САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет
кафедра исследования операций

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Дипломная работа студента 5-го курса
Машарского Сергея Михайловича

Научный руководитель	проф. Малоземов В. Н.
Рецензент	проф. Даугавет И. К.

Допустить к защите:
Зав. кафедрой — проф. Петров Н. Н.

Санкт-Петербург
1998

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Приближение многочленами экспериментальных данных по равноотстоящим узлам — часто возникающая задача во многих приложениях. Целью данной работы является построение эффективного метода нахождения многочлена наилучшего среднеквадратического приближения. Под эффективностью метода понимается устойчивость и высокая скорость задействованных в нем вычислений. Отправной точкой в исследовании послужила работа П. Л. Чебышева [1], ключевой идеей в которой является разложение искомого многочлена наилучшего приближения по базису из дискретных ортогональных многочленов.

Теория непрерывных ортогональных многочленов дотаточно хорошо развита [2]. Дискретный же случай не нашел широкого отражения в литературе. Поэтому второй целью данной работы явилось построение адекватной теории дискретных ортогональных многочленов по аналогии с непрерывным случаем. Эта цель перекликается с первоначальной, поскольку именно использование свойств дискретных ортогональных многочленов, не задействованных в [1], позволяет значительно улучшить вычислительную схему, предложенную Чебышевым.

Дипломная работа состоит из трех глав, разбитых на 11 параграфов, добавления и двух приложений. В первой главе рассматривается общий случай ортогональных многочленов на равномерной сетке с произвольным весом. Приводится теорема существования и единственности дискретных ортонормированных многочленов, критерии ортогональности, алгебраические и аппроксимационные свойства. Последовательность изложения материала позаимствована из теории непрерывных ортогональных многочленов [3].

Во второй главе рассматривается случай единичного веса и изучаются более специальные свойства дискретных ортогональных многочленов. Ведущую роль здесь играет формула Родрига—Чебышева. С ее помощью находится явное выражение для дискретных ортогональных многочленов, вычисляется их норма и т. д. По-видимому, новым фактом является разностное уравнение для дискретных ортогональных многочленов.

Третья глава посвящена задаче полиномиальной аппроксимации методом наименьших квадратов. Здесь изложена (в модифицированном виде) вычислительная схема Чебышева для решения этой задачи [1]. Предложена альтернативная схема, основанная на идее рекуррентных вычислений [4]. Приведены результаты численных экспериментов по применению различных вычислительных схем и их анализ.

Основные результаты по методу наименьших квадратов, полученные в данной работе, опубликованы в [10].

Г Л А В А 1
Элементарные свойства ортогональных многочленов

§1. Основные определения

Обозначим через $0:n$ множество узлов $\{0,\,1,\,\ldots,\,n\}$, а через $\mathcal{F}(0:n)$ — множество всех функций, заданных на $0:n$ и принимающих вещественные значения. Набор чисел $\mathcal{P}=\{p_0,\,p_1,\,\ldots,\,p_n\}$ называется *весом* на множестве $0:n$, если выполняются условия

$$p_j>0,\quad j\in 0:n\,. \tag{1.1}$$

По заданному весу $\mathcal{P}$ можно определить его *степенные моменты*:

$$h_k=\sum_{j=0}^{n}p_j j^k\,,\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{1.2}$$

Фиксируем на множестве $0:n$ некоторый вес $\mathcal{P}$ и введем в $\mathcal{F}(0:n)$ скалярное произведение следующим образом:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{j=0}^{n}p_j f(j)g(j)\,,\quad f,g\in\mathcal{F}(0:n)\,. \tag{1.3}$$

Линейное множество $\mathcal{F}(0:n)$ с введенным скалярным произведением (1.3) превращается в гильбертово пространство, которое мы обозначим $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$.

