

АНИСИМОВ ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ

**ВЛИЯНИЕ СДВИГА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико - математических наук

Санкт-Петербург, 2008 г.

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Товстик Петр Евгеньевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Нарбут Михаил Александрович

доктор технических наук,
профессор
Господариков Александр Петрович

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.

Защита состоится " " _____ 2008 г. в _____ часов _____ минут на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28., ауд. 405

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: Санкт-Петербург, Университетская набережная., д. 7/9.

Автореферат разослан " " _____ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор

С. А. Зегжда.

Актуальность темы. Оболочечные конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью и поэтому находят широкое применение во многих отраслях промышленности, например в судо- и авиастроении, ракетной технике, строительстве, машиностроении, медицине. При проектировании тонкостенных оболочечных конструкций одним из основных шагов является расчет на устойчивость. Однако в большинстве случаев простой расчет на устойчивость дает значительно большие величины критических нагрузок, чем способна вынести конструкция на самом деле. Причины данного явления кроются в неоднородности материала, несовершенствах формы, закрепления оболочки или самой нагрузки и т.п. В настоящее время расчет на устойчивость произвольной системы одним из численных методов не представляет принципиальных трудностей. Однако аналитические результаты дают качественное понимание вопроса и помогают корректно формулировать задачи при численном моделировании, а также контролировать результаты. С другой стороны, учет неправильностей и неоднородности при численном моделировании представляет значительные трудности из-за их непредсказуемого характера в реальной конструкции.

Цель работы. В представленной работе оценивается влияние сдвига на устойчивость оболочек вращения при различных условиях закрепления, а также, сравниваются разные виды потери устойчивости.

Методы исследования. В работе активно применяются асимптотические методы, основанные на использовании малости относительной толщины оболочки и получившие широкое развитие в работах Гольденвейзера, Воровича, Товстика и т.д. Для проверки асимптотических результатов применяются различные численные методы: метод начальных параметров, метод ортогональной прогонки, метод пристрелки, метод продолжения по параметру. При исследовании осесимметричной деформации оболочек вращения при больших поворотах нормали использованы уравнения Валишвили-Шилькрута. Для учета сдвига используется модель Тимошенко-Рейсснера, получившая развитие в работах Рейсснера, Айнолы, Галимова, Григолюка и т.д.

Научная новизна. Новыми являются, полученные асимптотические формулы, для определения главных членов критической нагрузки при осесимметричной деформации оболочек, с учетом влияния сдвига поперечных волокон. Новыми также являются результаты, которые позволяют судить о влиянии сдвига на вид потери устойчивости оболочки (оболочка может потерять

устойчивость в результате ее осесимметричной деформации, когда нагрузка достигает предельной точки на кривой нагрузка-прогиб, или в результате бифуркации).

Достоверность полученных результатов. Все задачи рассматриваются в рамках классических моделей механики на основе строгих методов математической физики, теории дифференциальных уравнений и асимптотического анализа. Достоверность подтверждается соответствием результатов, полученных по асимптотическим формулам, с результатами численного решения задач, а также сравнением с результатами других авторов.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах на устойчивость широкого класса оболочечных конструкций. Особую ценность представляют результаты, связанные с оценкой влияния поперечного сдвига, из-за трудностей численного моделирования таких задач.

Апробация работы. Результаты, включенные в диссертацию, докладывались на научно-практической конференции "Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития" (Одесса, 2005); международной научной конференции по механике "Четвертые поляховские чтения" (Санкт-Петербург, 2006); семинаре "Компьютерные методы в механике сплошной среды" (ПГУПС, Санкт-Петербург, 2008); семинаре кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы [1, 2, 3, 4]. Работы [1] и [3] опубликованы в журнале, рекомендованном ВАК (Перечень. Бюллетень ВАК, 2007, №1, с. 3-39).

Структура и объем диссертации. Работа состоит из четырех глав и заключения. Глава 1 — введение. Глава 2 носит вспомогательный характер и содержит в себе обзор основных соотношений осесимметричной деформации оболочек вращения, используемых в дальнейшем. В главе 3 для нескольких видов закрепления оболочек вращения с учетом сдвига исследуется осесимметричная потеря устойчивости оболочек вращения неотрицательной гауссовой кривизны. Глава 4 дополняет предыдущую главу и посвящена определению условий, при которых имеет место тот или иной вид потери устойчивости, т.е. осесимметричная потеря устойчивости или бифуркация осесим-

метричной формы. Заключение содержит основные выводы. Общий объем диссертации составляет 68 страниц, включая 10 рисунков, 10 таблиц и библиографию, содержащую 102 наименования.

