УДК 519.654

О МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПО РАВНООТСТОЯЩИМ УЗЛАМ

С. М. Машарский

(студент Санкт-Петербургского Государственного Университета)

Научный руководитель проф. В. Н. Малоземов

Рассматривается задача наилучшего среднеквадратического приближения функций, заданных на сетке $\{0, 1, \ldots, n\}$, алгебраическими многочленами фиксированной степени. Показано, что метод П. Л. Чебышева для решения этой задачи можно усовершенствовать, если при вычислении значений многочлена наилучшего приближения воспользоваться схемой Клиншоу.

Введение

Обозначим через Π_s множество алгебраических многочленов степени не выше s. Задача наилучшего среднеквадратического приближения дискретной функции $\{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$ многочленами из Π_s ставится так:

$$\sum_{j=0}^{n} [f(j) - \pi_s(j)]^2 \longrightarrow \min_{\pi_s \in \Pi_s} . \tag{$*$}$$

Здесь $s < n$. П. Л. Чебышев [1] предложил эффективный метод для решения этой задачи, основанный на представлении многочлена π_s в виде линейной комбинации дискретных ортогональных многочленов. В данной заметке метод П. Л. Чебышева усовершенствован за счет применения при вычислении значений многочлена наилучшего приближения схемы Клиншоу [2].

1. Предварительные сведения

Обозначим через $0 : n$ множество узлов $\{0, 1, \ldots, n\}$, а через $\mathcal{F}(0 : n)$ — множество всех функций, заданных на $0 : n$ и принимающих вещественные значения. Введем в $\mathcal{F}(0 : n)$ скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{n} f(j) g(j), \quad f, g \in \mathcal{F}(0 : n) . \tag{1.1}$$

Тогда задачу $(*)$ можно переписать в виде

$$\|f - \pi_s\|^2 := \langle f - \pi_s, f - \pi_s \rangle \longrightarrow \min_{\pi_s \in \Pi_s} . \tag{1.2}$$

Пусть $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ — система многочленов, ортогональных относительно скалярного произведения (1.1), причем $\deg \varphi_m = m$. Такие многочлены в дальнейшем будем называть *дискретными ортогональными многочленами*. Будем искать решение задачи (1.2) в виде

$$\pi_s(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots + a_s \varphi_s(x). \tag{1.3}$$

Нетрудно проверить, что оптимальные коэффициенты a_m есть не что иное, как *коэффициенты Фурье* функции f, которые определяются формулой

$$a_m = \frac{\langle f, \varphi_m \rangle}{\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle} , \quad m = 0, 1, \ldots, s. \tag{1.4}$$

В самом деле, для произвольного многочлена

$$Q_s(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_s\varphi_s(x)$$

имеем

$$\|f - Q_s\|^2 = \Big\langle f - \sum_{m=0}^{s} c_m\varphi_m \,,\, f - \sum_{m=0}^{s} c_m\varphi_m \Big\rangle = \|f\|^2 - 2\sum_{m=0}^{s} c_m\langle f, \varphi_m\rangle + \sum_{m=0}^{s} c_m^2\|\varphi_m\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{s} a_m^2\|\varphi_m\|^2 + \sum_{m=0}^{s}(a_m - c_m)^2\|\varphi_m\|^2 \ \geq \ \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{s} a_m^2\|\varphi_m\|^2 = \|f - \pi_s\|^2 \,.$$

Таким образом, решение задачи $(*)$ сводится к построению системы дискретных ортогональных многочленов и отысканию коэффициентов Фурье функции f по этой системе.

Нам потребуются так называемые *факториальные многочлены* или *обобщенные степени*

$$x^{[m]} = x(x-1)\cdots(x-m+1) = \binom{x}{m} m!\,, \quad x^{[0]} = 1\,. \tag{1.5}$$

Факториальный многочлен порядка m можно охарактеризовать как многочлен с единичным старшим коэффициентом, обращающийся в нуль в точках $0,\, 1,\, \ldots,\, m-1$.