Отметим, что всякую функцию $f\in l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ можно задать двумя способами: набором значений $\{f(0),\,f(1),\,\ldots,f(n)\}$ и аналитически. Второй способ подразумевает, что у нас имеется аналитическое выражение функции $f(x)$ для непрерывного аргумента x, и мы рассматриваем след этой функции на множестве $0:n$. При этом, разумеется, разным заданным аналитически функциям может соответствовать один и тот же набор значений на $0:n$.

Во избежание подобной неоднозначности введем понятие эквивалентности. Аналитически заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ будем называть *эквивалентными*, если наборы их значений на $0:n$ совпадают. Таким образом, под выражением $f\in l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ будем понимать класс эквивалентных функций с набором значений $\{f(0),\,f(1),\,\ldots,f(n)\}$. Для краткости обозначать класс будем указанием какого-нибудь его представителя.

Пусть задана система многочленов

$$P_0(x),\;P_1(x),\;\ldots,\;P_n(x), \tag{1.4}$$

в которой каждый многочлен $P_k(x)$ имеет степень k. Отметим, что рассматривать многочлены более высоких степеней в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ не имеет смысла, поскольку линейные комбинации элементов системы (1.4) исчерпывают все множество $\mathcal{F}(0:n)$.

Если для любых двух многочленов системы (1.4) выполняется условие

$$\langle P_k, P_m \rangle = 0, \quad k \neq m,$$

то многочлены (1.4) называются *ортогональными* в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$.

Система ортогональных многочленов (1.4) называется *ортонормированной*, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и его норма в пространстве $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ равна единице, т.е.

$$\|P_k\| := \langle P_k, P_k \rangle^{1/2} = 1\,, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$$

Таким образом, условие ортонормированности системы многочленов (1.4) имеет вид

$$\langle P_k, P_m \rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \tag{1.5}$$

§2. Теорема существования и критерий ортогональности

Лемма 1.1. *Если в системе $m+1$ многочленов*

$$F_0(x),\; F_1(x),\; \ldots,\; F_m(x), \quad m \leq n \tag{2.1}$$

каждый многочлен $F_k(x)$ имеет степень k, то всякий многочлен $Q_m(x)$ степени m можно единственным способом представить в виде

$$Q_m(x) = a_0F_0(x) + a_1F_1(x) + \ldots + a_mF_m(x). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} F_k(x) &= c_0^{(k)} + c_1^{(k)}x + \ldots + c_k^{(k)}x^k, \quad & c_k^{(k)} \neq 0, \\ Q_m(x) &= c_0 + c_1x + \ldots + c_mx^m, & c_m \neq 0. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $\{a_k\}$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} c_m &= a_mc_m^{(m)}, \\ c_{m-1} &= a_mc_{m-1}^{(m)} + a_{m-1}c_{m-1}^{(m-1)}, \\ c_{m-2} &= a_mc_{m-2}^{(m)} + a_{m-1}c_{m-2}^{(m-1)} + a_{m-2}c_{m-2}^{(m-2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 &= a_mc_1^{(m)} + a_{m-1}c_1^{(m-1)} + \ \ldots\ + a_1c_1^{(1)}, \\ c_0 &= a_mc_0^{(m)} + a_{m-1}c_0^{(m-1)} + \ \ldots\ + a_1c_1^{(0)} + a_0c_0^{(0)}. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен $c_m^{(m)} c_{m-1}^{(m-1)} \cdots c_0^{(0)} \neq 0$, следовательно, числа $\{a_k\}$ в формуле (2.2) определяются однозначно. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть $\Phi_m(x)$ — многочлен степени m, где $1 \le m \le n$. Тогда выполняется условие*

$$\sum_{j=0}^{n} p_j \Phi_m^2(j) > 0 \ .$$

Доказательство. В силу (1.1),

$$p_j \Phi_m(j)^2 \ge 0\,, \quad j \in 0:n\,.$$

Поскольку $\Phi_m(x)$ — многочлен степени m, то он не может обращаться в нуль в $n+1$ точках. Следовательно, существует узел $j_0 \in 0:n$ такой, что $p_{j_0}\Phi_m^2(j_0) > 0$, а значит, утверждение леммы доказано.

