УДК 621.391.1

В. Н. Малозёмов, С. М. Машарский

ХААРОВСКИЕ СПЕКТРЫ ДИСКРЕТНЫХ СВЕРТОК[1]

В пространстве дискретных периодических сигналов рассматриваются два вейвлетных базиса, связанных с дискретным преобразованием Хаара. Для разложений по этим базисам получены аналоги известных теорем о сдвиге и о свертке.

§1. Введение

Данная статья примыкает к работам [1, 2].

Обозначим через $\delta_N(j)$ единичный N-периодический импульс, равный 1 при $j = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ и равный 0 при остальных $j \in \mathbb{Z}$. В пространстве $\mathbb{R}_N$ вещественных N-периодических последовательностей (*сигналов*) $x = \{x(j)\}$ при $N = 2^s$ рассмотрим два вейвлетных базиса:

$$c(j); \quad f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s; \tag{1.1}$$

$$c(j); \quad g_\nu(j - p), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{1.2}$$

Здесь $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$, $N_\nu = N/2^\nu$, $c(j) \equiv N^{-1}$,

$$f_\nu(j) = \frac{1}{2^\nu}\Big\{ \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j-q) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j-q)\Big\}, \tag{1.3}$$

$$g_\nu(j) = 2^{-\nu}\,\big\{\delta_{N_{\nu-1}}(j) - \delta_{N_{\nu-1}}(j - N_\nu)\big\}. \tag{1.4}$$

Базис (1.1) называется *базисом Хаара, связанным с прореживанием по частоте.* Он широко известен (см., например, [3], где имеется обширная библиография). Базис (1.2) называется *базисом Хаара, связанным с прореживанием по времени.* Он изучался в работе [2].

В данной работе для разложений по базисам (1.1) и (1.2) получены аналоги теоремы о сдвиге и теоремы о свертке. Правда, в случае базиса (1.1) речь пойдет о *диадном* сдвиге и *диадной* свертке.

Постоянно будут использоваться следующие обозначения:
$\lfloor\alpha\rfloor$ — целая часть числа α;
$\langle k\rangle_N = k - \lfloor k/N\rfloor N$ — остаток от деления целого числа k на N.

§2. Хааровский спектр диадной свертки

Начнем с одного вспомогательного утверждения.

Лемма 2.1. *Справедлива формула*

$$f_\nu(j) = (-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu\rfloor}\, 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00747).

Доказательство. Правая часть (2.1) равна $2^{-\nu}$ при $j = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1$, равна $-2^{-\nu}$ при $j = \Delta_\nu, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1$ и равна 0 при $j = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N-1$ (учесть, что $N = N_\nu \Delta_{\nu+1}$). Те же значения при указанных j принимает согласно (1.3) и $f_\nu(j)$. Таким образом, при $j = 0, 1, \ldots, N-1$ равенство (2.1) верно. Остается проверить N-периодичность правой части (2.1). Она следует из того, что при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{j+kN}{\Delta_\nu} = \frac{j}{\Delta_\nu} + 2kN_\nu, \qquad \frac{j+kN}{\Delta_{\nu+1}} = \frac{j}{\Delta_{\nu+1}} + kN_\nu.$$

Лемма доказана. ▲

Следствие. *При $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}) = (-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}\, 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p). \tag{2.2}$$

Формулы (2.1) и (2.2) несколько упрощаются при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. А именно, записав представление $j = j_{s-1}2^{s-1} + j_{s-2}2^{s-2} + \cdots + j_0$, где $j_k \in \{0,1\}$, получим

$$\left\lfloor \frac{j}{\Delta_\nu} \right\rfloor = \frac{j_{s-1}2^{s-1} + \cdots + j_\nu 2^\nu + j_{\nu-1}2^{\nu-1}}{2^{\nu-1}} = j_{s-1}2^{s-\nu} + \cdots + 2j_\nu + j_{\nu-1},$$

так что

$$(-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} = (-1)^{j_{\nu-1}}. \tag{2.3}$$