Результаты, выносимые на защиту.

- Оценено влияние сдвига на возможность потери устойчивости оболочкой вращения в результате ее осесимметричной деформации, когда нагрузка достигает предельной точки на кривой нагрузка-прогиб. Получены асимптотические формулы, описывающие зависимость критической нагрузки оболочки от сдвигового параметра, угла конусности и кривизны.
- Для оболочки, имеющей излом и подкрепленной упругим кольцом, показано, как величина сдвигового параметра влияет на толщину кольца, исключающего возможность осесимметричной потери устойчивости.
- Оценено влияние сдвига на возможность потери устойчивости оболочкой вращения в результате бифуркации. Проведено сравнение двух видов потери устойчивости и найдены условия, при которых имеет место тот или иной вид потери устойчивости.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава - введение. В ней приводятся общие сведения об осесимметричной деформации, устойчивости оболочек вращения и методах исследования этих задач. Дается обзор литературы, посвященной различным аспектам рассматриваемых проблем. Отмечено, что значительный вклад был внесен Тимошенко, Рейсснером, Нагди, Айнолой, Галимовым, Григолюком, Мамаем и другими учеными. В первой главе также обосновывается актуальность и научная новизна темы диссертации. Формулируются цель и задачи работы, указывается научная и практическая ценность ее результатов и выводов. Приводятся краткое содержание диссертации и результаты выносимые на защиту.

Вторая глава носит вводный характер и содержит в себе вывод основных соотношений используемых в дальнейшем: вводятся соотношения, описывающие геометрию оболочки вращения, двухмерные уравнения равновесия и соотношения упругости. При написании последних для модели оболочки типа Тимошенко, учитывающей поперечный сдвиг, принимается, что нормальные до деформации волокна остаются прямолинейными, однако они уже не перпендикулярны к деформированной срединной поверхности. Вводится угол сдвига δ и принимается, что перерезывающее усилие Q_1 пропорционально этому углу

$$Q_1 = kG'h\delta,$$

где G' — модуль сдвига, h — толщина оболочки, k — поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине и обычно принимаемый равным $k = 5/6$. Угол сдвига также вводится и в выражения для моментов.

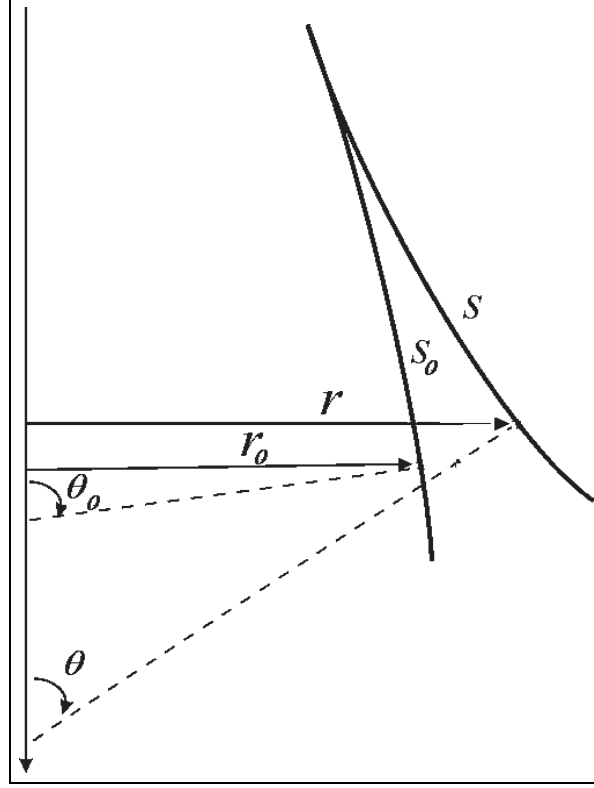


Рис. 1. Образующая оболочки до и после деформации.

