

На правах рукописи

Плотников Павел Владимирович

РЕШЕНИЕ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ
НА ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ

05.13.17 — Теоретические основы информатики,
01.01.09 — Дискретная математика и математическая
кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2018

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
КРИВУЛИН Николай Кимович

Официальные оппоненты: **СОКОЛОВ Андрей Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр "Карельский научный центр Российской академии наук", ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований

КАЛИНИН Никита Сергеевич,
PhD (кандидат физико-математических наук),
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", старший научный сотрудник Международной лаборатории теории игр и принятия решений Санкт-Петербургской школы экономики и менеджмента

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова (Ленина)"

Защита состоится 14 июня 2018 года в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, г. Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/details/14/1694.html>.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.51
доктор физико-математических наук,
профессор



Ю. К. Демьянович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Одной из перспективных и быстро развивающихся областей прикладной математики и алгебраической информатики является тропическая математика, которая связана с изучением теории и приложений полуколец с идемпотентным сложением. В технике, экономике и управлении при автоматизации и информатизации различных процессов достаточно часто можно встретить оптимизационные задачи, которые могут быть сформулированы и решены в терминах тропической математики (задачи тропической оптимизации).

Существует важный с практической точки зрения класс задач оптимизации, возникающих при оптимальном проектировании информационных систем и процессов (оптимизация структуры информационной системы, оптимизация топологии сети передачи данных, оптимизация архитектуры распределенных систем обработки данных и др.), в которых требуется найти наилучший способ разместить объект без ограничений или с дополнительными ограничениями на допустимую область размещения. Такую задачу часто называют задачей 1-центра (1-center problem), которая представляет важный класс задач оптимизации и находит широкое применение в Data Mining. Задачу в общем случае можно сформулировать так: задано множество объектов информационной системы, в которых может осуществляться создание, обработка или потребление информации, допустимая область размещения целевого объекта и функция для расчета характеристик взаимосвязи целевого объекта и заданных объектов, являющихся элементами рассматриваемой системы. Необходимо найти оптимальное положение объекта с целью оптимизации значения характеристики, описывающей его взаимосвязи с заданными объектами.

Решение задачи находит свое применение на практике в различных областях, связанных с проектированием процессов создания, накопления и обработки информации, исследованием принципов создания и функционирования аппаратных средств автоматизации, моделированием информационных потребностей коллективных и индивидуальных пользователей и способов их удовлетворения, разработкой и анализом моделей информационных процессов и структур и др.

Существенную роль при решении таких задач играет выбор метрики, при помощи которой осуществляется вычисление значения целевой функции. В случае евклидовой метрики, задача, известная также как задача о наименьшей ограничивающей сфере, разрешима за линейное время.

Большим прикладным значением обладает решение минимаксной задачи размещения с прямоугольной метрикой (l_1 -метрика). Такого рода оптимизационную задачу называют задачей Ролса или задачей посыльного. Известно геометрическое решение этой задачи, а также решение с помощью методов линейного программирования, в частности, с использованием симплекс-метода.

Научно-технические задачи. На практике рассматриваемый класс задач может встречаться, например, при проектировании размещения центров управления, хранения и обработки данных, собранных с видеокamer системы видеонаблюдения в здании.

Система видеонаблюдения такого рода состоит из трех главных компонент: (1) видеокamеры, производящие входной поток видеoinформации, (2) система передачи сигнала от камер до центра управления, хранения и обработки данных и (3) сам этот центр. В качестве объектов, относительно которых необходимо решать задачу 1-центра, выступают видеокamеры внутреннего и наружного наблюдения. Суть задачи размещения состоит в поиске оптимального положения центра управления системой. При этом необходимо минимизировать функцию расстояния до самой дальней камеры, чтобы снизить влияние

шумов и повысить качество сигнала, благодаря уменьшению длины кабеля. Внутри одного этажа кабели чаще всего прокладывают вдоль линий разделения пола, стен и потолка. Межэтажные перекрытия проходятся по вертикальным шахтам. Поэтому можно считать, что все изгибы кабеля осуществляются под прямыми углами, что позволяет измерять его длину при помощи прямоугольной метрики.

Решение задачи 1-центра в рассмотренном случае позволяет обеспечить высоконадежную обработку информации и помехоустойчивость информационных коммуникаций для целей передачи и защиты передаваемой информации. Решение подобных задач обладает высокой актуальностью.

В связи с бурным ростом информатизации всех сфер жизни в 21 веке, а вместе с тем с увеличением информационных потребностей коллективных и индивидуальных пользователей, важным является повышение уровня доступности информационных ресурсов, в том числе с использованием широкополосного доступа к сети «Интернет». Для этого необходима прокладка в населенных пунктах сетей проводных и оптоволоконных линий связи. В силу масштабности и высокой ресурсоемкости этой задачи, принципиальное значение приобретает поиск оптимальных (по критерию минимизации потерь при передаче информации) способов ее решения, что позволит обеспечить помехоустойчивость информационных коммуникаций, безопасность использования информационных технологий, осуществить научно обоснованную организацию информационного обслуживания населения.

Известно, что в современных городах есть большое количество районов, дорожная сеть которых представляет из себя систему параллельных и перпендикулярных между собой улиц. Прокладка оптоволоконных и проводных сетей осуществляется вдоль уличной сети. Поэтому для описания и решения задач оптимального размещения аппаратных комплексов обработки интернет-трафика может быть использована прямоугольная (манхэттенская) метрика. При этом, по различным причинам (градостроительные регламенты, социальные ограничения, требования радиоэлектронной совместимости, соображения информационной безопасности и др.) могут возникать ограничения на область размещения.

Имеются и другие примеры применения рассматриваемой оптимизационной задачи. Например, оптимальное размещение объектов экстренной помощи населению (противопожарные службы, службы скорой помощи и др.). Аналогичная с оптимизацией систем видеонаблюдения задача решается при проектировании систем автоматического пожаротушения в зданиях. В качестве еще одной важной области применения результатов решения задачи 1-центра с прямоугольной метрикой могут рассматриваться задачи размещения компонентов на микросхеме и проектирования печатных плат для электронных изделий с прямоугольной сетью межкомпонентных соединений.