Теперь докажем основную теорему о существовании и единственности системы ортонормированных многочленов в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$.

Теорема 1.1. *Для всякого веса $\mathcal{P}$ существует единственная система многочленов $\left\{P_k(x)\right\}_{k=0}^{n}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортонормированности* (1.5).

Доказательство. Обозначим через μ_m старший коэффициент многочлена $P_m(x)$ и будем доказывать теорему по индукции. Поскольку $P_0(x) \equiv \mu_0 > 0$, то условие (1.5) здесь имеет вид

$$1 = \langle P_0, P_0 \rangle = \mu_0^2 \sum_{j=0}^{n} p_j \ ,$$

и в силу (1.1) многочлен $P_0(x)$ определен.

Далее, пусть определены многочлены

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_{m-1}(x), \tag{2.3}$$

удовлетворяющие условиям (1.5). Поскольку каждый многочлен $P_k(x)$ из системы (2.3) имеет степень k, то, добавляя к системе (2.3) многочлен x^m, можно неизвестный пока многочлен $P_m(x)$ в силу леммы 1.1 единственным образом представить в виде

$$P_m(x) = \mu_m x^m + \sum_{l=0}^{m-1} c_l^{(m)} P_l(x) \ , \tag{2.4}$$

где числа μ_m и $\left\{c_l^{(m)}\right\}$ надо выбрать так, чтобы выполнялись условия (1.5). Но по индукционному предположению эти условия выполняются для системы (2.3), поэтому при $k < m$ должно быть

$$\langle P_m, P_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} p_j \Big[\mu_m j^m + \sum_{l=0}^{m-1} c_l^{(m)} P_l(j) \Big] P_k(j) =$$

$$= \mu_m \sum_{j=0}^{n} p_j j^m P_k(j) + c_k^{(m)} = \mu_m b_{mk} + c_k^{(m)} = 0,$$

где через b_{mk} обозначена сумма при μ_m. Следовательно, если в разложении (2.4) положить $c_l^{(m)} = -\mu_m b_{ml}$, то то условия (1.5) будут выполняться при $k < m$. Таким образом, вместо (2.4) имеем формулу

$$P_m(x) = \mu_m \Big[x^m - \sum_{l=0}^{m-1} b_{ml} P_l(x) \Big] \ , \tag{2.5}$$

которая определяет ортогональный многочлен степени m с произвольным множителем μ_m. Этот многочлен является ортогональным ко всем многочленам системы (2.3). Остается выбрать μ_m так, чтобы выполнялось условие (1.5) при $k = m$. Подставляя (2.5) в (1.5), получаем равенство

$$\mu_m^2 \sum_{j=0}^{n} p_j \Big[j^m - \sum_{l=0}^{m-1} b_{ml} P_l(j) \Big]^2 = 1 \ ,$$

которое действительно единственным образом определяет коэффициент $\mu_m > 0$, так как внешняя сумма в левой части равенства в силу леммы 1.2 положительна. Теорема доказана.

Следствие. *Ортогональный многочлен единственен с точностью до постоянного множителя. Другими словами, если имеются две системы ортогональных многочленов последовательно возрастающих степеней* $\{Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\}$ *и* $\{R_0(x), R_1(x), \ldots, R_n(x)\}$*, то справедливо соотношение*

$$R_m(x) = \alpha_m Q_m(x), \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Установим теперь необходимое и достаточное условие ортогональности многочлена $P_m(x)$, которое называется *первым критерием ортогональности.*

Теорема 1.2. *Для того, чтобы многочлен* $P_m(x)$ *степени* m *был ортогональным в* $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$*, необходимо и достаточно, чтобы для всякого многочлена* $Q_k(x)$ *степени* $k < m$ *выполнялось условие*

$$\langle P_m, Q_k \rangle = 0 \,, \quad k < m. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть многочлен $P_m(x)$ является ортогональным, т.е. входит в систему многочленов $\{P_k(x)\}$, ортогональных в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$. По лемме 1.1 для произвольного многочлена $Q_k(x)$ имеем разложение

$$Q_k(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_k P_k(x)\,.$$

Теперь равенство (2.6) становится очевидным.