Далее показано, что в осесимметричном случае, уравнения равновесия, геометрические соотношения и соотношения упругости образуют вместе замкнутую систему пятого порядка. Последняя, записанная относительно безразмерных переменных, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 (r_0 V)' &= 0, \\
 \mu(r_0 U)' &= \varepsilon_2 + \mu\nu(U \cos \theta + V \sin \theta), \\
 \mu(r_0 \varepsilon_2)' &= (1 - \mu\nu\varepsilon_2) \cos \theta - \cos \theta_0, \\
 \mu(r_0 M_1)' &= r_0(1 - \mu\nu\varepsilon_2)(U \sin \theta - V \cos \theta) + \mu\nu M_1 \cos \theta, \\
 \mu\theta'(1 + \lambda T_1) &= M_1 - \lambda\varepsilon_2 k_2^0 + \mu(k_{10} - \nu\kappa_\phi^0) - \\
 &\quad - \lambda\mu(\nu T_1 k_2^0 - \frac{r_0'}{r_0} Q_1).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь U, V — проекции внутренних усилий на осевое и радиальное направления. ε_2 — радиальная деформация оболочки, M_1 — изгибающий момент, θ — угол между нормалью к оболочке и осью вращения (см. рис. 1). Причем,

первое уравнение (1) сразу дает

$$V = -\frac{C}{r_0}, \quad P = -2\pi E h R \mu^2 C,$$

где P - сжимающее усилие.

Система (1) является основной системой, которая используется в дальнейшем при исследовании осесимметричной деформации оболочек вращения. Величина $\mu > 0$, входящая в (1), — малый параметр, который связан с относительной толщиной оболочки, и определяется формулой

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}.$$

Различие упругих свойств оболочки в продольном и поперечном направлениях учитывается членами при сдвиговом параметре:

$$\lambda = \frac{2\mu^2(1 + \nu)G}{kG'}.$$

Здесь G' , G — модули сдвига в поперечном и продольном направлениях соответственно, ν — коэффициент Пуассона. Для изотропной оболочки сдвиговый параметр λ мал ($\lambda \sim \mu^2$), при $\lambda = 0$ система (1) описывает деформацию оболочки вращения без учета поперечного сдвига. С увеличением отношения G/G' сдвиговый параметр λ растет.

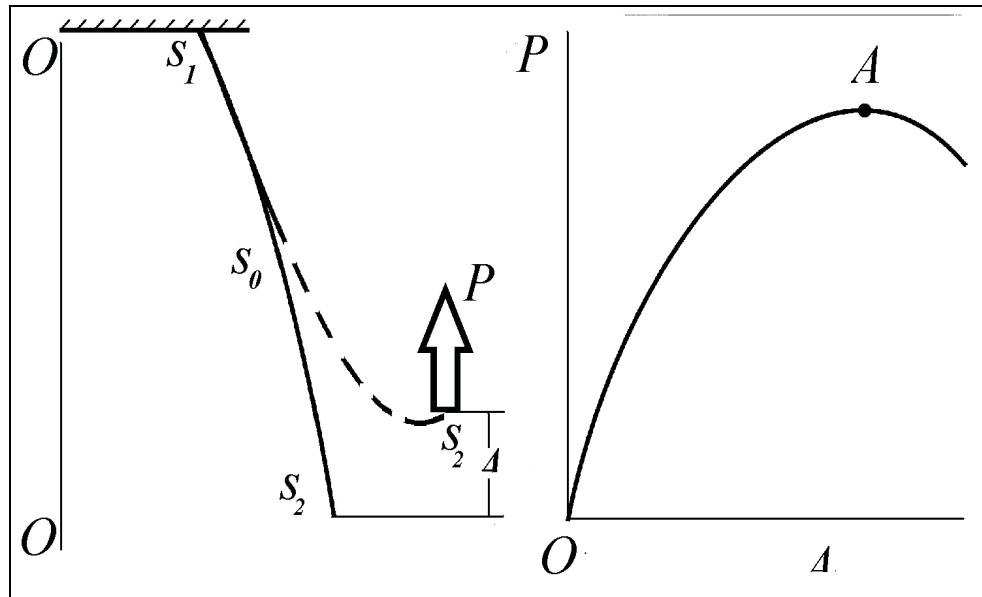


Рис. 2. Деформация оболочки под действием осевой сжимающей силы P , приложенной к ее торцам.

