

На правах рукописи

Ямалова Диана Рамилевна

**Исследование наблюдателей состояния
импульсных систем**

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и
математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Чурилов Александр Николаевич

Официальные оппоненты: **Яковис Леонид Моисеевич**,
доктор технических наук, старший научный сотрудник,
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого»,
профессор кафедры механики и процессов управления
Утина Наталья Валерьевна,
кандидат физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»,
доцент кафедры математики

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

Защита состоится 20 декабря 2017 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д.33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/form/14/1488.html>

Автореферат разослан “___” _____ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29,
доктор физ.-мат. наук, профессор



В. М. Нежинский

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Импульсные системы получили широкое распространение во многом благодаря развитию технических устройств различного назначения, работа которых связана с передачей и преобразованием последовательности импульсов. В таких системах импульсный режим работы, как правило, обусловлен назначением самого устройства. Также импульсные модели широко распространены и в других прикладных областях: физике, химии, экономике, биологии и медицине — там, где они естественно описывают процессы, состояния которых изменяются скачком. Важное биомедицинское применение импульсные системы получили в нейроэндокринологии, изучающей взаимодействие центральной нервной и эндокринной систем. Это взаимодействие контролируется отделом головного мозга — гипоталамусом, в котором происходит секреция нейрогормонов. Кровь, содержащая гормоны, проходя через цепочку эндокринных желез, возвращается в головной мозг, тем самым формируя обратные связи. При этом некоторые из эндокринных желез секретируют гормоны непрерывно, в то время как для гипоталамических нейрогормонов характерна импульсная секреция с коротким периодом полураспада. Непосредственное измерение концентрации и частоты секреции гормонов гипоталамуса невозможно без причинения существенного вреда головному мозгу. Таким образом, возникает **важная практическая задача**: оценить концентрации гормонов гипоталамуса на основе измеряемых концентраций других гормонов.

В общем случае, динамика импульсных систем (систем с импульсным воздействием) является гибридной, т. е. содержит непрерывную и дискретную динамику. Непрерывная динамика задается с помощью дифференциальных или интегральных уравнений, описывающих поведение динамической системы в промежутках между скачками. Дискретная динамика описывается функциональными уравнениями, которые определяют мгновенное изменение состояния и моменты возникновения импульсов. Таким образом, с точки зрения математической классификации, импульсные системы можно отнести к функционально-дифференциальным или функционально-интегральным уравнениям. В данной диссертации рассматривается импульсная система, в которой расстояние между импульсами не постоянно, а определяется из некоторых функциональных соотношений. Положение каждого следующего импульса вычисляется в зависимости от значения некоторого сигнала (называемого модулирующим) в момент возникновения предыдущего импульса. Такой принцип формирования моментов импульсации иногда называют импульсной модуляцией первого рода (в англоязычной терминологии — type 1 modulation или self-triggered control).

Общее поведение нейроэндокринной системы с обратной связью при ряде упрощающих предположений может быть описано с помощью импульсной модели с импульсной модуляцией по частоте и амплитуде. Из-за невозможности измерения концентраций всех гормонов, участвующих в цепочке регуляции, возникает задача оценивания состояния импульсной системы, которая имеет ряд особенностей. Во-первых, импульсный характер обратной связи приводит к возникновению скачков в состоянии системы. Во-вторых, измерения в дискретной части замкнутой гибридной системы недоступны и, следовательно, должны быть восстановлены по измеряемым непрерывным сигналам. В-третьих, в динамике замкнутой системы присутствуют периодические, квази-периодические или хаотические колебания, причем состояния равновесия отсутствуют. Значительное число работ посвящено наблюдаемости гибридных систем, содержащих непрерывную и импульсную части, однако, все они предполагают, что моменты возникновения импульсов известны или измеряемы. Задача оценивания состояний и неизвестных моментов импульсации в простейшем случае наблюдателя с непрерывной обратной связью была рассмотрена в работах А. Н. Чурилова, А. В. Медведева, А. И. Шепелявого. Однако, переходные процессы в предложенной в этих работах системе довольно длительны и носят сильно выраженный колебательный характер.

Таким образом, задача оценивания дискретного состояния импульсной системы по измерениям непрерывного сигнала является **актуальной**. При этом требуется разработать такие схемы наблюдения, которые обеспечивают достаточно хорошее качество переходных процессов.

Целью диссертационной работы является разработка схемы наблюдателя состояния для импульсных систем, в которых дискретное состояние должно быть восстановлено по измеряемому непрерывному выходному сигналу. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**.

1. В случае наблюдателя с *пропорциональной* обратной связью в дискретной части построить точечное преобразование (оператор сдвига по траектории системы), описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режиме наблюдения периодического решения импульсной системы.
2. В случае наблюдателя с *интегральной* обратной связью и *комбинированной частотной модуляцией* в дискретной части наблюдателя построить точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической

устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения импульсной системы.

3. Для импульсной системы с запаздыванием и наблюдателя без запаздывания и с разрывной обратной связью построить точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения.
4. Для импульсной системы с запаздыванием и наблюдателя с запаздыванием построить точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения.
5. Применить полученные результаты к исследованию математической модели гормональной регуляции тестостерона в мужском организме.

Помимо описанной выше **практической значимости**, поставленные задачи имеют **теоретический интерес**: построение дискретного точечного преобразования (в теории гибридных систем оно носит название отображения Пуанкаре), описывающего эволюцию состояния наблюдателя от импульса к импульсу, и исследование его свойств само по себе является нетривиальной математической задачей.

Методы исследований. Для достижения поставленной цели использовались методы теории импульсных систем и теории управления: метод преобразования Пуанкаре для импульсных систем, методы построения наблюдателей состояния для систем управления, метод линеаризации нелинейной системы в окрестности периодического решения, методы теории устойчивости по Ляпунову (устойчивости в малом) дискретных систем, компьютерные методы математического моделирования динамических систем.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие научные результаты работы:

1. В случае наблюдателя с *пропорциональной* обратной связью в дискретной части построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения импульсной системы (теоремы 2.1–2.4) [2, 3, 7].
2. В случае наблюдателя с *интегральной* обратной связью и *комбинированной частотной модуляцией* в дискретной части наблюдателя построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от

импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения импульсной системы (теоремы 2.6–2.10) [5].

3. Для импульсной системы с запаздыванием и наблюдателя без запаздывания и с разрывной обратной связью построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения (теоремы 3.1–3.4) [4, 8].
4. Для импульсной системы с запаздыванием и наблюдателя с запаздыванием построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения (теоремы 3.5–3.9) [1, 6].