Для дальнейшего нам понадобится понятие диадного сдвига. Пусть a, $b \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $a = a_{s-1}2^{s-1} + \cdots + a_0$, $b = b_{s-1}2^{s-1} + \cdots + b_0$. *Диадным сдвигом* числа a на величину b называется число [4, 5]

$$a \oplus b = \sum_{k=0}^{s-1} \langle a_k + b_k \rangle_2\, 2^k.$$

Очевидно, что операция диадного сдвига не выводит из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ и обладает следующими свойствами:

$$a \oplus b = b \oplus a, \qquad a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

$$a \oplus 0 = a, \qquad a \oplus a = 0.$$

Отметим также, что при фиксированном $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ отображение $j \to j \oplus q$, $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, является перестановкой.

Лемма 2.2. *При фиксированном $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $q = q_{s-1}2^{s-1} + \cdots + q_0$, справедливо равенство*

$$f_\nu(j \oplus q) = (-1)^{q_{\nu-1}}\, f_\nu(j - \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}), \quad j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Имеем

$$j = \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + j_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle j \rangle_{\Delta_\nu},$$

$$q = \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor \Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle q\rangle_{\Delta_\nu}.$$

Значит,

$$j \oplus q = \big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big)\Delta_{\nu+1} + \langle j_{\nu-1} + q_{\nu-1}\rangle_2\, \Delta_\nu + \big(\langle j\rangle_{\Delta_\nu} \oplus \langle q\rangle_{\Delta_\nu}\big).$$

Согласно (2.1) и (2.3) получаем

$$f_\nu(j \oplus q) = (-1)^{j_{\nu-1}+q_{\nu-1}}\, 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big). \tag{2.5}$$

Отметим, что при $a,\, b \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$

$$\delta_{N_\nu}(a \oplus b) = \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ если } a = b \\ 0, \text{ если } a \neq b \end{matrix} \right\} = \delta_{N_\nu}(a - b),$$

поэтому

$$\delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big) = \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor - \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big).$$

Равенство (2.5) принимает вид

$$f_\nu(j \oplus q) = (-1)^{q_{\nu-1}} \Big\{ (-1)^{j_{\nu-1}}\, 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor - \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big) \Big\}.$$

Учитывая (2.2) и (2.3), приходим к (2.4). ▲

С л е д с т в и е. *При* $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ *справедливо равенство*

$$f_\nu(j \oplus p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}). \tag{2.6}$$

Любой сигнал $x \in \mathbb{R}_N$ можно разложить по ортогональному базису (1.1):

$$x(j) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p)\, f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Здесь

$$\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} x(j), \qquad x_\nu(p) = 2^\nu \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Совокупность коэффициентов этого разложения

$$H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(p),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \nu = 1, \ldots, s\}$$

образует *хааровский спектр сигнала* x, *связанный с прореживанием по частоте.*

Установим связь между хааровскими спектрами исходного и диадно сдвинутого сигналов.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть для сигнала* $x \in \mathbb{R}_N$ *имеется разложение* (2.7). *Зафиксируем* $q = q_{s-1}2^{s-1} + \cdots + q_0$ *и предположим, что*

$$x(j \oplus q) = \widetilde{\alpha} N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \widetilde{x}_\nu(p)\, f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Тогда $\widetilde{\alpha} = \alpha$ *и*

$$\widetilde{x}_\nu(p) = (-1)^{q_{\nu-1}} x_\nu(p \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Согласно (2.7) и (2.6)

$$x(j \oplus q) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p)\, f_\nu\big((j \oplus q) \oplus p\Delta_{\nu+1}\big).$$

Так как

$$(j \oplus q) \oplus p\Delta_{\nu+1} = j \oplus (q \oplus p\Delta_{\nu+1}) =$$
$$= j \oplus \big((\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p)\Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle q \rangle_{\Delta_\nu}\big),$$

то в силу (2.4) имеем

$$x(j \oplus q) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p)\, (-1)^{q_{\nu-1}}\, f_\nu\big(j - (\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p)\Delta_{\nu+1}\big).$$