Применение факториальных многочленов на равномерной сетке обусловлено сходством их свойств со свойствами обычных степеней x^m в непрерывном случае. В частности, легко вычисляются конечные разности факториального многочлена:

$$\Delta x^{[m]} = (x+1)^{[m]} - x^{[m]} = x(x-1)\cdots(x-m+2)\big[(x+1)-(x-m+1)\big] = m\, x^{[m-1]}\,.$$

Применяя эту формулу к вычислению вторых, третьих и т.д. разностей, находим, что вообще

$$\Delta^\mu x^{[m]} = m(m-1)\cdots(m-\mu+1)\, x^{[m-\mu]} = m^{[\mu]}\, x^{[m-\mu]}\,. \tag{1.6}$$

В частности, для $x = 0$ имеем

$$\Delta^\mu x^{[m]}\Big|_{x=0} = m^{[\mu]}\, 0^{[m-\mu]} = \begin{cases} \mu!, & \text{если } m = \mu\,, \\ 0, & \text{если } m \neq \mu\,. \end{cases} \tag{1.6a}$$

Из общей теории [3] известно, что ортогональный многочлен единственен с точностью до постоянного множителя, т.е. если имеются две системы ортогональных многочленов последовательно возрастающих степеней $\big\{Q_0,\, Q_1,\, \ldots,\, Q_n\big\}$ и $\big\{R_0,\, R_1,\, \ldots,\, R_n\big\}$, то справедливо соотношение

$$R_m(x) = \alpha_m Q_m(x), \quad m = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$$

В литературе [4, 5, 6] рассматриваются дискретные ортогональные многочлены вида

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}}\binom{m}{k}\binom{m+k}{k} x^{[k]}\,, \quad m = 0,\, 1,\, \ldots,\, n. \tag{1.7}$$

Таблицы значений многочленов (1.7) при различных n приведены в [6]. Эти многочлены нормированы условием

$$P_m(0) = 1\,, \quad m = 0,\, 1\, \ldots,\, n.$$

Любая другая система дискретных ортогональных многочленов отличается от системы (1.7) только выбором нормировки.

По аналогии с непрерывным случаем, для дискретных ортогональных многочленов имеет место *обобщенная формула Родрига.* А именно, верна следующая

Теорема 1. *Система многочленов* $\big\{\varphi_0(x),\, \varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)\big\}$*, определяемых формулами*

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = 1\,, \\ &\varphi_m(x) = \Delta^m\Big(x(x-1)\cdots(x-m+1)(n+1-x)(n+2-x)\cdots(n+m-x)\Big)\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.8}$$

является ортогональной относительно скалярного произведения (1.1).

Доказательство (ср. [1]). Введем для краткости обозначение

$$\Phi_m(x) = x(x-1)\cdots(x-m+1)(n+1-x)(n+2-x)\cdots(n+m-x)\,. \tag{1.9}$$

Так как $\Phi_m(x)=0$ при $x=0,\,1,\,\ldots,\,m-1$ и $x=n+m,\ n+m-1,\ \ldots,\ n+1$, то все выражения $\Phi_m(j),\ \Phi_m(j+1),\ \ldots,\ \Phi_m(j+m-1)$ обращаются в нуль при $j=0$ и $j=n+1$, и следовательно, определяемые по этим величинам разности $\Delta^{m-1}\Phi_m(j),\ \Delta^{m-2}\Phi_m(j+1),\ \ldots,\ \Delta\Phi_m(j+m-2)$ также обращаются в нуль при $j=0$ и $j=n+1$.

Пусть $F(x)$ — произвольная функция. Применим к выражению $\sum\limits_{j=0}^{n} F(j)\Delta^m\Phi_m(j)$ последовательно m раз формулу суммирования по частям

$$\sum_{j=0}^{n} u(j)\Delta v(j) = u(j)v(j)\Big|_{j=0}^{j=n+1} - \sum_{j=0}^{n} v(j+1)\Delta u(j)\ .$$

Получим

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\Delta^m\Phi_m(j) = \big[F(j)\Delta^{m-1}\Phi_m(j) - \Delta F(j)\Delta^{m-2}\Phi_m(j+1) + \Delta^2 F(j)\Delta^{m-3}\Phi_m(j+2) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m-1}\Phi_m(j+m-1)\Delta^{m-1}F(j)\big]\Big|_{j=0}^{j=n+1} + (-1)^m\sum_{j=0}^{n}\Phi_m(j+m)\Delta^m F(j)\ .$$