Некоторые из описанных задач имеют аналитические решения, другие задачи можно решить алгоритмически, например при помощи методов линейного и смешанного целочисленного линейного программирования. Алгоритмический подход обычно обеспечивает численное нахождение одного из решений и требует применения специальных программных средств. Такой подход не позволяет получить все решения аналитически в виде явных формульных зависимостей, удобном для дальнейшего анализа и непосредственных расчетов. Поэтому есть необходимость в разработке новых методов для получения в явном виде аналитических решений задачи 1-центра. Возможностью получать такие решения обладает подход на основе применения методов тропической математики.

Таким образом, актуальной теоретической и практической задачей является разработка методов тропической оптимизации для решения задач 1-центра с прямоугольной метрикой с разного рода ограничениями на допустимую область размещения, которые воз-

никают при исследовании принципов создания и функционирования аппаратных средств автоматизации различных процессов, проектировании и развитии информационных систем различного назначения.

Степень разработанности темы. Диссертационное исследование базируется на теоретических положениях, методологических подходах и концептуальных выводах, обоснованных в трудах отечественных и зарубежных ученых.

Значительный вклад в развитие теории и методов тропической математики внесли Н. Н. Воробьев, В. П. Маслов, И. В. Романовский, А. А. Корбут, Р. А. Кунингхайм-Грин, У. Циммерманн, Г. Л. Литвинов, Г. Б. Михалкин, А. Э. Гутерман, Д. С. Голан, П. Буткович, М. Гондран, Д. Ю. Григорьев, Д. Гунаварден, И. Итенберг, Г. Кохен, Д. Д. Лоусон, У. Макэнини, Я. Н. Шитов и др.

При этом учеными разрабатывались не только теоретические положения, но также рассматривались прикладные задачи, которые формулируются и эффективно решаются в терминах идемпотентной алгебры, составляющей важный раздел тропической математики. Такие задачи изучались в работах Ф. Бачелли, Я. Г. Олсдера, Б. Хейдерготта, В. Д. Матвеевко, Н. К. Кривулина, С. Л. Блюмина, Д. А. Николаева и др.

Описание подходов к решению задачи 1-центра с использованием евклидовой метрики приведено в работах М. Колебрука, Н. Мегиддо, А. Фоула, О. Худека и др. Задача размещения Ролса с прямоугольной метрикой изучалась в работе П. Хансена. Известно геометрическое решение этой задачи, описанное в трудах Д. Эльзинга и Р. Френсиса. Итерационные алгоритмы ее решения разработаны Л. Чалметом, С. Нобахтаном и др. Возможно также использование для ее решения методов линейного программирования, в частности, симплекс-метода.

Однако, известные подходы и методы решения этих задач, в частности при наличии ограничений на допустимую область размещения, зачастую не позволяют получить полного решения задач с прямоугольной метрикой в явном виде. Применение итерационных методов позволяет найти частное решение задачи 1-центра в виде одной точки, которая является одним из возможных решений задачи. Это исключает возможность аналитического исследования множества всех решений, включая корректировку этого множества при добавлении ограничений, что значительно снижает теоретическую и практическую значимость получаемых таким способом решений. Кроме того, вычислительная сложность решения, записанного в явном виде, может быть определена точно, а для алгоритмических решений обычно известны только оценки порядка сложности вычислений. Это становится особенно важным преимуществом аналитических решений, когда полученные расчетные формулы обеспечивают низкую (например, линейную) вычислительную сложность.

Таким образом, несмотря на наличие значительного количества разработок в области тропической математики, они в незначительной степени рассматривают подходы к аналитическому решению минимаксных задач размещения точечных объектов на плоскости с прямоугольной метрикой. Требуется разработка и обоснование новых математических методов, позволяющих эффективно решать указанные задачи, применение которых позволит рационализировать проектирование комплексов аппаратных средств автоматизации информационных процессов, а также решать иные прикладные задачи, связанные с развитием современных информационных технологий и ускорением на этой основе научно-технического прогресса.

Цель работы – разработка новых математических методов решения минимаксных задач размещения точечных объектов на плоскости и в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой на основе применения методов идемпотентной алгебры и создание

программно-алгоритмического обеспечения для их реализации при проектировании комплексов аппаратных средств автоматизации информационных процессов.

В соответствии с указанной целью, поставлены следующие **задачи** исследования:

- разработка методов решения задач оптимизации функций, заданных на идемпотентных полуполях, с несколькими переменными на основе решения расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы;
- разработка методов решения задач оптимизации функций на идемпотентных полуполях с несколькими переменными с помощью сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств и последующего нахождения всех ее решений;
- исследование минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на плоскости и в трехмерном пространстве с ограничениями и без ограничений, включая представление этих задач в виде задач оптимизации в терминах тропической алгебры, построение прямых решений таких задач в явном виде и оценку вычислительной сложности решений;
- разработка рекомендаций по оптимальному размещению центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимальному размещению центра управления системой видеонаблюдения на основе реализации разработанных математических методов;
- разработка на основе полученных результатов программных средств для решения задач размещения и их практическое применение для решения тестовых задач.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Содержание диссертационного исследования соответствует паспорту научной специальности 05.13.17 – Теоретические основы информатики (п. 2. Исследование информационных структур, разработка и анализ моделей информационных процессов и структур; 11. Разработка методов обеспечения высоконадежной обработки информации и обеспечения помехоустойчивости информационных коммуникаций для целей передачи, хранения и защиты информации; 16. Общие принципы организации телекоммуникационных систем и оценки их эффективности. Разработка научных принципов организации информационных служб по отраслям народного хозяйства. Изучение социально-экономических аспектов информатизации и компьютеризации общества), а также 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (п. 3. Математическое программирование (методы минимизации функций)).

