Теория вероятностей. Часть 1.– СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005
10. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005
11. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. – СПБ: Речь. 2004

Приложение

Таблица критических значений для критерия Стьюдента

f	*p*							
	0.80	**0.90**	**0.95**	**0.98**	**0.99**	**0.995**	**0.998**	**0.999**
1	3.0770	6.3130	12.7060	31.8200	63.6560	127.6560	318.3060	636.6190
2	1.8850	2.9200	4.3020	6.9640	9.9240	14.0890	22.3270	31.5990
3	1.6377	2.35340	3.1820	4.5400	5.8400	7.4580	10.2140	12.9240
4	1.5332	2.13180	2.7760	3.7460	4.6040	5.5970	7.1730	8.6100
5	1.4759	2.01500	2.5700	3.6490	4.0321	4.7730	5.8930	6.8630
6	1.4390	1.9430	2.4460	3.1420	3.7070	4.3160	5.2070	5.9580
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.2293	4.7850	5.4079
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554	3.8320	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.7800
10	1.3720	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.3630	1.7950	2.2010	2.7180	3.1050	3.4960	4.0240	4.4370
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.9290	4.1780
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.8520	4.2200
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9760	3.3257	3.7870	4.1400
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.7320	4.0720
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.9650
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495
21	1.3230	1.7200	2.0790	2.5170	2.8310	3.1350	3.5270	3.8190
22	1.3212	1.7117	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502	3.7251
26	1.3150	1.7050	2.0590	2.4780	2.7780	3.0660	3.4360	3.7060
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739

29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0360	3.3962	3.8494
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852	3.6460
32	1.3080	1.6930	2.0360	2.4480	2.7380	3.0140	3.3650	3.6210
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.9520	3.3479	3.6007
36	1.3050	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	9.4900	3.3326	3.5821
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	3.9808	3.3190	3.5657
40	1.3030	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.9712	3.3069	3.5510
42	1.3200	1.6820	2.0180	2.4180	2.6980	2.6930	3.2960	3.5370
44	1.3010	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	3.9555	3.2861	3.5258
46	1.3000	1.6767	2.0129	2.4102	2.6870	3.9488	3.2771	3.5150
48	1.2990	1.6772	2.0106	2.4056	2.6822	3.9426	3.2689	3.5051
50	1.2980	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.9370	3.2614	3.4060
55	1.2997	1.6730	2.0040	2.3960	2.6680	2.9240	3.2560	3.4760
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.9146	3.2317	3.4602
65	1.2947	1.6686	1.9970	2.3851	2.6536	3.9060	3.2204	3.4466
70	1.2938	1.6689	1.9944	2.3808	2.6479	3.8987	3.2108	3.4350
80	1.2820	1.6640	1.9900	2.3730	2.6380	2.8870	3.1950	3.4160
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3885	2.6316	2.8779	3.1833	3.4019
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737	3.3905
120	1.2888	1.6577	1.9719	2.3578	2.6174	2.8598	3.1595	3.3735
150	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090	2.8482	3.1455	3.3566
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	2.8385	3.1315	3.3398
250	1.2849	1.6510	1.9695	2.3414	2.5966	2.8222	3.1232	3.3299
300	1.2844	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923	2.8279	3.1176	3.3233
400	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882	2.8227	3.1107	3.3150
500	1.2830	1.6470	1.9640	2.3330	2.7850	2.8190	3.1060	3.3100

Таблица вероятностей $P(T_2 \leqslant T_2$ наблюдаемое) для биномиального распределения при $p=q=0{,}5$**

n \ T_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969	+***										
6	016	109	344	656	891	984	+									
7	008	062	227	500	773	938	992	+								
8	004	035	145	363	637	855	965	996	+							
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998	+						
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	998	+					
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994	+	+				
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997	+	+			
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998	+	+		
14		001	006	029	090	212	395	605	788	910	971	994	999	+	+	
15			004	018	059	151	304	500	696	849	941	982	996	+	+	+
16			002	011	038	105	227	402	598	773	896	962	989	998	+	+
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	+
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999
19				002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998
20				001	006	021	058	132	252	412	588	748	868	942	979	994
21				001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22					002	008	026	067	143	262	416	584	738	857	933	974
23					001	005	017	047	105	202	339	500	661	798	895	953
24					001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924
25						002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885

* Таблицы *А — Ж* заимствованы из книг [3, 19, 24].

** Значения вероятностей даны в десятичных дробях, например число 031 означает 0,031.

*** Знак «+» означает 1 или число, близкое к 1.

Примечание: таблица взята из книги: Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. - М.: Педагогика, 1977 – 136с.