Но по вышесказанному относительно функции $\Phi_m(j+m-1)$, а также разностей $\Delta^{m-1}\Phi_m(j)$, $\Delta^{m-2}\Phi_m(j+1),\ \ldots,\ \Delta\Phi_m(j+m-2)$, все члены, стоящие вне знака суммы, обращаются в нуль. Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\Delta^m\Phi_m(j) = (-1)^m\sum_{j=0}^{n}\Phi_m(j+m)\Delta^m F(j)\ .$$

Заметим, что $\Phi_m(j+m)=0$ при $j=n,\,n-1,\,\ldots,\,n-m+1$, поэтому верхним пределом суммирования можно положить $j=n-m$. Окончательно имеем

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\Delta^m\Phi_m(j) = (-1)^m\sum_{j=0}^{n-m}\Phi_m(j+m)\Delta^m F(j)\ . \tag{1.10}$$

Подставляя теперь $F=\varphi_0,\ F=\varphi_1,\ \ldots, F=\varphi_{m-1}$ и замечая, что при этом $\Delta^m F(x)\equiv 0$, так как $\deg F < m$, получим:

$$\sum_{j=0}^{n}\varphi_0(j)\Delta^m\Phi_m(j)=0,\quad \sum_{j=0}^{n}\varphi_1(j)\Delta^m\Phi_m(j)=0,\quad \ldots,\quad \sum_{j=0}^{n}\varphi_{m-1}(j)\Delta^m\Phi_m(j)=0\ .$$

Вспоминая, что $\varphi_m(x)=\Delta^m\Phi_m(x)$, мы убеждаемся, что система многочленов (1.8) действительно является ортогональной относительно скалярного произведения (1.1). Теорема доказана.

Найдем старший коэффициент многочлена $\varphi_m(x)$. Для многочлена $\Phi_m(x)$ имеем:

$$\Phi_m(x) = x(x-1)\cdots(x-m+1)\,(n+1-x)(n+2-x)\cdots(n+m-x) = (-1)^m x^{2m} + \ldots$$

Отсюда

$$\varphi_m(x) = \Delta^m\Phi_m(x) = (-1)^m\,(2m)^{[m]}\,x^m + \ldots$$

Учитывая тот факт, что старший коэффициент многочлена (1.7) равен

$$\frac{(-1)^m\,(2m)^{[m]}}{n^{[m]}\,m!}\ ,$$

мы можем выявить связь между этими многочленами:

$$\varphi_m(x) = n^{[m]}\, m!\, P_m(x)\,. \tag{1.11}$$

Отсюда находим явное выражение для многочлена $\varphi_m(x)$:

$$\varphi_m(x) = n^{[m]}\, m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}} \binom{m}{k} \binom{m+k}{k} x^{[k]}\,. \tag{1.12}$$

Для многочлена (1.7) известно значение его нормы [5]:

$$\|P_m\|^2 = \frac{(n+m+1)^{[m+1]}}{(2m+1)\, n^{[m]}}\,.$$

Отсюда, пользуясь соотношением (1.11), можно найти норму многочлена $\varphi_m(x)$:

$$\|\varphi_m\|^2 = \frac{(m!)^2}{2m+1}(n+m+1)^{[2m+1]}\,. \tag{1.13}$$

Представленных сведений достаточно, чтобы перейти к рассмотрению результатов П. Л. Чебышева.

2. Результаты Чебышева

Как было показано в п. 1, решение задачи (∗) может быть представлено формулой (1.3) с коэффициентами (1.4). Остается лишь выбрать нормировку для системы дискретных ортогональных многочленов и представить соответствующую вычислительную схему для нахождения коэффициентов $\{a_m\}$.

Следуя [1], рассмотрим в качестве базисной системы дискретных ортогональных многочленов систему (1.8). Пользуясь понятием обобщенной степени, выражение для многочлена (1.9) можно записать кратко:

$$\Phi_m(x) = x^{[m]}\,(n+m-x)^{[m]}\,.$$

Вспоминая, что $\varphi_m(x) = \Delta^m \Phi_m(x)$, и пользуясь формулой (1.10), находим

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi_m(j) f(j) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n-m} (j+m)^{[m]}\,(n-j)^{[m]}\, \Delta^m f(j)\,,$$

или, переходя к биномиальным коэффициентам,

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi_m(j) f(j) = (-1)^m (m!)^2 \sum_{j=0}^{n-m} \binom{j+m}{m} \binom{n-j}{m} \Delta^m f(j)\,.$$