Все основные научные результаты диссертации являются **новыми** и получены автором самостоятельно.

Достоверность изложенных в работе теоретических результатов обеспечивается их строгим математическим доказательством.

Апробация результатов. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ и кафедры информационных технологий Упсальского университета (Швеция), на международных конференциях: 5th IFAC Workshop on Periodic and Control Systems, Caen, France 2013; 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Groningen, The Netherlands, 2014; 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, St. Petersburg, Russia, 2015; 2015 IEEE European Control Conference, Linz, Austria, 2015; Первая российско-немецкая молодежная школа «Математическое моделирование биосистем», Москва (МГУ), Россия, 2016; 2017 American Control Conference, Seattle, Washington, USA, 2017; 20th IFAC World Congress, Toulouse, France, 2017, на региональной конференции Reglermöte (Швеция) 2012 и 2015.

Публикации. По теме диссертации опубликовано *восемь работ* [1–8], в том числе *семь* — в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, из которых *шесть работ* в изданиях из базы цитирования Scopus.

Работы [2–8], написаны в соавторстве. В работах [2–8] Д. Р. Ямаловой принадлежат формулировки и доказательства теорем, результаты моделирования, а соавторам — постановка задачи и выбор методов решения.

Объем и структура работы. Диссертация объемом 109 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения, списка рисунков и списка литературы (112 источников).

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель и ставятся задачи работы, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, приводится краткое содержание работы по главам.

В первой главе приводятся вспомогательные сведения, относящиеся к системам с импульсами и линейным системам с запаздыванием, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

Во второй главе рассматривается задача наблюдения состояния системы со скачками (импульсами). В разделе 2.1 дается математическая постановка задачи. Рассматривается импульсная система:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x(t_n^+) &= x(t_n^-) + \lambda_n B, \quad t_{n+1} = t_n + T_n, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(t)$ — вектор состояния (1), $z(t)$ — модулирующий сигнал, который служит для формирования моментов времени t_n и величин скачков λ_n , $x(t^-)$ и $x(t^+)$ обозначают левосторонний и правосторонний пределы функции $x(\cdot)$ в точке t , $y(t)$ — измеряемая часть вектора состояния, $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$, $L \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ — постоянные матрицы.

Делаются следующие предположения:

1. Функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ (амплитудная и частотная модуляционные характеристики) являются непрерывными, строго монотонными и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 < \Phi_1 \leq \Phi(\cdot) \leq \Phi_2, \quad 0 < F_1 \leq F(\cdot) \leq F_2,$$

где Φ_1, Φ_2, F_1, F_2 — положительные константы. При этих предположениях у системы (1), (2) отсутствуют состояния равновесия.

2. Матрица A — гурвицева, т. е. все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части.
3. Пара матриц (A, L) наблюдаема, т. е. матрица

$$\begin{bmatrix} L^T & A^T L^T & (A^T)^2 L^T & \dots & (A^T)^{n_x-1} L^T \end{bmatrix}$$

имеет ранг n_x .

4. Выполнены матричные соотношения $CB = 0$, $LB = 0$, обеспечивающие непрерывность функций $z(t)$ и $y(t)$.

Требуется на основе измерения вектора $y(t)$ с помощью наблюдателя оценить вектор состояния $x(t)$. Основная задача при разработке наблюдателя для системы (1), (2) состоит в получении оценок $(\hat{t}_n, \hat{\lambda}_n)$ импульсных параметров (t_n, λ_n) . После этого, зная моменты и амплитуды импульсов, оценки вектора состояния $x(t)$ на интервалах непрерывности могут быть получены с помощью стандартной техники наблюдения. Таким образом, главной целью наблюдения является обеспечение асимптотической сходимости последовательности $\{\hat{t}_n\}$ к $\{t_n\}$, т. е. синхронизации моментов импульсации наблюдателя и системы.

В разделе 2.2 для оценивания вектора состояния системы (1), (2) рассматривается следующий наблюдатель с пропорциональной обратной связью в дискретной части:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), & \hat{y}(t) &= L\hat{x}(t), \\ \hat{z}(t) &= C\hat{x}(t), & \hat{x}(t_n^+) &= \hat{x}(t_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \hat{T}_n, & \hat{\lambda}_n &= F(\hat{z}(\hat{t}_n)),\end{aligned}\tag{3}$$

и

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n) + K_d(y(\hat{t}_n) - \hat{y}(\hat{t}_n))),\tag{4}$$

где K — матрица коэффициентов усиления в непрерывной части наблюдателя, обеспечивающая гурвицевость матрицы $D = A - KL$, $K_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_y}$ — матрица коэффициентов усиления в дискретной части наблюдателя.

Случай $K_d = 0$ был рассмотрен ранее, в работах А. Н. Чурилова и соавторов. Основным недостатком такого наблюдателя является его медленная сходимость, поскольку коррекции производятся только в непрерывной части. В то же время, с помощью двух матриц коэффициентов усиления K и K_d в двух контурах обратной связи удастся существенно сократить время переходных процессов.

Пусть $(x(t), t_n)$ — решение системы (1), (2) с параметрами λ_k, T_k и $x(t_k^-)$. Считается, что наблюдаемый объект уже функционирует в момент включения наблюдателя, т. е. $t_a \leq \hat{t}_0 < t_{a+1}$ для некоторого целого $a \geq 0$. Вводятся следующие обозначения: $x_k = x(t_k^-)$, $\hat{x}_k = \hat{x}(\hat{t}_k^-)$. Для решения $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ уравнения наблюдателя (3), (4) с начальными условиями $\hat{t}_0 = t_a$, $\hat{x}(\hat{t}_0^-) = x(t_a^-)$ справедливы равенства $\hat{x}_n = x_{n+a}$, $\hat{t}_n = t_{n+a}$, $\hat{\lambda}_n = \lambda_{n+a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и $\hat{x}(t) = x(t)$ для всех $t \geq t_a$. Такое решение $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ называется *синхронным режимом* наблюдателя по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

Синхронный режим $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ по отношению к $(x(t), t_n)$ называется *асимптотически устойчивым в малом*, если при достаточно малых отклонениях начальных значений $|\hat{t}_0 - t_a|$ и $\|\hat{x}_0 - x_0\|$ уравнений системы и наблюдателя