Научная новизна результатов исследования заключается в разработке комплекса математических методов оптимального размещения точечных объектов на плоскости и в пространстве с прямоугольной метрикой с использованием инструментария идемпотентной алгебры, отличающегося возможностью получения явных результатов в аналитическом виде, без использования итерационных алгоритмов в целях повышения эффективности организации и функционирования информационных систем и применения современных информационных технологий. Итерационные решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой позволяют находить только частные решения. Использование идемпотентной алгебры, напротив, позволяет получать полные решения в виде явных формул, удобных для применения при решении практических задач, анализе и интерпретации получаемых результатов. К тому же процедуры, построенные на основе разработанных в диссертационной работе методов имеют меньшую алгоритмическую сложность в сравнении с известными итерационными алгоритмами.

Наиболее существенными результатами, полученными лично автором, содержащими элементы научной новизны и выносимыми для публичной защиты, являются следующие:

- разработаны математические методы для решения класса минимаксных задач, заданных на идемпотентных полуполях с несколькими переменными, базирующиеся на решении расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы и на процедуре сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств с последующим нахождением всех ее решений;
- получены прямые решения в явном виде минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на плоскости и в трехмерном пространстве с ограничениями и без ограничений для оптимизации выбора мест локализации объектов обработки и хранения информации в информационных системах, а также результаты оценки вычислительной сложности соответствующих алгоритмов;
- предложены рекомендации по применению разработанных аналитических методов для решения задач оптимального размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимального размещения центра управления системой видеонаблюдения для обеспечения высоконадежной обработки информации и помехоустойчивости информационных коммуникаций;
- предложена программная реализация алгоритмов численного определения областей оптимального (по минимаксному критерию) размещения точечных объектов на плоскости с прямоугольной метрикой в условиях действия ограничений, на основе применения методов идемпотентной алгебры.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично или при его непосредственном участии.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты направлены на развитие теоретических подходов и математических методов решения научных и технических, фундаментальных и прикладных оптимизационных задач теоретической информатики, основанных на применении инструментария идемпотентной алгебры и математического программирования. С практических позиций, полученные результаты позволяют находить решение большого класса прикладных задач (организация систем видеонаблюдения, проектирование топологии интегральных микросхем, формирование архитектуры телекоммуникационных сетей и др.) размещения объектов на плоскости и в пространстве с прямоугольной метрикой с разного рода ограничениями на область размещения, такими как прямая, отрезок прямой линии, вертикальная или горизонтальная полоса, а также прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям.

Методология и методы исследования. В диссертации использована общая методология математической науки, общенаучные методы анализа и синтеза, приемы описания на символическом математическом языке свойств и связей объектов реального мира, применение методов тропической математики в сочетании с результатами классической линейной алгебры и теории оптимизации. Указанная методология использована в тесной связи с научными методами теории информатики, в части тех ее подходов, которые связаны с исследованием и формированием структурных характеристик информационных систем. При проведении диссертационного исследования для получения новых научных результатов использованы методы математического программирования и теории исследования операций, в частности – методы минимизации функций.

Методика исследования базируется на использовании методического аппарата идемпотентной алгебры для решения задач размещения, обладающего рядом преимуществ перед другими известными методами

- если традиционно использование операций \max и \min при формулировке математических постановок прикладных задач часто усложняет их решение, то на языке идемпотентной алгебры работа с такими операциями существенно упрощается, в силу того, что в качестве идемпотентной операции сложения можно взять одну из операций \max или \min . Вследствие этого, методы данного раздела математики могут оказаться удобными и эффективными при решении минимаксных задач;
- к тому же тропический подход, заключающийся в замене обычных арифметических операций $(+, \times)$ на пару операций (\oplus, \otimes) с идемпотентным сложением, позволяет решать задачи в общем виде, не выбирая заранее полукольцо, в котором рассматривается задача. Так, одновременно с решением в смысле $(\max, +)$ -алгебры получают решение и для других постановок ($(\min, +)$ -алгебры, (\max, \times) -алгебры и т.д.). Это существенно расширяет область применения данного подхода;
- стоит отметить также важную особенность, заключающуюся в возможности преобразовывать сложные нелинейные задачи в линейные в терминах идемпотентной алгебры. Это позволяет использовать общие методы и результаты линейной алгебры, что часто упрощает решение и интерпретацию полученных результатов. Так, решение минимаксной задачи размещения точечного объекта на плоскости и в пространстве сводится в терминах идемпотентной алгебры к решению параметризованной системы неравенств или к минимизации некоторой функции, заданной в матричном виде с использованием свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы. Получение явных аналитических решений позволяет анализировать результат и следить за его изменением после введения дополнительных ограничений;
- важным преимуществом идемпотентной алгебры является то, что в отличие от итерационных решений задач оптимизации, время сходимости которых можно только оценивать, идемпотентный подход позволяет получать аналитические решения в виде точных формул, время расчета по которым можно определить напрямую.

Степень достоверности результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами, непротиворечивостью постановок исследовательских задач, использованием апробированной методологии и методов научных исследований, подбором достоверных исходных данных, а также проведением тестовых расчетов с использованием разработанных соискателем программных средств. Кроме того, достоверность результатов подтверждается их близостью к ранее полученным результатами, включая геометрические решения, предложенные Д. Эльзингом и Р. Френсисом, и алгебраические решения Н. К. Кривулина, полученные с использованием альтернативных методик исследования.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на ряде научных конференций, в том числе на Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы развития современного общества» (Курск, Россия – 2014), Международной научно-практической конференции «Тренды развития современного общества: управленческие, правовые, экономические и социальные аспекты» (Курск, Россия – 2014), 7-й научно-практической internet-конференции «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики» (Тольятти, Россия – 2016), 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017 (Санкт-Петербург, Россия – 2017), Всероссийской конференции «Третьи чтения памяти профессора Б. Л. Овсиевича. Экономико-математические исследования: математические моде-

ли и информационные технологии» (Санкт-Петербург, Россия – 2017); на семинарах кафедры статистического моделирования и кафедры системного программирования Санкт-Петербургского государственного университета и семинаре Санкт-Петербургского государственного университета и Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН по тропической математике и смежным вопросам.