Обратно, пусть некий многочлен $P_m(x)$ удовлетворяет условию (2.6). Тогда вместо $Q_k(x)$ можно поставить любой многочлен системы (2.3), и, следовательно, для многочлена $P_m(x)$ будет иметь место формула (2.5). Значит, этот многочлен только множителем может отличаться от ортонормированного многочлена степени m, а именно это и утверждается в достаточности условия (2.6). Теорема доказана.

Следствие. *Для того, чтобы многочлен $P_m(x)$ степени m был ортогональным в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$, необходимо и достаточно выполнения равенств*

$$\sum_{j=0}^{n} p_j P_m(j)\, j^k = 0\,, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1.$$

Для установления еще одного свойства ортогональных многочленов нам понадобится следующее определение. Вес $\mathcal{P}$ будем называть *четным*, если выполняется условие

$$p_j = p_{n-j}, \quad j \in 0:n. \tag{2.7}$$

Теорема 1.3. *Если вес $\mathcal{P}$ — четный, то всякий ортогональный в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ многочлен $P_m(x)$ удовлетворяет тождеству*

$$P_m(n-x) \equiv (-1)^m P_m(x). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу теоремы 1.2 необходимое и достаточное условие ортогональности имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n} p_j P_m(j) Q_k(j) = 0\,, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1.$$

Заменой $i := n - j$, с учетом (2.7), это условие приводится к виду

$$\sum_{i=0}^{n} p_i P_m(n-i) Q_k(n-i) = 0\,.$$

Так как многочлен $Q_k(x)$ — произвольный, то и $Q_k(n-x)$ также произвольный многочлен степени k. Поэтому в силу той же теоремы 1.2 многочлен $P_m(n-x)$ является ортогональным и может только множителем отличаться от многочлена $P_m(x)$, т.е.

$$P_m(n-x) = c P_m(x).$$

Сравнивая старшие коэффициенты этих двух многочленов, находим, что $c = (-1)^m$. Теорема доказана.

§3. Рекуррентное соотношение

Теорема 1.4. *Для ортонормированных многочленов в $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ справедлива трехчленная рекуррентная формула*

$$\frac{\mu_m}{\mu_{m+1}} P_{m+1}(x) = (x - \alpha_m) P_m(x) - \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m} P_{m-1}(x) , \quad m = 1,\, 2,\, \dots,\, n-1, \tag{3.1}$$

где α_m — некоторая константа.

Доказательство. В силу леммы 1.1 имеем разложение

$$x P_m(x) = c_0 P_0(x) + \dots + c_m P_m(x) + \frac{\mu_m}{\mu_{m+1}} P_{m+1}(x) . \tag{3.2}$$

Умножим (3.2) скалярно на $P_k(x)$ при $k < m-1$. Поскольку $xP_k(x)$ есть многочлен степени $k+1$, причем $k+1 < m$, то в силу теоремы 1.2 левая часть обратится в нуль, и, следовательно, получим

$$c_k \langle P_k, P_k \rangle = 0 \ , \quad k = 0,\, 1,\, \dots,\, m-2.$$

Поэтому в (3.2) первые $m-1$ коэффициентов будут равны нулю, и эта формула примет вид

$$x P_m(x) = c_{m-1} P_{m-1}(x) + c_m P_m(x) + \frac{\mu_m}{\mu_{m+1}} P_{m+1}(x) . \tag{3.3}$$

Для определения коэффициента c_{m-1} умножим (3.3) скалярно на $P_{m-1}(x)$, в результате чего получим

$$c_{m-1} = \sum_{j=0}^{n} p_j j P_{m-1}(j) P_m(j) = \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m} \sum_{j=0}^{n} p_j \left[\mu_m j^m + \dots \right] P_m(j) = \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m} .$$

Переобозначив $c_m = \alpha_m$, из (3.3) приходим к формуле (3.1). Теорема доказана.