(где $\|\cdot\|$ — евклидова норма), выполняются соотношения $|\hat{t}_n - t_{n+a}| \rightarrow 0$ и $\|\hat{x}(\hat{t}_n^-) - x(t_{n+a}^-)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что влечет также выполнение предельных соотношений $|\hat{\lambda}_n - \lambda_{n+a}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Вводится обозначение $n_a = n + a$. Тогда синхронный режим наблюдателя по отношению к решению системы $(x(t), t_n)$ характеризуется векторной последовательностью

$$\hat{q}_n^a = \begin{bmatrix} x_{n_a} \\ t_{n_a} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Поскольку основной задачей наблюдения является синхронизация дискретных последовательностей состояний наблюдателя и системы, то описание динамики системы объект—наблюдатель может быть сведено к дискретному (разностному) уравнению. Для этого строится точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя для фиксированного решения $(x(t), t_n)$ системы (1), (2) :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Вводятся обозначения $R = C - K_d L$, $\alpha(\zeta, \theta) = R\zeta + K_d L \lim_{\delta \rightarrow \theta-0} x(\delta)$. Для любых целых чисел k и s , $0 \leq k \leq s$, определяются множества

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, t_k \leq \theta < t_{k+1}, t_s \leq \theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) < t_{s+1}\}.$$

Следовательно, каждая точка (\hat{x}_n, \hat{t}_n) расширенного состояния наблюдателя принадлежит одному из множеств $S_{k,s}$, т. е. каждой точке (\hat{x}_n, \hat{t}_n) можно однозначно сопоставить две точки (x_k, t_k) и (x_s, t_s) состояний объекта наблюдения (в случае, если $k = s$, эти точки совпадают) такие, что $t_k \leq \hat{t}_n < t_k + \Phi(Cx_k)$, $t_s \leq \hat{t}_n + \Phi(\alpha(\hat{x}_n, \hat{t}_n)) < t_s + \Phi(Cx_s)$.

Определяется функция $P(\zeta, \theta)$ по формуле $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ при $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$, где

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = e^{A(\theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) - t_s)} x(t_s^+) - e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} \left[e^{A(\theta - t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B \right] - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j e^{D(\theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) - t_j)} B.$$

Теорема 2.1. Точечное отображение (6) задается дискретными уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1} &= P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \Phi(\alpha(\hat{x}_n, \hat{t}_n)). \end{aligned}$$

Теорема 2.2. Если функции $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ имеют непрерывные производные, то отображение $P(\zeta, \theta)$ и его частные производные

$$P'_\zeta = \frac{\partial P}{\partial \zeta}, \quad P'_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

непрерывны.

Оператор, осуществляющий отображение (6), обозначается через

$$Q(q) = \begin{bmatrix} P(\zeta, \theta) \\ \theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad q = \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Тогда из Теоремы 2.1 следует, что

$$\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n).$$

Под m -ой итерацией оператора Q понимается суперпозиция операторов

$$Q^{(m)}(q) = \underbrace{Q(Q(\dots(Q(q))\dots))}_m.$$

Поскольку отображение $P(\zeta, \theta)$ является гладким, то и $Q(q)$ также является гладким, и, следовательно, может быть линеаризовано в окрестности точек синхронного режима. Согласно определению, P'_ζ — матрица с размерностью $n_x \times n_x$, и P'_θ — n_x -мерный столбец. Тогда матрица Якоби $Q(q)$ имеет вид

$$Q'(q) = \begin{bmatrix} P'_\zeta(\zeta, \theta) & P'_\theta(\zeta, \theta) \\ \Phi'(\alpha(\zeta, \theta))R & 1 + \Phi'(\alpha(\zeta, \theta))K_d L A x(\theta) \end{bmatrix}.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции, матрица Якоби суперпозиции $Q^{(m)}(q)$ вычисляется следующим образом:

$$\left(Q^{(m)}\right)'(q) = \prod_{k=0}^{m-1} Q'\left(Q^{(m-1-k)}(q)\right). \quad (7)$$

Так как для синхронного режима выполнено $\hat{x}_n = x_{n_a}$, $\hat{t}_n = t_{n_a}$ и $\hat{t}_{n+1} = t_{n_a+1}$, $\hat{x}_{n+1} = x_{n_a+1}$, то $\hat{x}_{n+1} = P_{n_a, n_a+1}(\hat{x}_n, \hat{t}_n)$ для всех $n \geq 0$. При этом выполнено равенство $\Phi(\alpha(x_k, t_k)) = \Phi(Cx_k)$. Вводятся обозначения $\Phi'_k = \Phi'(Cx_k)$, $F'_k = F'(Cx_k)$. Для всех $k \geq 0$ определяется матрица J_k с блоками

$$\begin{aligned} (J_k)_{11} &= \Phi'_k A x_{k+1} R + e^{D\Phi(Cx_k)} (I_{n_x} + F'_k B C), \\ (J_k)_{12} &= A x_{k+1} (1 + \Phi'_k K_d A x_k) - e^{D\Phi(Cx_k)} (A(x_k + \lambda_k B)), \\ (J_k)_{21} &= \Phi'_k R, \quad (J_k)_{22} = 1 + \Phi'_k K_d A x_k. \end{aligned}$$

Теорема 2.3. Для любого $n \geq 0$ матрица Якоби оператора $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_n^a может быть вычислена как

$$Q'(\hat{q}_n^a) = J_{n_a}.$$

Из теоремы 2.3 и формулы (7) следует, что для любого $m \geq 1$ матрица Якоби может быть вычислена как

$$\left(Q^{(m)}\right)'(\hat{q}_n^0) = J_{n_a+m-1}J_{n_a+m-2}\cdots J_{n_a+1}J_{n_a}.$$

Пусть $(x(t), t_n)$ — решение системы (1), (2) с m импульсами на периоде (m -цикл), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. Тогда $x_{n+m} \equiv x_n$, $\lambda_{n+m} \equiv \lambda_n$, $T_{n+m} \equiv T_n$. Рассматривается синхронный режим наблюдателя по отношению к $(x(t), t_n)$. Пусть \hat{q}_n^a — соответствующая последовательность векторов (5), удовлетворяющая $\hat{q}_{n+1}^a = Q(\hat{q}_n^a)$. Так как $J_{n+m} \equiv J_n$, то последовательность $\{J_n\}_{n=0}^\infty$ содержит не более чем m различных матриц, а именно J_0, \dots, J_{m-1} . Получено следующее условие устойчивости в малом синхронного режима.

Теорема 2.4. Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные значения этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим по отношению к $(x(t), t_n)$ асимптотически устойчив в малом.

В следующей теореме приводятся достаточные условия существования постоянной матрицы коэффициентов K , обеспечивающей устойчивость синхронного режима в малом, при фиксированной матрице коэффициентов K_d .