В третьей главе исследуется осесимметричная потеря устойчивости трансверсально-изотропных оболочек вращения при различных условиях закрепления. Осесимметричная потеря устойчивости происходит, когда сжимающая

нагрузка достигает предельной точки на кривой нагрузка – прогиб, в которой

$$\frac{dP}{d\Delta} = 0,$$

после чего нагрузка падает. Сначала исследуется оболочка, один край которой закреплен в радиальном направлении, а другой может свободно скользить по опорной плоскости (см. рис. 2).

При определении величины предельной нагрузки, используется метод асимптотического интегрирования, который позволяет существенно упростить нелинейную систему (1). В результате численное интегрирование проводится для системы:

$$\begin{aligned} \dot{U}^0 &= \varepsilon_2^0, \\ \dot{\varepsilon}_2^0 &= \cos \theta^0 - \cos \gamma, \\ \dot{M}_1^0 &= U^0 \sin \theta^0 + C^0 \cos \theta^0, \\ \dot{\theta}^0 (1 + \lambda U^0 \cos \theta^0 - \lambda C^0 \sin \theta^0) &= M_1^0 - \lambda \varepsilon_2^0 \sin \theta^0 \end{aligned} \quad (2)$$

и соответствующей краевой задачи, а искомая предельная нагрузка ищется в виде

$$C = C^0 + \mu(f_0 + f_\nu \nu + f_k k), \quad (3),$$

где, ν - коэффициент Пуассона, k - кривизна оболочки, а f_0, f_ν, f_k — величины, зависящие только от угла конусности оболочки и сдвигового параметра, характеризующего мягкость на сдвиг в поперечном направлении. Все, входящие в (3), неизвестные могут быть вычислены вместе с решением системы (2) и соответствующей краевой задачи.

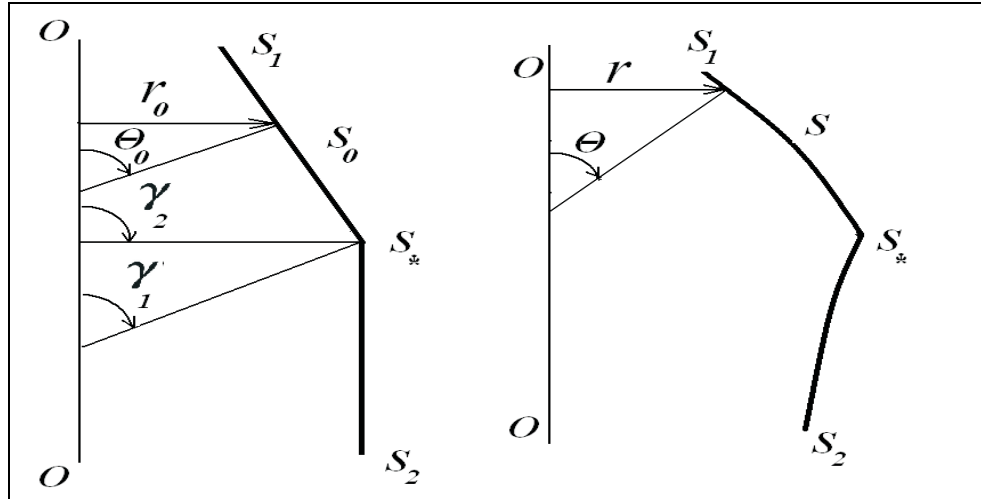


Рис. 3. Образующая оболочки с изломом до и после деформации.

Следующей рассматривается задача об осесимметричном сжатии оболочки вращения с изломом срединной поверхности (см. рис. 3), которая тесно примыкает к задаче о деформации оболочки со свободным краем. Ее можно

также рассматривать как задачу о сопряжении двух оболочек. Для ее решения также применен метод асимптотического интегрирования и выведена формула аналогичная (3):

$$C = C^0 + \mu(f_0 + f_\nu \nu + f_{k_1} k_{10}(s_* - 0) + f_{k_2} k_{10}(s_* + 0)). \quad (4)$$

Далее, рассмотрен случай устойчивости оболочки с изломом подкрепленной, дополнительной упругой связью (см. рис 4). Примером такой связи может быть упругое кольцо. Наложённая связь выражается формулой:

$$U(s_* - 0) + U(s_* + 0) + \eta(\varepsilon_2(s_* - 0) + \varepsilon_2(s_* + 0)) = 0.$$

Здесь U — безразмерное радиальное усилие, ε_2 — радиальная деформация оболочки, а коэффициент упругого закрепления η связан с параметрами кольца и оболочки по формуле

$$\mu\eta = \frac{E_\eta h_\eta}{Eh},$$

где E_η и h_η — модуль Юнга и толщина кольца, E и h — модуль Юнга и толщина оболочки.