Критические значения статистики критерия знаков

n	Уровень значимости для одностороннего критерия						n	Уровень значимости для одностороннего критерия					
	$\alpha=0,025$		$\alpha=0,01$		$\alpha=0,005$			$\alpha=0,025$		$\alpha=0,01$		$\alpha=0,005$	
	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$		t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$
5	0	5	0	5	0	5	8	1	7	1	7	1	7
6	1	5	0	6	0	6	9	2	7	1	8	1	8
7	1	6	1	6	0	7	10	2	8	1	9	1	9

n	Уровень значимости для одностороннего критерия						n	Уровень значимости для одностороннего критерия					
	$\alpha=0,025$		$\alpha=0,01$		$\alpha=0,005$			$\alpha=0,025$		$\alpha=0,01$		$\alpha=0,005$	
	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$		t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$
11	2	9	2	9	1	10	54	20	34	19	35	18	36
12	3	9	2	10	2	10	55	20	35	19	36	18	37
13	3	10	2	11	2	11	56	21	35	19	37	18	38
14	3	11	3	11	2	12	57	21	36	20	37	19	38
15	4	11	3	12	3	12	58	22	36	20	38	19	39
16	4	12	3	13	3	13	59	22	37	21	38	20	39
17	5	12	4	13	3	14	60	22	38	21	39	20	40
18	5	13	4	14	4	14	61	23	38	21	40	21	40
19	5	14	5	14	4	15	62	23	39	22	40	21	41
20	6	14	5	15	4	16	63	24	39	22	41	21	42
21	6	15	5	16	5	16	64	24	40	23	41	22	42
22	6	16	6	16	5	17	65	25	40	23	42	22	43
23	7	16	6	17	5	18	66	25	41	24	42	23	43
24	7	17	6	18	6	18	67	26	41	24	43	23	44
25	8	17	7	18	6	19	68	26	42	24	44	23	45
26	8	18	7	19	7	19	69	26	43	25	44	24	45
27	8	19	8	19	7	20	70	27	43	25	45	24	46
28	9	19	8	20	7	21	71	27	44	26	45	25	46
29	9	20	8	21	8	21	72	28	44	26	46	25	47
30	10	20	9	21	8	22	73	28	45	27	46	26	47
31	10	21	9	22	8	23	74	29	45	27	47	26	48
32	10	22	9	23	9	23	75	29	46	27	48	26	49

Примечание: таблица взята из книги: Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. - М.: Педагогика, 1977 – 136с.

Продолжение

n	Уровень значимости для одностороннего критерия						n	Уровень значимости для одностороннего критерия					
	$\alpha=0,025$		$\alpha=0,01$		$\alpha=0,005$			$\alpha=0,025$		$\alpha=0,01$		$\alpha=0,005$	
	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$		t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$	t_α	$n-t_\alpha$
33	11	22	10	23	9	24	76	29.	47	28	48	27	49
34	11	23	10	24	10	24	77	30	47	28	49	27	50
35	12	23	11	24	10	25	78	30	48	29	49	28	50
36	12	24	11	25	10	26	79	31	48	29	50	28	51
37	13	24	11	26	11	26	80	31	49	30	50	29	51
38	13	25	12	26	11	27	81	32	49	30	51	29	52
39	13	26	12	27	12	27	82	32	50	31	51	29	53
40	14	26	13	27	12	28	83	33	50	31	52	30	53
41	14	27	13	28	12	29	84	33	51	31	53	30	54
42	15	27	14	28	13	29	85	33	52	32	53	31	54
43	15	28	14	29	13	30	86	34	52	32	54	31	55
44	16	28	14	30	14	30	87	34	53	33	54	32	55
45	16	29	15	30	14	31	88	35	53	33	55	32	56
46	16	30	15	31	14	32	89	35	54	34	55	32	57
47	17	30	16	31	15	32	90	36	54	34	56	33	57
48	17	31	16	32	15	33	91	36	55	34	57	33	58
49	18	31	16	33	16	33	92	37	55	35	57	34	58
50	18	32	17	33	16	34	93	37	56	35	58	34	59
51	19	32	17	34	16	35	94	38	56	36	58	35	59
52	19	33	18	34	17	35	95	38	57	36	59	35	60
53	19	34	18	35	17	36	96	38	58	37	59	35	61
97	39	58	37	60	36	61	99	40	59	38	61	37	62
98	39	59	38	60	36	62	100	40	60	38	62	37	63
	Уровень значимости для двустороннего критерия							Уровень значимости для двустороннего критерия					
	$\alpha=0,05$		$\alpha=0,02$		$\alpha=0,01$			$\alpha=0,05$		$\alpha=0,02$		$\alpha=0,01$	
	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$n-t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$n-t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$n-t_{\frac{\alpha}{2}}$		$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$n-t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$n-t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t_{\frac{\alpha}{2}}$	$n-t_{\frac{\alpha}{2}}$

Граничина Ольга Александровна

Математико-статистические методы психолого-педагогических исследований

Учебно-методическое пособие

Редактор *О.А. Граничина*
Корректор *Л. Н. Стариченко*

Издательство «ВВМ»
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, университетский пр., 26
e-mail: vvmpub@yandex.ru

Подписано к печати 17.03.2012. Формат 60x90
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Печ. л. 7,1875.
Тираж 200 экз. Заказ №

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
химического факультета СПбГУ
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26