Теорема 2.5. Пусть $(x(t), t_n)$ — m -цикл. Предположим, что выполнено неравенство $-1 < \prod_{k=0}^{m-1} (\Phi'_k C A x_k + 1) < 1$. Тогда существует матрица K такая, что $D = A - KL$ гурвицева, и матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру.

Поскольку в большинстве практических случаев модуляционная функция $\Phi(\cdot)$ обладает насыщением, для больших значений аргумента влияние обратной связи в (4) нивелируется. В связи с этим, в разделе 2.3 рассматривается ранее введенный наблюдатель (3) с более сложным законом модуляции (называемым комбинированной частотной модуляцией):

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)) + \Psi(R(\hat{t}_n, E_d(\cdot))), \quad (8)$$

где $R(t, f(\cdot)) = \int_{t-\nu}^t e^{-\varkappa(t-\eta)} f(\eta) d\eta$, а \varkappa, ν — некоторые положительные параметры, $\nu \leq \Phi_1$, и $E_d(t) = K_d(y(t) - \hat{y}(t))$. При этом функция $\Psi(\cdot)$ является непрерывной, нечетной, строго возрастающей и ограниченной по модулю значением нижней границы модуляционной функции $\Phi(\cdot)$:

$$|\Psi(\cdot)| < \Phi_1. \quad (9)$$

Неравенство (9) гарантирует выполнение условия $\hat{T}_n > 0$ в (8).

Пусть $(x(t), t_n)$ — решение системы (1), (2) с параметрами $\lambda_k, T_k, x_k = x(t_k^-)$, и выполнено $t_a \leq \hat{t}_0 < t_{a+1}$ для некоторого целого числа $a \geq 1$. Легко видеть, что если $\hat{t}_n = t_{n+a}$, $\hat{x}(\hat{t}_n^-) = x_{n+a}$, и $\hat{x}(\theta) = x(\theta)$ для $\theta \in [\hat{t}_n - \nu, \hat{t}_n]$, то $\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)) + \Psi(0) = T_{n+a}$, так как $\Psi(0) = 0$ (функция $\Psi(\cdot)$ — нечетная). Следовательно, синхронный режим наблюдателя (3), (8) по отношению к решению $(x(t), t_n)$ существует. Как и ранее, требуется найти условия асимптотической устойчивости в малом синхронного режима. Рассматривается точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя (3), (8) при фиксированном решении $(x(t), t_n)$ системы (1), (2):

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Рассматриваются следующие множества:

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : t_k \leq \theta < t_{k+1}, \quad t_s \leq \theta + \alpha_k(\zeta, \theta) < t_{s+1}\},$$

где $\beta_k(\zeta, \theta, \eta) = K_d L e^{D(\eta-\theta)} (e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \zeta) + G_k(\eta)$, $\alpha_k(\zeta, \theta) = \Phi(C\zeta) + \Psi(R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot)))$,

$$G_k(\eta) = \begin{cases} -\lambda_k K_d L e^{D(\eta-t_k)} B & \text{если } \eta \leq t_k, \\ 0 & \text{если } \eta > t_k. \end{cases}$$

Вводятся функции $\alpha(\zeta, \theta) = \alpha_k(\zeta, \theta)$ и $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ для $(\zeta, \eta) \in S_{k,s}$, где

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = e^{A(\theta+\alpha_k(\zeta,\theta)-t_s)} x(t_s^+) - e^{D\alpha_k(\zeta,\theta)} \left[e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B \right] - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j e^{D(\theta+\alpha_k(\zeta,\theta)-t_j)} B.$$

Теорема 2.6. Точечное отображение (10) определяется дискретными уравнениями

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \alpha(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \text{для } n \geq 1.$$

Теорема 2.7. Отображения $\alpha(\zeta, \theta)$ и $P(\zeta, \theta)$ непрерывны.

Теорема 2.8. Если скалярные функции $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ имеют непрерывные производные, то частные производные

$$\alpha'_\zeta(\zeta, \theta) = \frac{\partial \alpha(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}, \quad \alpha'_\theta(\zeta, \theta) = \frac{\partial \alpha(\zeta, \theta)}{\partial \theta}, \\ P'_\zeta(\zeta, \theta) = \frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}, \quad P'_\theta(\zeta, \theta) = \frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$$

непрерывны всюду.

Как и ранее, вводится расширенное преобразование $Q(\cdot)$ для которого $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$. Из теорем 2.7 и 2.8 следует, что функция $Q(\cdot)$ может быть линеаризована в окрестности точек синхронного режима. Для всех $k \geq 1$ определяются квадратные матрицы J_k , содержащие следующие матричные блоки:

$$\begin{aligned}(J_k)_{11} &= Ax_{k+1} (\Phi'_k C + \Psi'(0) K_d L D_{\mathcal{Z}}^{-1} e^{-D_{\mathcal{Z}} \nu}) + e^{D\Phi(Cx_k)} (I_{n_x} + F'_k B C), \\(J_k)_{12} &= (1 - \Psi'(0) K_d L D_{\mathcal{Z}}^{-1} e^{-D_{\mathcal{Z}} \nu} Ax_k) Ax_{k+1} - e^{D\Phi(Cx_k)} A(x_k + F(Cx_k) B), \\(J_k)_{21} &= \Phi'_k C + \Psi'(0) K_d L D_{\mathcal{Z}}^{-1} e^{-D_{\mathcal{Z}} \nu}, \\(J_k)_{22} &= 1 - \Psi'(0) K_d L D_{\mathcal{Z}}^{-1} e^{-D_{\mathcal{Z}} \nu} Ax_k.\end{aligned}$$

Теорема 2.9. Для всех $n \geq 1$, матрица Якоби $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_n^a вычисляется следующим образом: $Q'(\hat{q}_n^a) = J_{n_a}$.

Пусть $(x(t), t_n)$ — m -цикл системы (1), (2), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. Получено следующее условие устойчивости в малом синхронного режима наблюдателя (3), (8) по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

Теорема 2.10. Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные числа матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим асимптотически устойчив в малом по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

В третьей главе рассматривается задача наблюдения для импульсной системы вида (1), (2), в непрерывной части которой присутствует постоянное запаздывание:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= A_0 \tilde{x}(t) + A_1 \tilde{x}(t - \tau), \quad \tilde{z}(t) = C\tilde{x}(t), \quad \tilde{y}(t) = L\tilde{x}(t), \\ \tilde{t}_0 &= 0, \quad \tilde{t}_{n+1} = \tilde{t}_n + \tilde{T}_n, \quad \tilde{x}(\tilde{t}_n^+) = \tilde{x}(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n \tilde{B}, \\ \tilde{T}_n &= \Phi(\tilde{z}(\tilde{t}_n)), \quad \tilde{\lambda}_n = F(\tilde{z}(\tilde{t}_n)),\end{aligned}\tag{11}$$

где $\tilde{x}(t)$ — вектор состояния, $\tilde{y}(t)$ — измеряемая часть вектора состояния, $\tilde{z}(t)$ — модулирующий сигнал, τ — постоянное запаздывание, $A_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$, $L \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ — постоянные матрицы, такие, что $C\tilde{B} = 0$, $L\tilde{B} = 0$.