Внося эту величину в формулу (1.4) и подставляя известное значение нормы многочлена $\varphi_m(x)$ (формула (1.13)), находим

$$a_m = (-1)^m \frac{2m+1}{(n+m+1)^{[2m+1]}} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{j+m}{m} \binom{n-j}{m} \Delta^m f(j)\,.$$

Введем следующее обозначение:

$$F_m = (-1)^m \frac{2m+1}{n+1} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-m} \binom{j+m}{m} \binom{n-j}{m} \Delta^m f(j)}{\displaystyle\binom{n+m+1}{m}}\,. \tag{2.1}$$

Тогда для коэффициентов (1.4) имеем

$$a_m = \frac{F_m}{n^{[m]}\, m!} \, .$$

Таким образом, мы получаем следующее выражение для искомого многочлена наилучшего среднеквадратического приближения:

$$\pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} \frac{F_m}{n^{[m]}\, m!}\, \varphi_m(x) \ , \tag{2.2}$$

где коэффициенты F_m находятся из формулы (2.1), а базисные многочлены $\varphi_m(x)$ — из формулы (1.12). Раскрывая суммы, заключающиеся в этих формулах, мы найдем $\pi_s(x)$ в виде многочлена степени s.

Однако более удобным с вычислительной точки зрения оказывается представление многочлена $\pi_s(x)$ с помощью известной из численного анализа [5, 6] интерполяционной формулы Ньютона

$$\pi_s(x) = \sum_{\mu=0}^{s} \frac{\Delta^\mu \pi_s(0)}{\mu!}\, x^{[\mu]} \, , \tag{2.3}$$

поскольку величины $\pi_s(0)$, $\Delta\pi_s(0)$, $\ldots$, $\Delta^s\pi_s(0)$, как будет показано ниже, легко вычисляются.

Определяя разности $\Delta^\mu \pi_s(x)$, где $\mu \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, s\}$, находим:

$$\Delta^\mu \pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} \frac{F_m}{n^{[m]}\, m!}\, \Delta^\mu \varphi_m(x) \ ,$$

$$\Delta^\mu \varphi_m(x) = n^{[m]}\, m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}} \binom{m}{k} \binom{m+k}{k} \Delta^\mu x^{[k]} \ .$$

Заметим, что $\Delta^\mu \varphi_m(x) \equiv 0$ при $m < \mu$, поэтому нижний предел суммирования в первой формуле можно заменить на $m = \mu$.

Согласно формуле (1.6a), в сумме, представляющей величину $\Delta^\mu \varphi_m(x)$, при $x = 0$ остается только один член, соответствующий $k = \mu$, вследствие чего получается

$$\Delta^\mu \varphi_m(0) = (-1)^\mu \frac{n^{[m]}\, m!}{n^{[\mu]}} \binom{m}{\mu} \binom{m+\mu}{\mu} \mu! \ ,$$

$$\Delta^\mu \pi_s(0) = \sum_{m=\mu}^{s} (-1)^\mu \frac{\mu!}{n^{[\mu]}} \binom{m}{\mu} \binom{m+\mu}{\mu} F_m \ .$$

Переходя к факториалам, выведенную формулу можно записать так:

$$\Delta^\mu \pi_s(0) = \sum_{m=\mu}^{s} (-1)^\mu \frac{(n-\mu)!\,(m+\mu)!\, F_m}{n!\,\mu!\,(m-\mu)!} \ . \tag{2.4}$$

Для упрощения вычислений по формуле (2.4) введем следующее обозначение:

$$(\mu, m) = (-1)^\mu \frac{(n-\mu)!\,(m+\mu)!}{n!\,\mu!\,(m-\mu)!} \ .$$

Рассмотрим подробнее свойства (μ, m). Заметим, что при $\mu = 0$ выражение

$$\frac{(n-\mu)!\,(m+\mu)!}{n!\,\mu!\,(m-\mu)!}$$

обращается в 1, а потому

$$(0,m)=1\,,\quad m=0,1,2,\dots \tag{2.5}$$

Далее,

$$\frac{(\mu+1,m)}{(\mu,m)}=-\frac{(n-\mu-1)!}{(n-\mu)!}\frac{(m+\mu+1)!}{(m+\mu)!}\frac{\mu!}{(\mu+1)!}\frac{(m-\mu)!}{(m-\mu-1)!}=-\frac{(m+\mu+1)(m-\mu)}{(n-\mu)(\mu+1)}\ ,$$