Произведя замену $p' = p \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor$, получим

$$x(j \oplus q) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p'=0}^{N_\nu - 1} (-1)^{q_{\nu-1}}\, x_\nu(p' \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, f_\nu(j - p'\Delta_{\nu+1}).$$

Остается учесть единственность разложения по ортогональному базису. ▲

Перейдем к вопросу о спектре свертки. *Диадной сверткой* сигналов x и y из $\mathbb{R}_N$ называется сигнал $z \in \mathbb{R}_N$, который на основном периоде задается равенством [4]

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j \oplus k), \quad j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. *Пусть z — диадная свертка сигналов x и y. Предположим, что наряду с разложением (2.7) имеются разложения*

$$y(j) = \beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(p)\, f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}),$$

$$z(j) = \gamma N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} z_\nu(p)\, f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Тогда $\gamma = \alpha\beta$ *и*

$$z_\nu(p) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(q)\, y_\nu(p \oplus q), \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. По предыдущей теореме

$$y(j \oplus k) = y(k \oplus j) = \beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} (-1)^{j_{\nu-1}}\, y_\nu(q \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, f_\nu(k - q\Delta_{\nu+1}). \quad (2.9)$$

Как известно [1], система (1.1) является ортогональной и $\|f_\nu(\cdot - q\Delta_{\nu+1})\|^2 = 2^{-\nu}$. Учитывая эти факты, а также формулы (2.7), (2.9) и определение (2.8), запишем

$$z(j) = \alpha\beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(q)\, (-1)^{j_{\nu-1}}\, y_\nu(q \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, 2^{-\nu}.$$

Но в силу (2.2)

$$y_\nu(q \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) = y_\nu(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus q) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(p \oplus q)\, \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p) =$$

$$= (-1)^{j_{\nu-1}}\, 2^{\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(p \oplus q)\, f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Значит,

$$z(j) = \alpha\beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \left\{ \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(q)\, y_\nu(p \oplus q) \right\} f_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. ▲

§3. Хааровский спектр циклической свертки

Обратимся к вейвлетному базису (1.2).

Лемма 3.1. *Справедлива формула*

$$g_\nu(j) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Сигнал $g_\nu(j)$ в силу (1.4) является $N_{\nu-1}$-периодическим. Тем же свойством обладает и сигнал, стоящий в правой части (3.1). Значит, равенство (3.1) достаточно проверить на основном периоде $\{0, 1, \ldots, N_{\nu-1} - 1\}$.

При $j \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$ равенство (3.1) принимает вид $g_\nu(j) = 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(j)$, а при $j \in \{N_\nu, \ldots, N_{\nu-1} - 1\}$ его можно переписать так: $g_\nu(j) = -2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(j - N_\nu)$. В обоих случаях получаем полное соответствие с определением (1.4). ▲

Следствие. *При $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$g_\nu(j - p) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, 2^{-\nu}\, \delta_{N_\nu}(j - p), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Покажем, что

$$(-1)^{\lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j - p) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j - p). \quad (3.3)$$

Поскольку в обеих частях этого равенства стоят $N_{\nu-1}$-периодические по j сигналы, то достаточно проверить его на периоде $\{p, p+1, \ldots, p+N_{\nu-1}-1\}$. При $j=p$ и $j=p+N_\nu$ равенство (3.3) верно. Оно верно и при остальных j из указанного периода, поскольку в этом случае обе части (3.3) равны нулю. Таким образом, равенство (3.3) при $p=0,1,\ldots,N_\nu-1$ и $j\in\mathbb{Z}$ установлено.