Предполагается, что система (11) рассматривается при $t \geq t_0$ с начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \leq t < t_0$, где $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная начальная вектор-функция, и величина запаздывания строго меньше минимально возможной длины промежутка между двумя последовательными импульсами, т. е. $\tau < \inf_z \Phi(z)$. Модуляционные функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ удовлетворяют тем же условиям, что и для системы (1), (2). Также предполагается, что линейная часть системы (11) является спектрально FD-наблюдаемой, т. е. для любого набора

комплексных чисел $\Lambda = \{\mu_j, \quad j = 1, \dots, n_x\}$, в котором вместе с комплексным числом μ_j в этот набор входит и комплексно-сопряженное число $\bar{\mu}_j$ той же кратности, существует вещественная матрица K такая, что спектр матрицы $A_0 - KL$ совпадает с Λ , и, кроме того,

$$A_1(A_0 - KL)^k A_1 = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, n_x - 1. \quad (12)$$

Как и в случае объекта наблюдения без запаздывания, основная задача наблюдения для гибридной системы (11) состоит в оценивании последовательностей модулированных параметров (t_n, λ_n) .

В разделе 3.2 предлагается наблюдатель без запаздывания с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов усиления. Поскольку линейная часть системы (11) является спектрально FD-наблюдаемой, при $t \geq t_0 + \tau$ отвечающая ей линейная система с запаздыванием эквивалентна линейной системе без запаздывания с матрицей $A = A_0 + A_1 e^{-A_0 \tau}$. В результате вместо системы с запаздыванием (11) рассматривается следующая система без запаздывания:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \\ t_{n+1} &= t_n + T_n, \quad x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $B = e^{-A\tau} e^{A_0\tau} \tilde{B}$. На промежутках вида $t_n + \tau \leq t \leq t_{n+1}$ система с запаздыванием (11) совпадает с решением системы без запаздывания (13) при условии равенства их начальных данных. При этом моменты импульсации t_n принадлежат интервалам совпадения. Таким образом, для получения оценок $(\hat{t}_n, \hat{\lambda}_n)$ модулированных параметров $(\tilde{t}_n, \tilde{\lambda}_n)$, строится наблюдатель, основанный на аппроксимирующей модели (13) без запаздывания. Уравнения наблюдателя выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \mathcal{K}(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \quad \hat{y}(t) = L\hat{x}(t), \quad \hat{z}(t) = C\hat{x}(t), \\ \hat{x}(\hat{t}_n^+) &= \hat{x}(\hat{t}_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \hat{T}_n, \\ \hat{T}_n &= \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)), \quad \hat{\lambda}_n = F(\hat{z}(\hat{t}_n)), \\ \mathcal{K}(t) &= \begin{cases} 0, & \hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau, \\ K = \text{const}, & \hat{t}_n + \tau \leq t \leq \hat{t}_{n+1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Отмечается, что, в отличие от уравнений объекта наблюдения, элементы векторов $\hat{z}(t)$, $\hat{y}(t)$ могут иметь скачки, так как выполнение равенств $CB = 0$, $LB = 0$ из равенств $C\tilde{B} = 0$, $L\tilde{B} = 0$ не следует. По результатам моделирования коэффициент усиления обратной связи \mathcal{K} выбран нулевым на интервалах $\hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau$. На промежутках вида $\hat{t}_n + \tau \leq t \leq \hat{t}_{n+1}$ коэффициент $\mathcal{K} = K \in R^{n_x \times n_y}$ должен быть выбран так, чтобы синхронный режим наблюдателя (14) по

отношению к решению $(x(t), t_n)$ объекта (13) был асимптотически устойчив в малом.

Для того, чтобы получить условия устойчивости синхронного режима наблюдателя, строится точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя (14) от импульса к импульсу:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(t_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для всех целых k и s , $0 \leq k \leq s$, определяются множества

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad t_k \leq \theta < t_{k+1}, \quad t_s \leq \theta + \Phi(C\zeta) < t_{s+1}\}.$$

Вводятся функции $G_k(\zeta, \theta) = \begin{cases} e^{D(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1})}, & \text{при } \theta \leq t_{k+1} - \tau, \\ e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A(\theta + \tau - t_{k+1})}, & \text{при } t_{k+1} - \tau < \theta \end{cases}$,

где $D = A - KL$. Отмечается, что функции $G_k(\zeta, \theta)$ непрерывны согласно определению \mathcal{K} . Задается функция $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ для $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$, где

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = e^{A(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s)} x(t_s^+) - e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A\tau} \left(e^{A(\theta - t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B \right) - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j G_{j-1}(\zeta, \theta) B.$$

Теорема 3.1. *Точечное отображение (15) задается уравнениями*

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n).$$

Теорема 3.2. *Отображение $P(\zeta, \theta)$ непрерывно.*

Далее показывается, что отображение $P(\zeta, \theta)$ не является непрерывно дифференцируемым на всем пространстве. При этом отмечается, что можно доказать локальную дифференцируемость $P(\zeta, \theta)$ и провести линеаризацию в окрестности точек синхронного режима.