откуда следует

$$(\mu+1,m)=-\frac{m(m+1)-\mu(\mu+1)}{(n-\mu)(\mu+1)}\,(\mu,m)\ . \tag{2.6}$$

Рекуррентное соотношение (2.6) в совокупности с начальными условиями (2.5) дает возможность легко вычислять все значения множителей (μ,m) в формуле

$$\Delta^{\mu}\pi_s(0)=\sum_{m=\mu}^{s}(\mu,m)F_m\ .$$

На основании выше сказанного заключаем, что искомый многочлен может быть представлен в виде (2.3), где величины $\pi_s(0)$, $\Delta\pi_s(0)$, $\dots$, $\Delta^s\pi_s(0)$ найдутся по формулам

$$\begin{array}{rcccccccl}
\pi_s(0)= & F_0+F_1 & + & F_2+F_3 & + & \dots & + & F_s\,, & \\
\Delta\pi_s(0)= & (1,1)F_1 & + & (1,2)F_2 & + & (1,3)F_3 & + \dots + & (1,s)F_s\,, & \\
\Delta^2\pi_s(0)= & & & (2,2)F_2 & + & (2,3)F_3 & + \dots + & (2,s)F_s\,, & \\
\Delta^3\pi_s(0)= & & & & & (3,3)F_3 & + \dots + & (3,s)F_s\,, & \\
\dots\dots & & & & & & & & \\
\Delta^s\pi_s(0)= & & & & & & & (s,s)F_s\,, &
\end{array} \tag{2.7}$$

в которых величины $F_0,\ F_1,\dots,\ F_s$ определяются формулой (2.1), а множители

$$\begin{array}{cccc}
(1,1)\,, & (1,2)\,, & (1,3) & \dots\ (1,s)\,,\\
 & (2,2)\,, & (2,3) & \dots\ (2,s)\,,\\
 & & \ddots & \\
 & & & (s,s)
\end{array}$$

выводятся один из другого с помощью рекуррентного соотношения (2.6) с начальными данными (2.5).

Вычисление значений многочлена $\pi_s(x)$, представленного в виде (2.3), целесообразно проводить по схеме Горнера для многочленов в форме Ньютона [7].

3. Дальнейшее развитие

В п. 2 для вычисления значений многочлена наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$ использовался метод П. Л. Чебышева, связанный с переходом от представления (2.2) к представлению (2.3). Здесь мы рассмотрим альтернативный подход. Он основан на современной идеологии рекуррентных вычислений [7].

Теорема 2. *Пусть многочлен $\pi_s(x)$ представлен в виде*

$$\pi_s(x)=\sum_{m=0}^{s}a_mQ_m(x)\ ,$$

где многочлены $Q_m(x)$ удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$Q_{m+1}(x)=A_m(x-\alpha_m)Q_m(x)+B_mQ_{m-1}(x)\,. \tag{3.1}$$

Введем последовательность Клиншоу $\{b_m\}_{m=0}^{s+2}$ следующим образом:

$$\begin{array}{l}
b_{s+2}=b_{s+1}=0\,,\\
b_m-A_m(x-\alpha_m)b_{m+1}-B_{m+1}b_{m+2}=a_m\ ,\quad m=s,s-1,\dots,0.
\end{array}$$

Тогда значение многочлена π_s в точке x можно вычислить по формуле

$$\pi_s(x) = b_0 Q_0(x) + b_1\bigl[Q_1(x) - A_0(x-\alpha_0)Q_0(x)\bigr] . \tag{3.2}$$

Доказательство. Заменяя в представлении многочлена $\pi_s(x)$ каждый коэффициент a_m на соответствующую комбинацию b_m, b_{m+1} и b_{m+2}, запишем:

$$\pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} a_m Q_m(x) = \sum_{m=0}^{s} \bigl[b_m - A_m(x-\alpha_m)b_{m+1} - B_{m+1}b_{m+2}\bigr] Q_m(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} b_m Q_m(x) - \sum_{m=1}^{s+1} A_{m-1}(x-\alpha_{m-1}) b_m Q_{m-1}(x) - \sum_{m=2}^{s+2} B_{m-1} b_m Q_{m-2}(x) .$$

Выделяя из первой суммы два первых члена (при $m=0$ и $m=1$), а из второй суммы — один (при $m=1$), и учитывая, что $b_{s+2} = b_{s+1} = 0$, получаем:

$$\pi_s(x) = b_0 Q_0(x) + b_1 Q_1(x) - A_0(x-\alpha_0) b_1 Q_0(x) +$$

$$+ \sum_{m=2}^{s} b_m \bigl[Q_m(x) - A_{m-1}(x-\alpha_{m-1})Q_{m-1}(x) - B_{m-1}Q_{m-2}(x)\bigr] .$$

Выражение в квадратных скобках, согласно (3.1), есть тождественный нуль, следовательно, равенство (3.2) справедливо. Теорема доказана.