Теперь (3.2) следует из (3.1) и (3.3). ▲

Лемма 3.2. *При всех целых j и p*

$$g_\nu(j-p) = (-1)^{\lfloor p/N_\nu \rfloor}\, g_\nu(j - \langle p\rangle_{N_\nu}). \tag{3.4}$$

Доказательство. Согласно (3.1) при всех целых j и k имеем

$$g_\nu(j-kN_\nu) = (-1)^k\, g_\nu(j). \tag{3.5}$$

Поскольку $p = \lfloor p/N_\nu\rfloor N_\nu + \langle p\rangle_{N_\nu}$, то

$$j-p = (j-\langle p\rangle_{N_\nu}) - \lfloor p/N_\nu\rfloor N_\nu.$$

Остается воспользоваться формулой (3.5). ▲

Любой сигнал $x\in\mathbb{R}_N$ можно разложить по ортогональному базису (1.2):

$$x(j) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu(p)\, g_\nu(j-p), \quad j\in\mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} x(j), \qquad x_\nu(p) = 2^\nu \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, g_\nu(j-p).$$

Совокупность коэффициентов этого разложения

$$H_g(x) = \{\alpha;\ x_\nu(p),\ p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\ \nu=1,\ldots,s\}$$

образует *хааровский спектр сигнала x, связанный с прореживанием по времени.*

Установим связь между хааровскими спектрами исходного и сдвинутого сигналов.

Теорема 3.1. *Пусть для сигнала $x\in\mathbb{R}_N$ имеется разложение* (3.6). *Зафиксируем $q\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ и предположим, что*

$$x(j-q) = \widetilde{\alpha} N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} \widetilde{x}_\nu(p)\, g_\nu(j-p).$$

Тогда $\widetilde{\alpha}=\alpha$ и

$$\widetilde{x}_\nu(p) = (-1)^{\lfloor (q-p-1)/N_\nu\rfloor+1}\, x_\nu(\langle p-q\rangle_{N_\nu}),$$
$$p=0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \nu=1,\ldots,s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.6) и (3.4) имеем

$$x(j-q) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p)\, g_\nu(j-q-p) =$$

$$= \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(p)\, (-1)^{\lfloor (q+p)/N_\nu \rfloor}\, g_\nu(j - \langle q+p \rangle_{N_\nu}).$$

Произведем замену $p' = \langle q+p \rangle_{N_\nu}$. В этом случае $p = \langle p' - q \rangle_{N_\nu}$ и

$$\left\lfloor \frac{q+p}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q + \langle p'-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor = \lfloor q/N_\nu \rfloor + \left\lfloor \frac{\langle q \rangle_{N_\nu} + \langle p'-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor.$$

Отметим, что

$$\left\lfloor \frac{\langle q \rangle_{N_\nu} + \langle p'-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } p' \geq \langle q \rangle_{N_\nu} \\ 1, \text{ если } p' < \langle q \rangle_{N_\nu} \end{array} \right\} = \left\lfloor \frac{N_\nu - 1 + \langle q \rangle_{N_\nu} - p'}{N_\nu} \right\rfloor.$$

Значит,

$$\left\lfloor \frac{q+p}{N_\nu} \right\rfloor = \lfloor q/N_\nu \rfloor + \left\lfloor \frac{N_\nu - 1 + \langle q \rangle_{N_\nu} - p'}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q - p' - 1}{N_\nu} \right\rfloor + 1.$$

Окончательно получаем

$$x(j-q) = \alpha N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p'=0}^{N_\nu - 1} (-1)^{\lfloor (q-p'-1)/N_\nu \rfloor + 1}\, x_\nu(\langle p' - q \rangle_{N_\nu})\, g_\nu(j-p').$$

Теорема доказана. ▲

Напомним, что циклической сверткой сигналов x и y из $\mathbb{R}_N$ называется сигнал $z = x * y$ с компонентами

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j-k), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Т е о р е м а 3.2. *Пусть z — циклическая свертка сигналов x и y. Предположим, что наряду с разложением* (3.6) *имеются разложения*

$$y(j) = \beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(p)\, g_\nu(j-p),$$

$$z(j) = \gamma N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} z_\nu(p)\, g_\nu(j-p).$$