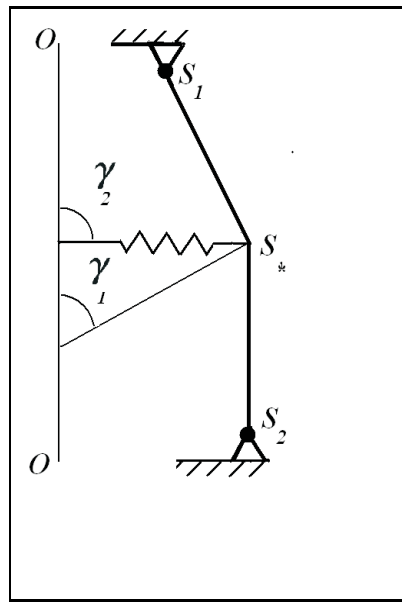


Рис. 4. Дополнительная упругая связь, наложенная в месте излома образующей оболочки.

Очевидно, что увеличение η (по сути толщины кольца) уменьшает склонность оболочки к осесимметричной потере устойчивости и приводит к повышению величины критической нагрузки. Продолжая увеличивать η , мы, в итоге, достигнем значения, выше которого оболочка теряет устойчивость в результате бифуркации осесимметричной формы. Упругую связь, отвечающую такой величине η , можно трактовать, как дополнительное подкрепление исключающее осесимметричную потерю устойчивости оболочки. На рис.

5, для цилиндрической оболочки сопряженной с конической, имеющей угол конусности γ , приведены графики зависимостей $\eta(\gamma)$, рассчитанных для разных сдвиговых параметров λ . Точки графиков показывают, какие величины η обеспечивают при заданных γ и λ подкрепление, исключающее осесимметричную потерю устойчивости оболочки. Приведенные графики, каждый для своего λ , разделяют область параметров на две части. Точки, лежащие ниже графика, соответствуют параметрам η , γ , при которых возможна осесимметричная потеря устойчивости оболочки. Точки, лежащие выше графика, соответствуют параметрам η , γ , при которых оболочка может потерять устойчивость только в результате бифуркации осесимметричной формы.

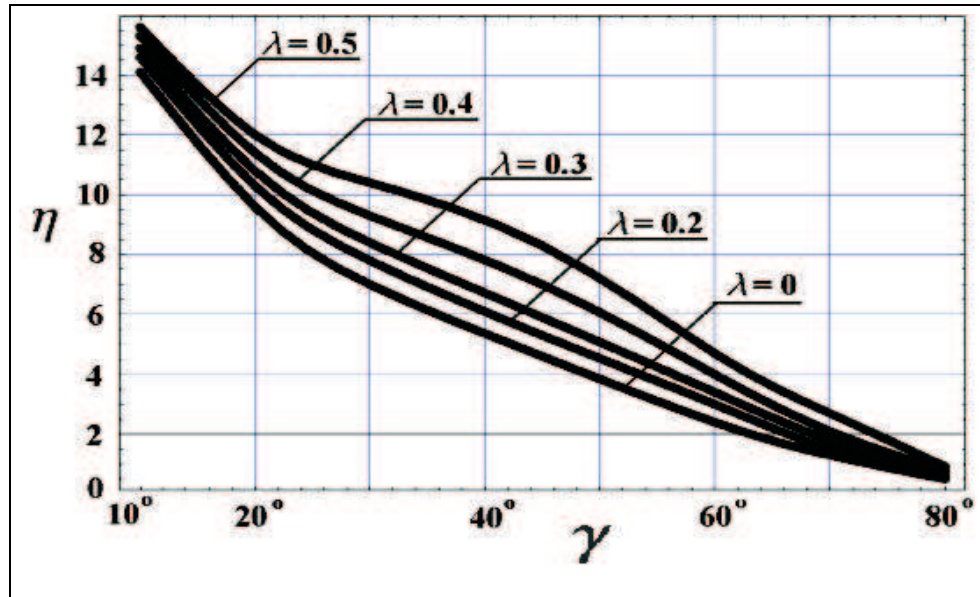


Рис. 5. Для оболочки с изломом вида $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 90^\circ$, приведены графики зависимостей $\eta(\gamma)$, рассчитанных для разных сдвиговых параметров λ . Точки графиков показывают, какие величины η обеспечивают при заданных γ и λ подкрепление, исключающее осесимметричную потерю устойчивости оболочки.