Теорема 2 является модификацией рекуррентной схемы Клиншоу [2]. Использование этой схемы, как следует из результатов численных экспериментов, значительно упрощает процедуру вычисления значений многочлена $\pi_s(x)$, что приводит к сокращению времени и увеличению точности вычислений.

Найдем последовательности Клиншоу для систем дискретных ортогональных многочленов, введенных формулами (1.7) и (1.12). Для многочленов (1.7) известно рекуррентное соотношение [5]:

$$P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{(m+1)(n-m)}(n-2x)P_m(x) - \frac{m(n+m+1)}{(m+1)(n-m)}P_{m-1}(x) , \tag{3.3}$$

$$P_0(x) = 1 , \qquad P_1(x) = 1 - \frac{2x}{n} .$$

Отсюда, пользуясь (1.11), нетрудно получить рекуррентное соотношение и для второй системы:

$$\varphi_{m+1}(x) = (2m+1)(n-2x)\varphi_m(x) - m^2\left((n+1)^2 - m^2\right)\varphi_{m-1}(x) , \tag{3.4}$$

$$\varphi_0(x) = 1 , \qquad \varphi_1(x) = n - 2x .$$

Заметим, что коэффициенты F_m, введенные формулой (2.1), есть не что иное, как коэффициенты Фурье функции f по системе дискретных ортогональных многочленов (1.7) (это следует из (2.2) и (1.11)). Поэтому для этой системы имеем:

$$b_m - \frac{2m+1}{(m+1)(n-m)}(n-2x)b_{m+1} + \frac{(m+1)(n+m+2)}{(m+2)(n-m-1)}b_{m+2} = F_m , \tag{3.5}$$

$$\pi_s(x) = b_0 P_0(x) + b_1\bigl[P_1(x) - \frac{1}{n}(n-2x)P_0(x)\bigr] = b_0 . \tag{3.6}$$

Для системы (1.12), соответственно, имеем:

$$\tilde{b}_m - (2m+1)(n-2x)\tilde{b}_{m+1} + (m+1)^2\bigl((n+1)^2 - (m+1)^2\bigr)\tilde{b}_{m+2} = a_m , \tag{3.7}$$

$$\pi_s(x) = \tilde{b}_0\varphi_0(x) + \tilde{b}_1\bigl[\varphi_1(x) - (n-2x)\varphi_0(x)\bigr] = \tilde{b}_0 . \tag{3.8}$$

Таким образом, если нам известны коэффициенты F_m, то мы можем вычислять значения многочлена наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$ как минимум тремя различными способами — по схеме, предложенной П. Л. Чебышевым, или с помощью модифицированой схемы Клиншоу для двух рассмотренных выше систем дискретных ортогональных многочленов. Результаты численных экспериментов по применению различных вычислительных схем и их анализ будут представлены в п. 4.

Заметим, что вычисление самих коэффициентов F_m тоже можно произвести с использованием рекуррентных соотношений. Если представить F_m в виде

$$F_m = \sum_{j=0}^{n-m} \psi_m(j)\, \Delta^m f(j) \ , \tag{3.9}$$

то для коэффициентов $\psi_m(j)$ будет иметь место рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \psi_m(j+1) &= \frac{(j+m+1)(n-j-m)}{(j+1)(n-j)}\, \psi_m(j)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-m-1, \\ \psi_m(0) &= (-1)^m \frac{2m+1}{n+1} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n+m+1}{m}} \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

При этом вычислять $\psi_m(0)$ непосредственно нет необходимости, так как для них тоже есть рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(0) &= -\frac{(2m+3)(n-m)}{(2m+1)(n+m+2)}\, \psi_m(0)\,, \quad m = 0, 1, \ldots, s-1, \\ \psi_0(0) &= \frac{1}{n+1} \ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