Тогда $\gamma = \alpha\beta$ *и*

$$z_\nu(p) = \sum_{q=0}^{p} x_\nu(q)\, y_\nu(p-q) - \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} x_\nu(q)\, y_\nu(N_\nu+p-q),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Зафиксируем $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Имеем

$$y(j-k) = \beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(p)\, g_\nu(j-k-p).$$

Согласно (1.4), $g_\nu(-j) = g_\nu(j)$. Учитывая (3.4), запишем

$$g_\nu(j-k-p) = g_\nu(k-j+p) = (-1)^{\lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor}\, g_\nu(k - \langle j-p \rangle_{N_\nu}).$$

Приходим к формуле

$$y(j-k) = \beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu(p)\, g_\nu(k - \langle j-p \rangle_{N_\nu}).$$

Произведем замену $q = \langle j-p \rangle_{N_\nu}$. В этом случае $p = \langle j-q \rangle_{N_\nu}$ и

$$\left\lfloor \frac{j-p}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j - \langle j-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor = \lfloor j/N_\nu \rfloor + \left\lfloor \frac{\langle j \rangle_{N_\nu} - \langle j-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor.$$

Отметим, что

$$\left\lfloor \frac{\langle j \rangle_{N_\nu} - \langle j-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor = \left\{ \begin{array}{r} 0, \text{ если } q \le \langle j \rangle_{N_\nu} \\ -1, \text{ если } q > \langle j \rangle_{N_\nu} \end{array} \right\} = \left\lfloor \frac{\langle j \rangle_{N_\nu} - q}{N_\nu} \right\rfloor.$$

Значит,

$$\left\lfloor \frac{j-p}{N_\nu} \right\rfloor = \lfloor j/N_\nu \rfloor + \left\lfloor \frac{\langle j \rangle_{N_\nu} - q}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j-q}{N_\nu} \right\rfloor.$$

Окончательно получаем

$$y(j-k) = \beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu(\langle j-q \rangle_{N_\nu})\, g_\nu(k-q). \tag{3.8}$$

Как известно [2], система (1.2) является ортогональной и $\|g_\nu(\cdot - q)\|^2 = 2^{-\nu}$. Опираясь на эти факты, а также на формулы (3.6), (3.8) и определение (3.7), запишем

$$z(j) = \alpha\beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(q)\, (-1)^{\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu(\langle j-q \rangle_{N_\nu})\, 2^{-\nu}.$$

Но
$$(-1)^{\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu(\langle j-q\rangle_{N_\nu}) =$$

$$= (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor + \lfloor (\langle j\rangle_{N_\nu} - q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\big\langle \langle j\rangle_{N_\nu} - q\big\rangle_{N_\nu}\big) =$$

$$= (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu(\langle p-q\rangle_{N_\nu})\, \delta_{N_\nu}(\langle j\rangle_{N_\nu} - p).$$

Согласно (3.2)

$$\delta_{N_\nu}(\langle j\rangle_{N_\nu} - p) = \delta_{N_\nu}(j-p) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, 2^\nu\, g_\nu(j-p),$$

поэтому

$$z(j) = \alpha\beta N^{-1} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \left\{ \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, x_\nu(q)\, y_\nu(\langle p-q\rangle_{N_\nu}) \right\} g_\nu(j-p).$$

Остается заметить, что

$$\sum_{q=0}^{N_\nu - 1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, x_\nu(q)\, y_\nu(\langle p-q\rangle_{N_\nu}) =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} x_\nu(q)\, y_\nu(p-q) - \sum_{q=p+1}^{N_\nu - 1} x_\nu(q)\, y_\nu(N_\nu + p - q).$$

Теорема доказана. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малозёмов В. Н., Третьяков А. А.* Алгоритм Кули—Тьюки и дискретное преобразование Хаара // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (15). С. 31–34.

2. *Малозёмов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А.* Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений // Пробл. передачи инф. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.

3. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.

4. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.

5. *Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983.

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

V. N. Malozemov and S. M. Masharsky
HAAR SPECTRA OF DISCRETE CONVOLUTIONS