Теорема 3.3. *Пусть выполнено равенство $LB = 0$, и производные скалярных функций $F(\cdot), \Phi(\cdot)$ непрерывны. Тогда частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ непрерывны в точках (x_k, t_k) , $k \geq 1$, и могут быть найдены по формулам:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P(x_k, t_k) &= \Phi'_k A x_{k+1} C + e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} [I + F'_k B C], \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P(x_k, t_k) &= A x_{k+1} - e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} A (x_k + \lambda_k B). \end{aligned}$$

Как и ранее, вводится расширенное преобразование $Q(\cdot)$, для которого $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$, и выполняются его линеаризация в окрестности точек (x_k, t_k)

синхронного режима. Для всех $k \geq 1$ определяются квадратные матрицы J_k , содержащие следующие матричные блоки:

$$\begin{aligned}(J_k)_{11} &= \Phi'_k A x_{k+1} C + e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} [I + F'_k B C], \\(J_k)_{12} &= A x_{k+1} - e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} A (x_k + \lambda_k B), \\(J_k)_{21} &= \Phi'_k C, \quad (J_k)_{22} = 1.\end{aligned}$$

Пусть $(x(t), t_n)$ — m -цикл системы (13), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. В результате получено следующее условие устойчивости в малом синхронного режима наблюдателя (14) по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

Теорема 3.4. *Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные числа этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим по отношению к решению $(x(t), t_n)$ асимптотически устойчив в малом.*

Основным преимуществом наблюдателя (14) является отсутствие запаздывания в его уравнениях, и, следовательно, относительная простота анализа и реализации. Однако, помимо несовпадения решений аппроксимирующей модели (13) и, соответственно, синхронного режима наблюдателя (14) с решениями уравнений объекта (11) на интервалах вида $\hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau$, существенным недостатком наблюдателя (14) является ограничение на класс наблюдаемых систем: в условии теоремы 3.3 требуется выполнение равенства $LB = L e^{-A\tau} e^{A_0\tau} \tilde{B} = 0$, которое не следует из первоначального условия $L\tilde{B} = 0$.

В связи с этим, предлагается следующая схема наблюдателя для системы (11). Для упрощения записи вводятся изменения в обозначениях:

$$x(t) \leftarrow \tilde{x}(t), \quad y(t) \leftarrow \tilde{y}(t), \quad z(t) \leftarrow \tilde{z}(t), \quad B \leftarrow \tilde{B}, \quad t_n \leftarrow \tilde{t}_n, \quad T_n \leftarrow \tilde{T}_n, \quad \lambda_n \leftarrow \tilde{\lambda}_n.$$

Тогда уравнения объекта наблюдения (11) переписываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad z(t) = C x(t), \quad y(t) = L x(t), \\t_0 &= 0, \quad t_{n+1} = t_n + T_n, \quad x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \\T_n &= \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)).\end{aligned} \tag{16}$$

Для наблюдения вектора состояний системы (16) предлагается следующий наблюдатель:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + A_1 \hat{x}(t - \tau) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= L \hat{x}(t), \quad \hat{z}(t) = C \hat{x}(t), \quad \hat{x}(\hat{t}_n^+) = \hat{x}(\hat{t}_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \hat{T}_n, \quad \hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)), \quad \hat{\lambda}_n = F(\hat{z}(\hat{t}_n))\end{aligned} \tag{17}$$

с начальными условиями \hat{t}_0 и $\hat{x}(t) = \hat{\varphi}(t)$ при $\hat{t}_0 - \tau \leq t < \hat{t}_0$, где $\hat{\varphi}(t)$ — некоторая непрерывная на $[\hat{t}_0 - \tau, \hat{t}_0]$ начальная вектор-функция. Вводится матрица $D_0 = A_0 - KL$, где K — матрица коэффициентов усиления обратной связи. Как и ранее, предполагается, что линейная часть системы (16) спектрально FD-наблюдаема, т. е. матрица K может быть выбрана так, чтобы матрица D_0 была гурвицевой, и было выполнено условие (12).

Далее рассматривается некоторое решение $(x(t), t_n)$ системы (16). Как и ранее, решение $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ уравнения наблюдателя (17), совпадающее при всех t и n с $(x(t), t_n)$, предлагается называть синхронным режимом наблюдателя относительно $(x(t), t_n)$. Для упрощения обозначений, не умаляя общности, полагается $a = 0$. Синхронный режим относительно $(x(t), t_n)$ называется асимптотически устойчивым в малом, если при достаточно малых отклонениях начальных данных уравнений объекта и наблюдателя $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta_0$, $\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(t_0 + s) - \hat{\varphi}(\hat{t}_0 + s)\| < \delta$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, выполняется $\hat{t}_n - t_n \rightarrow 0$ и $\|\hat{x}_n - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что влечет также выполнение $\hat{\lambda}_n - \lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Далее строится точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

По аналогии с предыдущим случаем вводятся множества $S_{k,s}$, обозначение $\tilde{D} = D_0 + A_1 e^{-D_0 \tau}$, и рассматриваются следующие функции:

$$G(\theta) = \begin{cases} e^{A_0 \theta}, & 0 \leq \theta \leq \tau, \\ e^{D(\theta-\tau)} e^{A_0 \tau}, & \tau \leq \theta, \end{cases}, \quad \tilde{G}(\theta) = \begin{cases} e^{D_0 \theta}, & 0 \leq \theta \leq \tau, \\ e^{\tilde{D}(\theta-\tau)} e^{D_0 \tau}, & \tau \leq \theta, \end{cases}$$

и

$$\tilde{R}(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} e^{\tilde{D}\theta_2} [e^{\tilde{D}(\theta_1-\tau)} e^{D_0 \tau} - e^{D_0 \theta_1}], & 0 \leq \theta_1 \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq \theta_1. \end{cases}$$

Определяется матрица-функция $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ для $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$, где

$$\begin{aligned} P_{k,s}(\zeta, \theta) &= e^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)} x(t_s^-) - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} \left(e^{D(\theta-t_k)} x(t_k^-) - \zeta \right) - \\ &- \lambda_k \left(e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} G(\theta - t_k) + \tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta)) \right) B + F(C\zeta) \tilde{G}(\Phi(C\zeta)) B - \\ &- \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_j) B + \lambda_s G(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s) B. \end{aligned}$$

Теорема 3.5. Точечное отображение (18) при $n \geq 1$ задается уравнениями

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n).$$

Теорема 3.6. Точечное отображение $P(\zeta, \theta)$ непрерывно.

Теорема 3.7. Если производные скалярных функций $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ непрерывны, то частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ также непрерывны.

Как и ранее, вводится расширенное преобразование $Q(\cdot)$, для которого $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$, и выполняются его линеаризация в окрестности точек (x_k, t_k) синхронного режима. Для всех $k \geq 1$ определяются квадратные матрицы J_k , содержащие следующие матричные блоки:

$$\begin{aligned} (J_k)_{11} &= \Phi'_k D x_{k+1} C + e^{\tilde{D}_K T_k} \left(I_{n_x} + F'_k e^{-\tilde{D}_K \tau} e^{D_K \tau} B C \right), \\ (J_k)_{12} &= D x_{k+1} - e^{\tilde{D}_K T_k} \left(D x_k + \lambda_k \tilde{D}_K e^{-\tilde{D}_K \tau} e^{D_K \tau} B \right), \\ (J_k)_{21} &= \Phi'_k C, \quad (J_k)_{22} = 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.8. Для любого $n \geq 0$ матрица Якоби отображения $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_n^0 вычисляется по формуле $Q'(\hat{q}_n^0) = J_n$.