Результаты диссертационной работы были получены при поддержке грантов №13-02-00338 – «Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления» и №16-02-00059 – «Развитие моделей и методов тропической математики в прикладных задачах экономики и управления» Российского гуманитарного научного фонда, а также №18-010-00723А – «Разработка моделей и методов тропической математики для прикладных задач экономики и управления» Российского фонда фундаментальных исследований.

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в восьми печатных работах [1–3, 6–10]. Три из них [1–3] изданы в журналах из "Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук", а переводы двух из них опубликованы в журналах, индексируемых в международных библиографических базах Scopus и Web of Science [4, 5].

В совместных работах с Кривулиным Н. К. [1, 2, 8–10] соискателю принадлежит формулировка и доказательства теорем о решении задачи размещения на плоскости точечного объекта с прямоугольной метрикой и ограничениями на область размещения, разработка алгоритмов и программных средств, а также проведение вычислительных экспериментов для верификации полученных результатов, соавтору принадлежат постановки задач и разработка общих методов решения.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет **122** страницы машинописного текста. Список литературы содержит **116** наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность и научная новизна темы исследования, описана степень ее разработанности, а также формулируются цели и задачи диссертационной работы, показывается практическая значимость полученных результатов и представляются выносимые на защиту научные положения, приведены сведения об апробации предлагаемых моделей и методов.

В **первой главе** систематизированы основные сведения об идемпотентной алгебре, на которые опираются дальнейшие исследования. Сформулированы основные определения и введены используемые обозначения.

Рассматривается числовое множество \mathbb{X} , на котором определены ассоциативные и коммутативные операции сложения \oplus и умножения \otimes . Через $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes, 0, 1 \rangle$ обозначается заданное на \mathbb{X} при помощи этих операций коммутативное полукольцо с нулем 0 и единицей 1 . Сложение считается идемпотентным (т.е. для любого числа $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$), а умножение – обратимым (т.е. для каждого $x \neq 0$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = 1$). Далее для упрощения математических выкладок знак умножения \otimes в алгебраических выражениях, как обычно, опускается. В качестве примера алгебраической структуры рассматриваемого типа приведено вещественное идемпотентное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$.

Проведен обзор алгебры векторов и матриц над идемпотентными полуполями. Сформулирована минимаксная задача в терминах идемпотентной алгебры в матричной форме, на основе которой в последующих материалах диссертации предложено решение оптимизационной задачи.

Вторая глава посвящена изучению класса задач тропической оптимизации с одной, двумя и тремя переменными.

Для некоторого набор чисел $a, b, c, d \in \mathbb{X}$ сформулирована задача тропической оптимизации. Необходимо найти пару чисел $t, s \in \mathbb{X}$, на которых целевая функция принимает наименьшее значение

$$\min_{t, s \in \mathbb{X}} at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts. \quad (1)$$

Для решения задачи предложен матричный подход на основе экстремального свойства идемпотентного спектрального радиуса. Задача записывается в расширенной векторной форме. При этом на введенный вектор-решение накладывается дополнительное ограничение, заключающееся в том, что первая и последняя координаты вектора считаются взаимно обратными. Из этого условия получается система неравенств, в которой по крайней мере одно неравенство является равенством. Результаты анализа задачи (1) для всех рассмотренных случаев записываются в виде Теоремы 1, которая уточняет известные решения. В результате решения задачи предложена явная формула для вычисления минимума целевой функции и координат вектора оптимального решения.

Теорема 1. Минимум $\mu = (ad \oplus bc)^{1/2}$ в задаче (1) достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha}b^{-\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{1-\alpha}b^{\alpha}c^{\alpha-1}d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Затем предложено решение для ряда задач тропической оптимизации с ограничениями. Сначала изучено решение задачи с одной переменной и ограничениями в виде двойного неравенства. Заданы числа $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{X}$, а также вещественное число k . Требуется найти ненулевые решения $t \in \mathbb{X}$ задачи

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{X}} at^{k-1} \oplus bt^{-(k-1)} \oplus ct^{-(k+1)} \oplus dt^{k+1}, \\ f \leq t \leq g. \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения применяется метод, заключающийся в сведении задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств. Сначала вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача сводится к решению параметризованной системы неравенств. Условие существования решений системы используются для определения величины параметра, а все решения системы при найденном значении параметра берутся в качестве решений исходной задачи оптимизации. Вариант решения предложен в Теореме 2.

Теорема 2. Пусть $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{X}$ и k – вещественное число. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $k < -1$ или $k > 1$, то минимум в задаче (2) равен

$$\begin{aligned} \mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k}c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k}d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus \\ \oplus a(f^{-(k-1)} \oplus g^{-(k-1)})^{-1} \oplus b(f^{k-1} \oplus g^{k-1})^{-1} \oplus \\ \oplus c(f^{k+1} \oplus g^{k+1})^{-1} \oplus d(f^{-(k+1)} \oplus g^{-(k+1)})^{-1} \end{aligned}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (((\mu a^{-1})^{-1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1}b)^{-1/(k-1)})^{-1} \oplus \\ \oplus ((\mu^{-1}c)^{-1/(k+1)} \oplus (\mu d^{-1})^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus f)^{1-\alpha} (((\mu^{-1}a)^{-1/(k-1)} \oplus (\mu b^{-1})^{1/(k-1)})^{-1} \oplus \\ \oplus ((\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus (\mu^{-1}d)^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

2) если $-1 \leq k \leq 1$, то минимум равен

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2}d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2}c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus \\ \oplus ag^{k-1} \oplus bf^{-(k-1)} \oplus cg^{-(k+1)} \oplus df^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1}c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha} ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1}d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

где α – любое число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Также в диссертационной работе рассмотрено решение оптимизационной задачи с двумя переменными и ограничениями в виде двойных неравенств.