Последним рассмотрен случай слоистой многослойной оболочки с чередующимися мягкими и жесткими $2n + 1$ изотропными слоями. Более жесткие $n + 1$ слоев имеют упругие постоянные E_1 , ν_1 , а остальные слои - постоянные E_2 , ν_2 . Пусть $h_j = h/(2n + 1)$, $j = 1, \dots, 2n + 1$ - толщины слоев. Положим

$$K = \frac{h}{2n + 1} \left((n + 1) \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} + n \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \right),$$

$$K_\nu = \frac{h}{2n + 1} \left((n + 1) \frac{E_1 \nu_1}{1 - \nu_1^2} + n \frac{E_2 \nu_2}{1 - \nu_2^2} \right).$$

Теперь можно ввести приведенные модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν

$$\nu = \frac{K_\nu}{K}, \quad E = \frac{K(1 - \nu^2)}{h}, \quad G_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Эквивалентный модуль поперечного сдвига находим из соотношения

$$\frac{h}{G'} = \frac{h}{G_{13}} = \frac{h}{2n + 1} \left(\frac{n + 1}{G_1} + \frac{n}{G_2} \right), \quad G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}, \quad i = 1, 2.$$

В качестве примера приведены результаты расчетов для двух сопряженных конических оболочек с углом конусности 45° .

Таблица 1.

Результаты расчетов для двух сопряженных слоистых конических оболочек с углом конусности 45° .

h/R	E_1/E_2	ν_1	ν_2	n_1	G_{12}/G_{13}	ν	λ	C_{as}^1	C
0.02	1	0.3	0.3	1	1	0.3	0.0188	0.5312	0.5267
0.02	10	0.3	0.45	3	3.0541	0.3080	0.0580	0.5255	0.5202
0.02	10	0.3	0.45	21	3.3056	0.3140	0.0630	0.5244	0.5192
0.02	50	0.3	0.45	3	12.9527	0.3016	0.2460	0.4919	0.4886
0.02	50	0.3	0.45	21	14.4163	0.3030	0.2741	0.4869	0.4838
0.04	1	0.3	0.3	1	1	0.3	0.0377	0.5279	0.5589
0.04	10	0.3	0.45	3	3.0541	0.3080	0.1160	0.5127	0.5326
0.04	10	0.3	0.45	21	3.3056	0.3140	0.1261	0.5105	0.5295
0.04	50	0.3	0.45	3	12.9527	0.3016	0.4921	0.4427	0.4428
0.04	50	0.3	0.45	21	14.4163	0.3030	0.5483	0.4330	0.4326

В таблице 1 в первых трех столбцах приведены параметры, при которых производилось вычисление: относительная толщина оболочки h/R , отношение модулей упругости жесткого и мягкого слоев E_1/E_2 , коэффициенты Пуассона ν_1 , ν_2 и общее количество слоев $n_1 = 2n + 1$. В остальных столбцах (отделенных вертикальной чертой) приведены результаты вычислений: отношение приведенных модулей сдвига G/G' , приведенный коэффициент Пуассона ν , величина λ , предельная нагрузки C_{as}^1 , рассчитанная по формуле (4), и для сравнения величина C , рассчитанная численно из системы (1).

В конце главы сравниваются результаты, рассчитанные при разных значениях сдвигового параметра, оценивается величина поправки, вносимая в величину критической нагрузки моделью оболочки типа Тимошенко, по сравнению с величиной, полученной для классической оболочки типа Кирхгофа-Лява.