Пусть $(x(t), t_n)$ m -цикл системы (16), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. В результате, получено следующее условие устойчивости в малом синхронного режима наблюдателя (17) по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

Теорема 3.9. Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные значения этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим по отношению к $(x(t), t_n)$ асимптотически устойчив в малом.

В четвертой главе полученные результаты применяются к исследованию математической модели гормональной регуляции тестостерона в мужском организме. Рассматривается следующая система третьего порядка, которая является частным случаем системы (1), (2) и состоит из непрерывной части

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -b_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= g_1 x_1(t) - b_2 x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= g_2 x_2(t) - b_3 x_3(t), \end{aligned} \tag{19}$$

и импульсной части

$$\begin{aligned} x_1(t_n^+) &= x_1(t_n^-) + \lambda_n, \quad x_2(t_n^+) = x_2(t_n^-), \\ x_3(t_n^+) &= x_3(t_n^-), \quad t_{n+1} = t_n + T_n, \\ T_n &= \Phi(x_3(t_n)), \quad \lambda_n = F(x_3(t_n)). \end{aligned} \tag{20}$$

Не умаляя общности, полагается $t_0 = 0$. Нелинейные функции $\Phi(\cdot)$ и $F(\cdot)$ (модуляционные характеристики) выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi(x_3) &= \Phi_1 + \Phi_2 \frac{(x_3/h)^p}{1 + (x_3/h)^p}, \\ F(x_3) &= F_1 + \frac{F_2}{1 + (x_3/h)^p},\end{aligned}\tag{21}$$

где $\Phi_1, \Phi_2, F_1, F_2, h$ — положительные параметры, $p \geq 1$ целое число, откуда следует выполнение следующих неравенств

$$0 < \Phi_1 \leq \Phi(\cdot) < \Phi_1 + \Phi_2, \quad 0 < F_1 < F(\cdot) \leq F_1 + F_2.$$

Такая система третьего порядка может быть применена для моделирования и изучения процесса секреции, освобождения и регуляции тестостерона в мужском организме. Здесь $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ — концентрации гормонов: гонадотропин релизинг гормона **GnRH**, лютеинизирующего гормона **LH** и тестостерона **Te**, соответственно. Уровни гормонов **LH** и **Te**, можно определить путем анализа крови, однако, концентрации гормона **GnRH**, секретируемого в гипоталамусе, недоступны для непосредственного измерения без нанесения вреда организму. Моменты времени t_n и амплитуды λ_n импульсных выбросов гормона **GnRH** не измеряемы, их требуется оценить. Вводится обозначение $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, и система (19), (20) переписывается в матричной форме в виде (1), (2):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), \quad y(t) = Lx(t), \\ z(t) &= Cx(t), \quad t_n < t < t_{n+1},\end{aligned}\tag{22}$$

где $A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ g_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & g_2 & -b_3 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y(t)$ обозначает концентрации измеряемых гормонов (**LH** и **Te**), $z(t)$ — концентрацию гормона (**Te**), с помощью которого формируется импульсная обратная связь. Очевидно, матрица A — гурвицева, т. е. все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части, что на практике означает, что все молекулы гормонов в конечном итоге распадаются. Также легко видеть, что пара матриц (A, L) наблюдаема. Вектор $x(t)$ претерпевает скачки в моменты t_n , когда происходит импульсная секреция **GnRH** с соответствующими весами λ_n :

$$\begin{aligned}x(t_n^+) &= x(t_n^-) + \lambda_n B, \quad t_{n+1} = t_n + T_n, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)),\end{aligned}\tag{23}$$

где $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, функции $\Phi(\cdot)$, $F(\cdot)$ заданы с помощью (21). Легко видеть, что $CB = 0$, $LB = 0$, следовательно, функции $y(t)$, $z(t)$ являются непрерывными.

Далее рассматривается система (22), (23) со следующими параметрами:

$$h = 2.7, \quad b_1 = 0.012, \quad b_2 = 0.15, \quad b_3 = 0.1, \quad g_1 = 2.8, \quad g_2 = 1.5, \\ \Phi(z) = 40 + 80 \frac{(z/h)^2}{1 + (z/h)^2}, \quad F(z) = 0.05 + \frac{5}{1 + (z/h)^2}. \quad (24)$$

Такая система имеет устойчивый 1-цикл с неподвижной точкой

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.0516 & 1.0479 & 17.8606 \end{bmatrix}^T,$$

и $\lambda_0 = 0.1617$, $T_0 = 118.2066$. Графики решений системы (22)–(23) с параметрами (24) приведены на рис. 1.

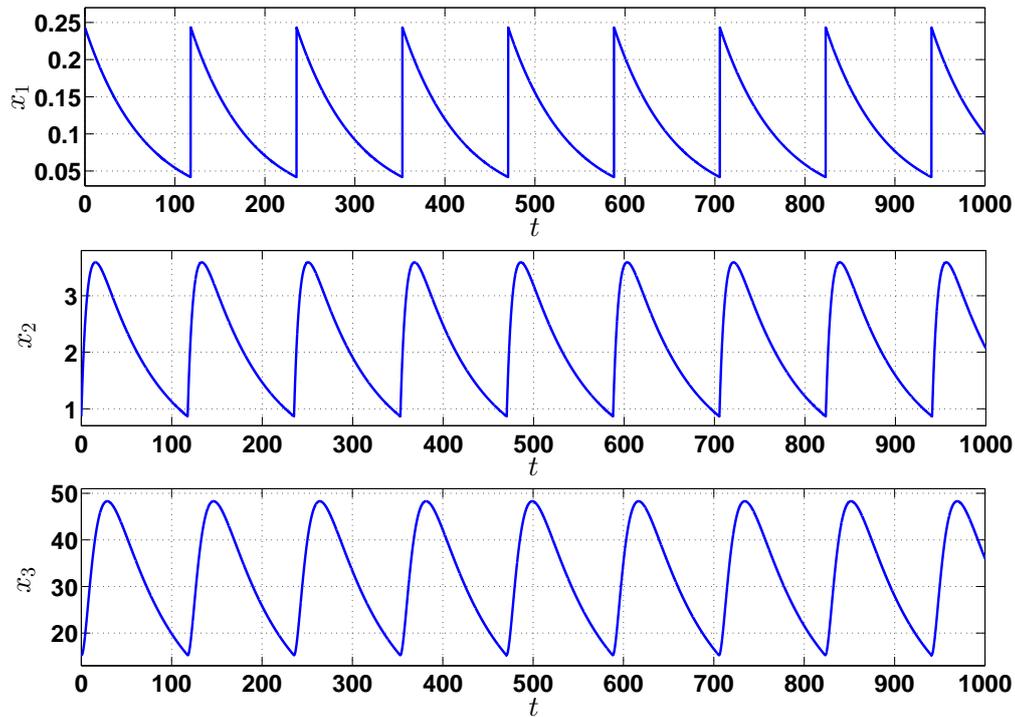


Рис. 1: Графики решений системы (22), (23) с параметрами (24)