Для заданных чисел $a, b, c, d, f, p, g, q \in \mathbb{X}$ требуется найти ненулевые решения $t, s \in \mathbb{X}$ задачи

$$\min_{t, s \in \mathbb{X}} at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts, \\ f \leq t \leq g, \quad p \leq s \leq q. \quad (3)$$

Результат решения задачи может быть представлен в виде теоремы 3.

Теорема 3. Введем обозначения

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \quad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp, \quad w = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}.$$

Тогда минимум в задаче (3) равен

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus w$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (\mu^{-1}u \oplus f)^{1-\alpha} (\mu^{-1}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \\ s = (\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p)^{1-\alpha} (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-\alpha},$$

где α – вещественное число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

В заключении третьей главы рассмотрена оптимизационная задача с тремя переменными без ограничений на допустимую область размещения. Пусть заданы числа $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{X}$. Требуется найти ненулевые решения $u, v, w \in \mathbb{X}$ задачи поиска минимума функции

$$au^{-1}v^{-1}w^{-1} \oplus bu^{-1}v^{-1}w \oplus cu^{-1}vw^{-1} \oplus du^{-1}vw \oplus \\ \oplus euv^{-1}w^{-1} \oplus fuv^{-1}w \oplus guvw^{-1} \oplus huvw. \quad (4)$$

Результат, сформулированный в диссертационной работе, предложен в Теореме 4.

Теорема 4. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
a_1 &= a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, & b_1 &= a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2}, & c_1 &= e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2}, \\
d_1 &= c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, & e_1 &= a^{1/2}b^{1/2}, & f_1 &= c^{1/2}d^{1/2}, & g_1 &= e^{1/2}f^{1/2}, \\
h_1 &= g^{1/2}h^{1/2}, & k_1 &= a^{1/2}h^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2}, \\
a_2 &= b_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}e_1^{1/2}, & b_2 &= b_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}g_1^{1/2}, & c_2 &= e_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus a_1, \\
d_2 &= g_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus c_1, & e_2 &= b_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus f_1^{1/2}g_1^{1/2} \oplus e_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus k_1.
\end{aligned}$$

Тогда минимум в задаче (4) равен

$$\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3}d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3}c_2^{1/3} \oplus c_2^{1/2}d_2^{1/2} \oplus e_2$$

и справедливы следующие утверждения:

1) если $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2}$, то $u = a_2b_2^{-1}$,

$$\begin{aligned}
v &= \begin{cases} b_1^{3/4}f_1^{-1/4}b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-3/4}e_1^{1/4}b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \end{cases} \\
w &= (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\alpha} \otimes \\
&\quad \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\alpha};
\end{aligned}$$

2) если $\mu = a_2^{2/3}d_2^{1/3}$, то $u = a_2^{2/3}d_2^{-2/3}$,

$$\begin{aligned}
v &= \begin{cases} b_1^{2/3}f_1^{-1/3}d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}e_1^{1/3}d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \end{cases} \\
w &= (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\alpha} \otimes \\
&\quad \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\alpha};
\end{aligned}$$

3) если $\mu = b_2^{2/3}c_2^{1/3}$, то $u = b_2^{-2/3}c_2^{2/3}$,

$$\begin{aligned}
v &= \begin{cases} b_1^{2/3}h_1^{-1/3}c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}g_1^{1/3}c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2}g_1^{1/2}, \end{cases} \\
w &= (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\alpha} \otimes \\
&\quad \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\alpha};
\end{aligned}$$

4) если $\mu = c_2^{1/2}d_2^{1/2}$, то $u = c_2^{1/2}d_2^{-1/2}$,

$$\begin{aligned}
v &= \begin{cases} e_1^{1/2}f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ g_1^{1/2}h_1^{-1/2}, & \text{если } d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}b_1 \oplus a_1^{-1}e_1 \oplus c_1^{-1}g_1)^{1-\alpha} \otimes \\ \otimes (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}d_1 \oplus a_1^{-1}f_1 \oplus c_1^{-1}h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1, \end{cases} \\
w &= (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\beta} \otimes \\
&\quad \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\beta};
\end{aligned}$$

5) если $\mu = e_2$, то $u = (a_2^2 e_2^{-2} \oplus c_2 e_2^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 e_2^{-2} \oplus d_2 e_2^{-1})^{-\alpha}$,

$$v = \begin{cases} b_1^{1/2} d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2} d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2} g_1^{1/2} u, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2} g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2} h_1^{-1/2} u^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2} h_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\beta} \otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\beta};$$

6) если $\mu = k_1$, то $u = (a_2^2 k_1^{-2} \oplus c_2 k_1^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 k_1^{-2} \oplus d_2 k_1^{-1})^{-\alpha}$,

$$v = (b_1 k_1^{-1} \oplus k_1^{-1} e_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} g_1 u)^{1-\beta} (k_1^{-1} d_1 \oplus k_1^{-1} f_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} h_1 u)^{-\beta},$$

$$w = \begin{cases} a^{1/2} h^{-1/2} u^{-1} v^{-1}, & \text{если } k_1 = a^{1/2} h^{1/2}, \\ c^{1/2} f^{-1/2} u^{-1} v, & \text{если } k_1 = c^{1/2} f^{1/2}, \\ d^{-1/2} e^{1/2} u v^{-1}, & \text{если } k_1 = d^{1/2} e^{1/2}, \\ b^{-1/2} g^{1/2} u v, & \text{если } k_1 = b^{1/2} g^{1/2}, \end{cases}$$

где α, β – вещественные числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$.