На рис. 6(a) для оболочки со свободным краем представлена зависимость $C^0(\gamma)$, рассчитанная при значениях $\lambda = 0$ и $\lambda = 0.5$. На рис. 6(b) аналогичная зависимость приведена для оболочки с изломом, при котором $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 90^\circ$ (конус сопряженный с цилиндром). При $\lambda = 0.5$ оболочка существенно мягче на сдвиг в поперечном, чем в продольном направлении, т.к. $G'/G = O(\mu^2)$. А

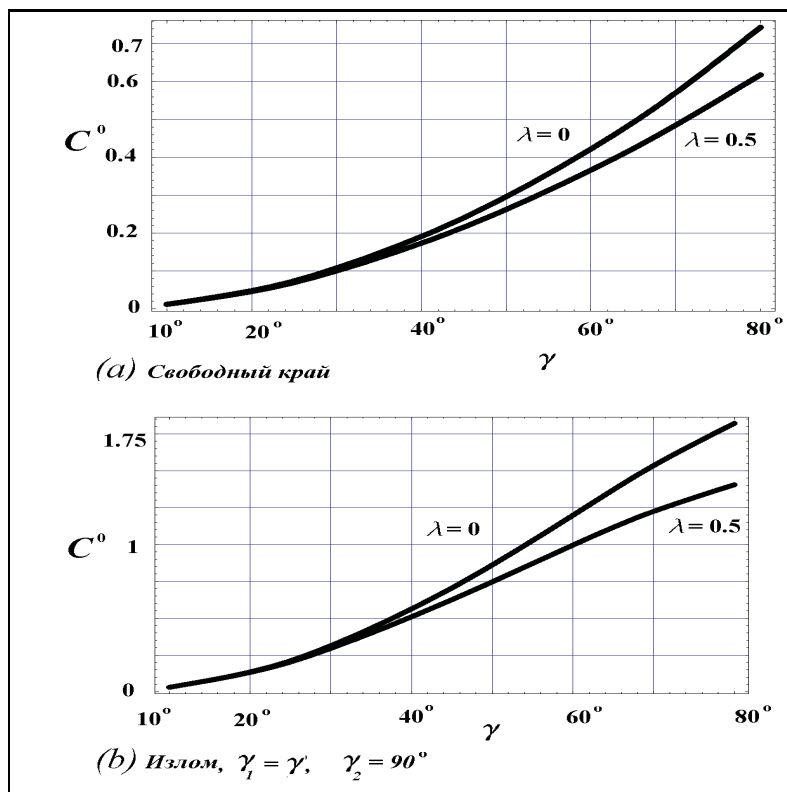


Рис. 6. На рис. (а) для оболочки со свободным краем представлена зависимость $C^0(\gamma)$, рассчитанная при значениях $\lambda = 0$ и $\lambda = 0.5$. На рис. (б) аналогичная зависимость приведена для оболочки с изломом, при котором $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 90^\circ$ (конус сопряженный с цилиндром).

при $\lambda = 0$ сопротивляемость сдвигам во всех направлениях примерно одинакова, т.к. $G' \sim G$. Следует отметить, что результат, полученный при $\lambda = 0$, совпадает с тем, который может быть получен в рамках гипотезы Кирхгофа - Лява. Но для $\lambda = 0.5$, как следует из представленных графиков, поправка вносимая гиптезой Тимошенко довольно значительна и при больших γ может достигать до 30%. С увеличением λ различие еще более увеличивается.

В четвертой главе выводится система уравнений устойчивости оболочки типа Тимошенко, для случая когда состояние, предшествующее бифуркации оболочки, является осесимметрично деформированным и описывается нелинейной системой уравнений пятого порядка. С использованием полученной системы рассматриваются две краевые задачи для оболочки, которая находится под действием осевой сжимающей силы P , приложенной к ее торцам. В первой задаче, один край оболочки закреплен в радиальном направлении, а другой край может свободно скользить по опорной плоскости. Во второй задаче, оболочка жестко закреплена по обоим краям, но имеет излом образующей срединной поверхности. В обеих задачах численно ищется критическая величина осевого сжимающего усилия P , при которой оболочка потеряет устойчивость, вследствие бифуркации, если выполнится условие существования

ненулевого решения системы уравнений устойчивости, или осесимметричным образом, при достижении предельной точки на кривой нагрузка-прогиб.