Далее предлагается алгоритм выбора коэффициентов усиления наблюдателя с пропорциональной обратной связью в дискретной части для практически важного случая 1-периодического решения системы (1-цикла), обеспечивающий локальную устойчивость синхронного режима, а также высокую скорость сходимости. Результаты моделирования такого наблюдателя приведены на рис. 2.

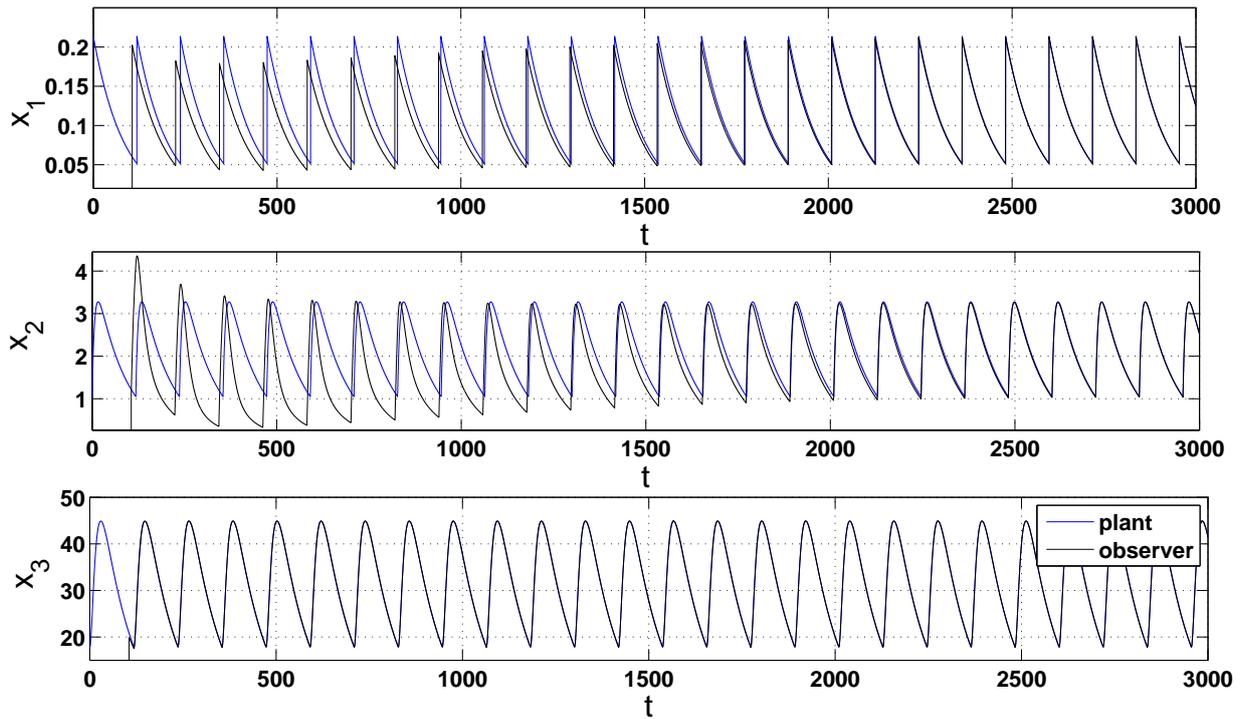


Рис. 2: Графики решений уравнений объекта и наблюдателя

Далее для всех типов рассмотренных в работе наблюдателей приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие их работоспособность.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Заключение

В результате исследования предложены новые схемы наблюдателей состояний импульсных систем. Рассмотрены наблюдатель с *пропорциональной* обратной связью в дискретной части и наблюдатель с *интегральной* обратной связью и *комбинированной частотной модуляцией* в дискретной части. Для импульсной системы с *запаздыванием* предложены наблюдатель *без запаздывания* и с *разрывной обратной связью* и наблюдатель с *запаздыванием*. Во всех случаях получены условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения импульсной системы. Полученные результаты применены к исследованию математической модели гормональной регуляции тестостерона в мужском организме.

Публикации автора по теме диссертации

1. Ямалова, Д. Р. Преобразование Пуанкаре для уравнения наблюдателя состояния импульсной системы с запаздыванием / Д. Р. Ямалова // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4 (62). Вып. 1. — С. 64–77.
2. Yamalova, D. Design degrees of freedom in a hybrid observer for a continuous plant under an intrinsic pulse-modulated feedback / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // IFAC–PapersOnLine. Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems. — 2015. — Vol. 48, no. 11. — P. 1080–1085.
3. Yamalova, D. Design of a hybrid observer for an oscillator with an intrinsic pulse-modulated feedback / D. Yamalova, A. Medvedev // 2017 American Control Conference (ACC). — 2017. — P. 1175–1180.
4. Yamalova, D. Finite-dimensional hybrid observer for delayed impulsive model of testosterone regulation / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // Mathematical Problems in Engineering. — 2015. — Vol. 2015. doi:10.1155/2015/190463.
5. Yamalova, D. Hybrid observer for an intrinsic impulsive feedback system / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // IFAC-PapersOnLine. The 20th IFAC World Congress. — 2017. — Vol. 50. — P. 4656–4661.
6. Yamalova, D. Hybrid state observer for time-delay systems under intrinsic impulsive feedback / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). — Groningen, The Netherlands, 2014. — July 7 – 11. — P. 977–984.
7. Yamalova, D. Hybrid state observer with modulated correction for periodic systems under intrinsic impulsive feedback / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). Periodic Control Systems. — 2013. — Vol. 5. — P. 119–124.
8. Yamalova, D. State estimation in a delayed impulsive model of testosterone regulation by a finite-dimensional hybrid observer / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // Proceedings of the 14th European Control Conference (ECC). — Linz, Austria, 2015. — July 15 – 17. doi: 10.1109/ECC.2015.7330743