В **третьей главе** предложены приложения теорем, сформулированных и доказанных во второй главе диссертационной работы, к исследованию реальных ситуаций оптимизации структурного построения информационных систем. Рассмотрены задачи размещения на плоскости с прямоугольной метрикой точечного объекта без ограничений на область размещения, с ограничениями в виде прямой линии, отрезка прямой, полосы и прямоугольника. Завершается глава постановкой и решением задачи размещения в трехмерном пространстве.

Рассматривается задача, появляющаяся при размещении аппаратного комплекса обработки интернет-трафика (центрального сервера управления сетью локальных коммуникаций), в условиях городской инфраструктуры (рис. 1).

Пусть необходимо собирать, обрабатывать и хранить информацию, поступающую от m клиентов локальной сети. Координаты этих клиентов задаются векторами $\mathbf{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$, где $i = 1, \dots, m$. Задача размещения состоит в том, чтобы найти оптимальное местоположение центрального сервера, которое задано неизвестным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$. При этом, необходимо минимизировать расстояние от этого центра до самого дальнего клиента. Основная задача состоит в снижении величины затухания сигнала, которое прямо пропорционально зависит от расстояния (длины кабеля), что и оправдывает минимаксную постановку задачи.

В силу того, что прокладка оптоволоконных и проводных сетей осуществляется вдоль уличной сети, для описания и решения задач оптимального размещения использована прямоугольная метрика.

Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 имеются два вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$. Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по формуле

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|.$$

Тогда задача 1-центра для сети локальных коммуникаций состоит в поиске минимума функции

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} (\rho(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}) + w_i) = \max_{1 \leq i \leq m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + w_i),$$

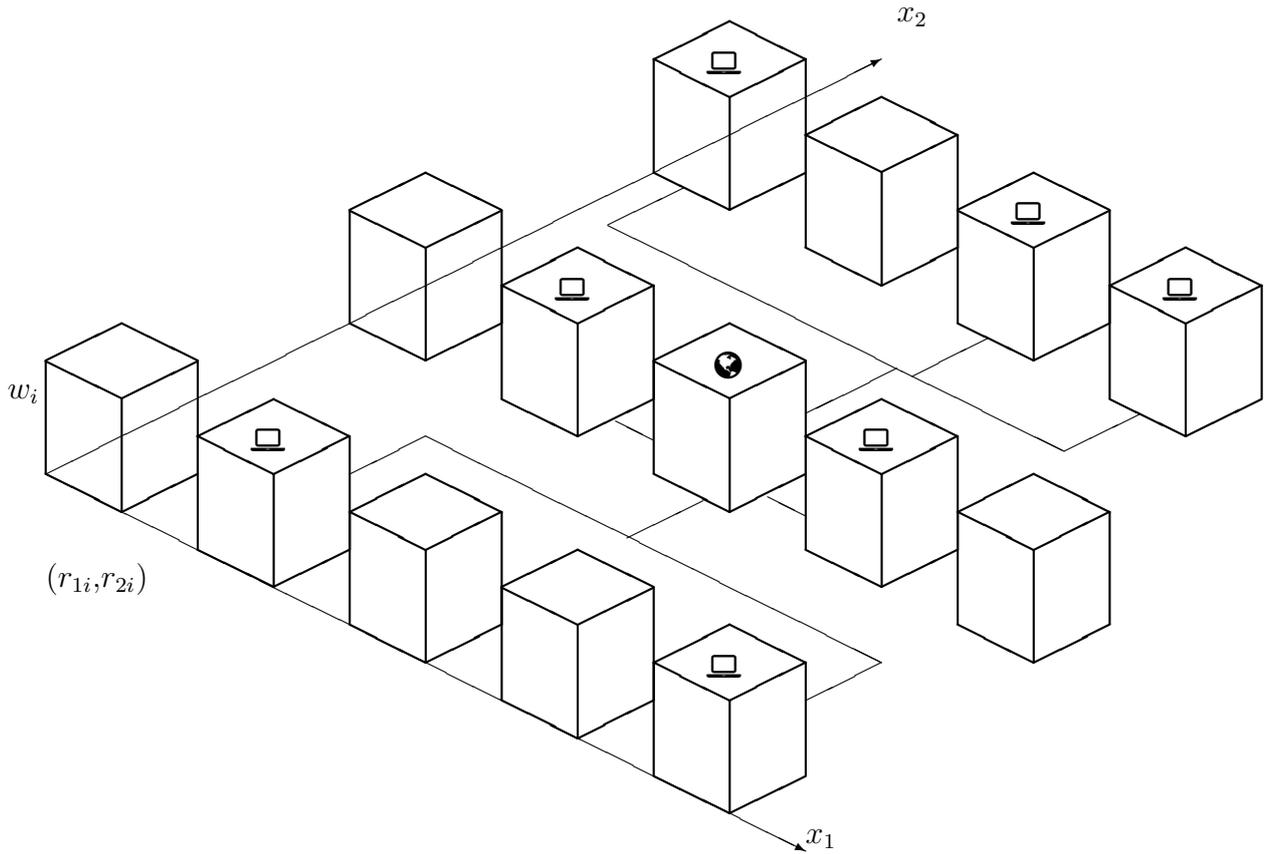


Рисунок 1 - Размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций

которая определяет максимальное по всем i расстояние в прямоугольной метрике от центра управления системой (сервера) \mathbf{x} до клиентов \mathbf{r}_i с учетом дополнительного слагаемого w_i . Числа w_i могут отражать дополнительные затраты, связанные, например, с важностью объектов или с особенностями их внутренней планировки. В данной постановке задачи, эти числа могут иметь смысл высоты (вертикальной координаты) объекта.

В общем виде задачи размещения центра управления (сервера) локальной сетью принимает следующий вид:

$$\mu = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{x}).$$

В третьей главе диссертационной работы показано, что рассмотренная оптимизационная задача может быть записана в терминах идемпотентной алгебры. Все решения задачи без ограничений представлены в виде следствий к теореме 1, с ограничениями на область размещения в виде отрезка произвольной прямой в виде следствия к теореме 2, с ограничениями в виде прямоугольника со сторонами параллельными выбранным координатным осям в виде следствия к теореме 3.