4. Численные эксперименты

С целью выяснения эффективности вычислительных схем, рассмотренных в пп. 2 и 3, были произведены численные эксперименты следующего вида. В качестве исходной функции $f(x)$ генерировался случайный многочлен вида

$$f_s(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \ldots + \xi_s x^s \ , \tag{4.1}$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_s$ — равномерно распределенные на отрезке $[-1,1]$ случайные величины. Затем для многочлена (4.1) вычислялись коэффициенты F_m (по формулам (3.9)–(3.11)) и строился многочлен наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$. Вычисление значений многочлена $\pi_s(x)$ производилось пятью различными способами — по схеме Чебышева (формулы (2.3) и (2.5)–(2.7)) и по модифицированной схеме Клиншоу для четырех систем дискретных ортогональных многочленов (кроме двух схем, описанных формулами (3.5)–(3.8), были еще рассмотрены схемы с ортонормированными многочленами и ортогональными многочленами с единичным старшим коэффициентом). В каждом случае определялась относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\|f_s - \pi_s\|}{\|f_s\|} \ . \tag{4.2}$$

Теоретически многочлены $f_s(x)$ и $\pi_s(x)$ должны совпадать, однако на практике из-за ограниченности мантиссы и связанных с этим неизбежных ошибок округления величина ε оказывается отличной от нуля. Именно эта величина и служила критерием устойчивости той или иной вычислительной схемы.

На сетках $0 : n$ при $n = 50$ и $n = 100$ и степенях исходного многочлена $s = 10, 15, 20, \ldots, 45$ было произведено по $N = 1000$ численных экспериментов. В каждом эксперименте определялась относительная погрешность (4.2), и по окончании вычислялось ее среднее значение

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \tag{4.3}$$

и величина среднеквадратического отклонения

$$\sigma = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon})^2 \right]^{1/2} . \qquad (4.4)$$

Изложенный план проведения экспериментов был реализован в виде программы в среде программирования Delphi Desktop v. 2.0 фирмы Borland International на объектно-ориентированном расширении языка Pascal. Вычисления велись с *двойной точностью* (тип double: 8 байт, диапазон значений $5,0 \cdot 10^{-324}...1,7 \cdot 10^{308}$).

Результаты экспериментов приведены в табл. 1. Результаты по применению модифицированной схемы Клиншоу даны только для системы многочленов (1.7), поскольку различия между четырьмя вариантами схемы Клиншоу весьма незначительны по сравнению с результатами, полученными по методу Чебышева.

Основываясь на данных табл. 1, можно сделать вывод, что вычисление многочлена наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$ по модифицированной схеме Клиншоу значительно устойчивее, чем по схеме, предложенной П. Л. Чебышевым.

Кроме точности, важное значение имеет такая характеристика вычислений, как затраченное на них время. В табл. 2 приведено среднее время, затраченное на решение одной аппроксимационной задачи в зависимости от вида эксперимента.[1] В последнем столбце приведено среднее время нахождения коэффициентов F_m (общая часть схем Чебышева и Клиншоу). Значения приведены в миллисекундах.

Из табл. 2 видно, что модифицированная схема Клиншоу не только устойчивее, но и значительно быстрее схемы Чебышева.