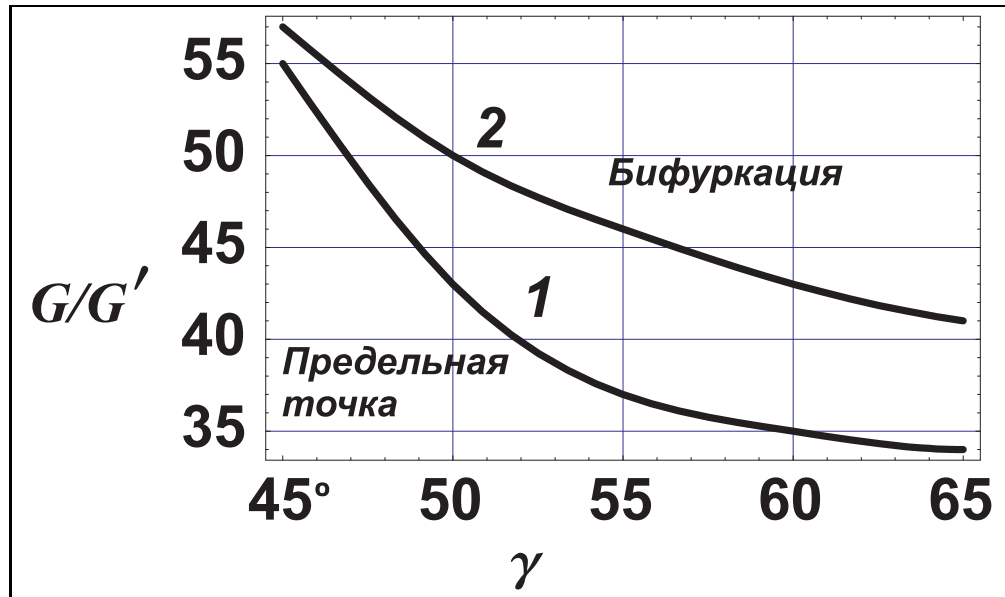


Рис. 7. Сравнение двух видов потери устойчивости. Кривая 1 соответствует оболочке со скользящим шарнирным краем, кривая 2 — случаю двух сопряженных конических оболочек.

На основании полученных численных результатов устанавливаются условия, при которых имеет место тот или иной вид потери устойчивости. Отмечается, что для изотропной оболочки и для трансверсально-изотропной оболочки со сравнительно небольшой податливостью сдвигу потеря устойчивости происходит в результате достижения предельной точки на кривой нагрузка-прогиб, т.е. выворачивание предшествует бифуркации. При более сильной анизотропии (при больших значениях G/G') для оболочек с большим углом наклона образующей (углом конусности) бифуркация может предшествовать выворачиванию.

Результаты, представленные на рис. 7, показывают, при каких значениях параметров тот или иной вид потери устойчивости имеет место для оболочки при $\nu = 0.3$, $G_{13} = G_{23} = G'$, $h/R = 0.02$. По оси абсцисс отложен угол конусности оболочки (в градусах) γ , по оси ординат — сдвиговый параметр G/G' . Кривая 1 соответствует оболочке со свободно скользящим шарнирным краем, кривая 2 — случаю двух одинаковых сопряженных конических оболочек.

При обоих видах опирания кривые 1 и 2 делят область параметров на две части: при недостаточно больших сдвиговых параметрах потеря устойчивости происходит вследствие достижения предельной точки на кривой нагрузка – прогиб и сопровождается выворачиванием, и, наоборот, при больших сдвиговых параметрах у оболочек близких к цилиндрическим бифуркация предшествует выворачиванию.

1. *Анисимов В. Ю.* Устойчивость трансверсально-изотропной оболочки вращения при осевом сжатии// Вестн. С.Петербург. ун-та. 2006. N 1. С. 68–78.
2. *Анисимов В. Ю.* Устойчивость оболочки вращения при осевом сжатии с учетом сдвига// Четвертые поляховские чтения: Избранные труды. СПб.: Издательство "ВВМ", 2006. С. 476–486.
3. *Анисимов В. Ю.* Влияние ортотропии материала на деформацию оболочки вращения при осевом сжатии// Вестн. С.Петербург. ун-та. 2005. N 4. С. 70–79..
4. *Анисимов В. Ю.* Устойчивость оболочки вращения при осевом сжатии с учетом сдвига// Сборник научных трудов по материалам научно-практической конференции "Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития". Том. 9. Транспорт, физика и математика - Одесса: Черноморье, 2005. С. 59.

Типография

Номер заказа

Тираж 100 экземпляров.