Также в диссертационной работе изучается задача размещения центра управления системой видеонаблюдения в здании. Необходимо собирать, обрабатывать и хранить информацию от m видеокамер внутреннего и наружного наблюдения (рис. 2).

Координаты объектов задаются векторами $\mathbf{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i})^T \in \mathbb{R}^3$, где $i = 1, \dots, m$. Задача размещения состоит в том, чтобы найти оптимальное положение центра управления, хранения и обработки информации, заданное вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

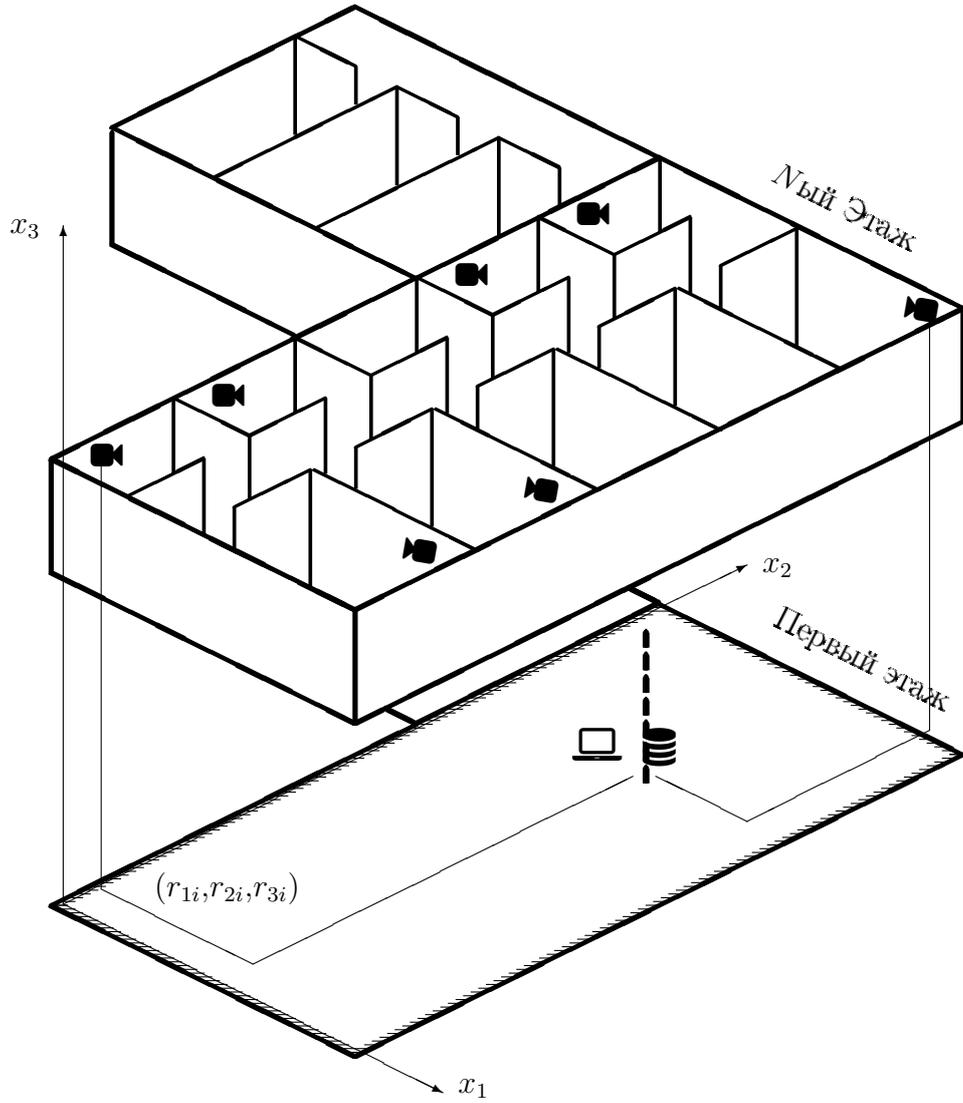


Рисунок 2 - Размещения центра управления системой видеонаблюдения в здании.

Необходимо решить задачу минимизации расстояния от этого центра до наиболее удаленной камеры. При этом преследуется цель, состоящая в повышении качества информационного обмена за счет снижения уровня затухания сигнала, которое находится в прямой пропорциональной зависимости от длины кабеля (расстояния). Указанные моменты оправдывают минимаксную постановку задачи.

Пусть в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 имеются два вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$. Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по формуле

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + |u_3 - v_3|.$$

Тогда задача 1-центра для системы видеокамер состоит в поиски минимума функции

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} (\rho(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}) + w_i) = \max_{1 \leq i \leq m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + |r_{3i} - x_3| + w_i),$$

которая определяет максимальное по всем i расстояние в прямоугольной метрике от центра управления системой (сервера) видеонаблюдения \mathbf{x} до видеокамер \mathbf{r}_i с учетом дополнительного слагаемого w_i . Числа w_i могут отражать дополнительные затраты, связанные с важностью объекта.

В общем виде задача размещения центра управления системой видеонаблюдения принимает следующий вид:

$$\mu = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}).$$

Все решения такой задачи оптимизации представлены в виде следствия к теореме 4.

В **заключении** по **итогам** выполненного диссертационного исследования сделан главный вывод, что его цель, состоявшая в разработке новых математических методов решения минимаксных задач размещения точечных объектов на плоскости с прямоугольной метрикой на основе применения методов идемпотентной алгебры и программно-алгоритмического обеспечения для их реализации при проектировании комплексов аппаратных средств автоматизации информационных процессов, – достигнута. Все поставленные научные задачи решены в полном объеме.