Таблица 1

Вид эксперимента	Чебышев		Клиншоу	
	$\bar{\varepsilon}$	σ	$\bar{\varepsilon}$	σ
$n = 50,\ s = 10$	$4{,}851 \cdot 10^{-15}$	$3{,}486 \cdot 10^{-15}$	$2{,}588 \cdot 10^{-16}$	$5{,}213 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 15$	$5{,}386 \cdot 10^{-14}$	$3{,}964 \cdot 10^{-14}$	$2{,}484 \cdot 10^{-16}$	$4{,}957 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 20$	$6{,}897 \cdot 10^{-13}$	$5{,}176 \cdot 10^{-13}$	$2{,}408 \cdot 10^{-16}$	$5{,}252 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 25$	$6{,}278 \cdot 10^{-12}$	$4{,}520 \cdot 10^{-12}$	$2{,}459 \cdot 10^{-16}$	$6{,}101 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 30$	$6{,}190 \cdot 10^{-11}$	$4{,}497 \cdot 10^{-11}$	$2{,}610 \cdot 10^{-16}$	$7{,}460 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 35$	$5{,}287 \cdot 10^{-10}$	$3{,}196 \cdot 10^{-10}$	$2{,}753 \cdot 10^{-16}$	$8{,}563 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 40$	$3{,}247 \cdot 10^{-9}$	$1{,}793 \cdot 10^{-9}$	$2{,}807 \cdot 10^{-16}$	$8{,}919 \cdot 10^{-17}$
$n = 50,\ s = 45$	$1{,}452 \cdot 10^{-8}$	$8{,}509 \cdot 10^{-9}$	$3{,}022 \cdot 10^{-16}$	$1{,}078 \cdot 10^{-16}$
$n = 100,\ s = 10$	$5{,}221 \cdot 10^{-15}$	$3{,}717 \cdot 10^{-15}$	$2{,}586 \cdot 10^{-16}$	$5{,}711 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 15$	$1{,}001 \cdot 10^{-13}$	$7{,}674 \cdot 10^{-14}$	$3{,}013 \cdot 10^{-16}$	$5{,}780 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 20$	$3{,}130 \cdot 10^{-12}$	$1{,}759 \cdot 10^{-12}$	$3{,}215 \cdot 10^{-16}$	$5{,}791 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 25$	$3{,}593 \cdot 10^{-11}$	$2{,}432 \cdot 10^{-11}$	$3{,}367 \cdot 10^{-16}$	$6{,}552 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 30$	$3{,}996 \cdot 10^{-10}$	$2{,}920 \cdot 10^{-10}$	$3{,}501 \cdot 10^{-16}$	$6{,}776 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 35$	$5{,}304 \cdot 10^{-9}$	$3{,}865 \cdot 10^{-9}$	$3{,}681 \cdot 10^{-16}$	$7{,}635 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 40$	$6{,}326 \cdot 10^{-8}$	$4{,}762 \cdot 10^{-8}$	$3{,}794 \cdot 10^{-16}$	$8{,}086 \cdot 10^{-17}$
$n = 100,\ s = 45$	$4{,}578 \cdot 10^{-6}$	$4{,}342 \cdot 10^{-6}$	$3{,}953 \cdot 10^{-16}$	$9{,}042 \cdot 10^{-17}$

[1] Вычисления проводились на компьютере IBM PC с процессором Intel Pentium с тактовой частотой 75 МГц и встроенным математическим сопроцессором.

Таблица 2

Вид эксперимента	Чебышев	Клиншоу	Вычисление $\{F_m\}$
$n = 50,\ s = 10$	15,7	11,9	10,1
$n = 50,\ s = 15$	22,5	12,9	10,3
$n = 50,\ s = 20$	30,7	14,1	10,7
$n = 50,\ s = 25$	40,7	15,2	11,0
$n = 50,\ s = 30$	53,0	16,3	11,3
$n = 50,\ s = 35$	67,4	17,2	11,4
$n = 50,\ s = 40$	83,9	18,2	11,7
$n = 50,\ s = 45$	102,1	19,0	11,8
$n = 100,\ s = 10$	22,6	14,7	11,2
$n = 100,\ s = 15$	35,2	17,1	12,4
$n = 100,\ s = 20$	51,7	19,6	13,1
$n = 100,\ s = 25$	72,4	21,9	13,9
$n = 100,\ s = 30$	97,1	24,2	14,8
$n = 100,\ s = 35$	125,7	26,3	15,4
$n = 100,\ s = 40$	158,5	28,5	16,0
$n = 100,\ s = 45$	195,1	30,7	16,7

Список литературы

1. Чебышев П. Л. *Об интерполировании величин равноотстоящих* / Полн. собр. соч. Т.1. М., Изд-во АН СССР, 1949. С. 66–85.
2. Clenshaw C. W. *A Note on the Summation of Chebyshev Series* // Math. Tabl. Aids Comput. 1955. Vol. 9. P. 118–120.
3. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* М., Физматгиз, 1962. 500 с.
4. Суетин П. К. *Классические ортогональные многочлены.* М., "Наука", 1979. 416 с.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений.* Т.1. М., Физматгиз, 1962. 464 с.
6. Милн В. Э. *Численный анализ.* М., Изд-во иностр. лит-ры, 1951. 292 с.
7. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Рекуррентные вычисления.* Л., Изд-во ЛГУ, 1976. 56 с.