Основные **результаты** работы заключаются в следующем:

- разработаны методы решения задач оптимизации функций на идемпотентных полуполях с несколькими переменными на основе решения расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы;
- разработаны методы решения задач оптимизации функций на идемпотентных полуполях с несколькими переменными с помощью сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств и последующего нахождения всех ее решений;
- исследованы минимаксные задачи размещения с прямоугольной метрикой на плоскости и в трехмерном пространстве с ограничениями и без ограничений, включая представление этих задач в виде задач оптимизации в терминах тропической алгебры, построены прямые решения таких задач в явном виде и проведена оценка вычислительной сложности соответствующих алгоритмов;
- предложены рекомендации по применению разработанных методов для решения задач оптимального размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимального размещения центра управления системой видеонаблюдения;
- на основе полученных результатов разработаны программные средства для решения задач размещения и их практического применения для решения прикладных задач.

В качестве **рекомендаций** в диссертационной работе приводятся следующие положения:

- разработанные методы рекомендуются к применению в области оптимизации информационных систем, связанных с проектированием процессов создания, накопления и обработки информации, исследованием принципов создания и функционирования аппаратных средств автоматизации, моделированием информационных потребностей коллективных и индивидуальных пользователей и способов их удовлетворения, разработкой и анализом моделей информационных процессов и структур и др.;
- также, на основе разработанных программных средств, реализующих новые методы решения задач оптимизации, могут быть разработаны программные изделия для использования при проектировании создания и развития комплексов средств автоматизации и информационно-коммуникационных систем.

Обозначены **перспективы дальнейшей разработки темы**

- в диссертационной работе предложен подход к решению оптимизационной задачи размещения в 3-х мерном пространстве в общем виде без ограничений на допустимую

область размещения 1-центра. Перспективным направлением исследований является детальное изучение методов ее решения применительно к различным типовым ограничениям, также рассмотренным в диссертации, но применительно к двумерной постановке задачи;

- разработка методов решения оптимизационной задачи размещения со сложными системами ограничений нелинейного характера;
- постановка исследовательской задачи динамической оптимизации размещения 1-центра в условиях изменения системы ограничений и локализации исходного набора обслуживаемых объектов, а также поиск итерационных и аналитических процедур ее решения;
- формализация типовых задач проектирования и развития комплексов средств автоматизации и информационно-коммуникационных систем в целях применения для их совершенствования разработанных математических методов;
- разработка методов решения минимаксных задач размещения k -центра (размещение нескольких объектов).

В **приложении** представлен компьютерный код алгоритмов вычисления координат оптимальной области размещения для задачи размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой без ограничений и с ограничениями на допустимую область размещения, имеющих линейную сложность, на основе прямых формульных зависимостей, полученных в диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации из “Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук”, сформированного согласно требованиям, установленным Министерством образования и науки Российской Федерации

1. *Кривулин, Н.К.* Об алгебраическом решении задачи Ролса о размещении на плоскости с прямоугольной метрикой / Н.К. Кривулин, П.В. Плотников // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2015. Т. 2, № 2. С. 194–201.
2. *Кривулин, Н.К.* Использование тропической оптимизации для решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на прямой / Н.К. Кривулин, П.В. Плотников // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2016. Т. 3, № 4. С. 602–614.
3. *Плотников, П.В.* Подход к оптимизации структуры информационной системы / П.В. Плотников // *Экономика и управление.* 2018. № 2(148). С. 92–95.

Публикации в изданиях, входящих в базы цитирования Web of Science и SCOPUS

4. *Krivulin, N. K. On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric / N. K. Krivulin, P. V. Plotnikov // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2015. Vol. 48, № 2. P. 75–81.*
5. *Krivulin, N. K. Using tropical optimization to solve minimax location problems with a rectilinear metric on the line / N. K. Krivulin, P. V. Plotnikov // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2016. Vol. 49, № 4. P. 340–349.*

Публикации по теме диссертации в других изданиях

6. *Плотников, П.В. Теоретические подходы к моделированию экономических явлений и процессов / П.В. Плотников // Актуальные вопросы развития современного общества. Сборник материалов 4-й Международной научно-практической конференции. 18 апреля 2014 г. / Отв. ред. Ю. В. Вертакова. Курск: ЮЗГУ, 2014. С. 297–301.*
7. *Плотников, П.В. Вопросы моделирования распределенных экономических систем / П.В. Плотников // Тренды развития современного общества: управленческие, правовые, экономические и социальные аспекты. Сборник материалов 4-й Международной научно-практической конференции. 17-19 сентября 2014 г. / Отв. ред. А. А. Горохов. Курск: ЮЗГУ, 2014. С. 199–202.*
8. *Кривулин, Н.К. Алгебраическое решение задачи размещения Ролса на плоскости с прямоугольной метрикой / Н.К. Кривулин, П.В. Плотников // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления. Сб. науч. статей. Вып. 2 / Под ред. Н. К. Кривулина. СПб.: ВВМ, 2014. С. 79–98.*
9. *Кривулин, Н.К. О решении задачи размещения Ролса на плоскости с ограничениями / Н.К. Кривулин, П.В. Плотников // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. 30-31 марта 2016 г. / Отв. ред. Ю. С. Нагорнов. Тольятти: Зебра, 2016. С. 18–22.*
10. *Кривулин, Н.К. Исследование задачи размещения Ролса с прямоугольной метрикой на отрезке прямой / Н.К. Кривулин, П.В. Плотников // Материалы 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017. 26–28 апреля 2017 г. Санкт-Петербург. СПб.: ВВМ, 2017. С. 522–528.*

Подписано в печать 06.04.2018 г Тираж 100 экз.	Формат 60x84 ¹ / ₁₆ Заказ № 06/04	Цифровая печать	Печ.л. 1.0
---	--	--------------------	------------

Типография «Фалкон Принт»
(197101, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Пушкарская, д. 41, литер Б,
сайт: falconprint.ru)