Рекуррентное соотношение (3.1) можно записать в более удобной форме:

$$\lambda_m P_{m+1}(x) = (x - \alpha_m) P_m(x) - \lambda_{m-1} P_{m-1}(x) , \tag{3.4}$$

где для краткости положено

$$\lambda_m = \frac{\mu_m}{\mu_{m+1}} , \quad m = 0,\, 1,\, \dots,\, n-1. \tag{3.5}$$

Наряду с многочленами $\{P_k(x)\}$, ортонормированными в $l^2_{\mathcal{P}}(0 : n)$, можно рассмотреть *ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом*

$$\tilde{P}_k(x) = \frac{1}{\mu_k} P_k(x)\,, \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n\,, \tag{3.6}$$

для которых рекуррентное соотношение имеет вид

$$\tilde{P}_{m+1}(x) = (x - \alpha_m)\tilde{P}_m(x) - \frac{\mu^2_{m-1}}{\mu^2_m}\tilde{P}_{m-1}(x)\,. \tag{3.7}$$

Лемма 1.3. *Справедлива оценка*

$$0 < \lambda_m \le n, \quad m = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из очевидного равенства

$$\frac{\mu_m}{\mu_{m+1}} = \sum_{j=0}^{n} p_j j P_m(j) P_{m+1}(j)\ ,$$

применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$\lambda^2_m = \frac{\mu^2_m}{\mu^2_{m+1}} \le \left(\sum_{j=0}^{n} p_j j^2 P^2_m(j)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_j P^2_{m+1}(j)\right)\ . \tag{3.9}$$

В первой сумме величина j^2 не превосходит n^2. После вынесения множителя n^2 обе суммы из (3.9) становятся равными единице. Этим лемма 1.3 доказана.

§4. Аппроксимационные свойства. Второй критерий ортогональности

Пусть у нас имеется $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n}$ — система ортонормированных многочленов в $l^2_{\mathcal{P}}(0 : n)$. Тогда для каждой функции $f \in l^2_{\mathcal{P}}(0 : n)$ можно определить *коэффициенты Фурье* по этой системе

$$a_k = \langle f, P_k \rangle\,, \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n \tag{4.1}$$

и рассматривать *частичные суммы Фурье*

$$s_m(x, f) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)\,, \quad m = 0,\,1,\,\ldots,\,n. \tag{4.2}$$

Частичные суммы (4.2) являются в некотором смысле наилучшими приближениями функции $f(x)$ в метрике пространства $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$.

В самом деле, для произвольного многочлена степени m

$$Q_m(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_m P_m(x) \tag{4.3}$$

имеем

$$\|f - Q_m\|^2 = \langle f - Q_m \, , \, f - Q_m \rangle = \langle f - \sum_{k=0}^{m} c_k P_k \, , \, f - \sum_{k=0}^{m} c_k P_k \rangle$$

что в силу ортонормированности многочленов $\{P_k(x)\}$ сводится к

$$\|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{m} c_k a_k + \sum_{k=0}^{m} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k^2 + \sum_{k=0}^{m} (c_k - a_k)^2 \ ,$$

откуда получаем оценку

$$\|f - Q_m\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k^2 \ . \tag{4.4}$$

В частности, для частичных сумм (4.2) получается равенство

$$\|f - s_m\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k^2 \ , \tag{4.5}$$

из которого в силу (4.4) находим

$$\|f - s_m\| \leq \|f - Q_m\| \ . \tag{4.6}$$

Таким образом, при каждом m частичная сумма (4.2) дает наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f(x)$ по сравнению со всеми многочленами (4.3) степени не выше m.

Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5. *Частичная сумма Фурье порядка n функции $f(x)$ принадлежит классу эквивалентности, представителем которого является $f(x)$, т.е.*

$$s_n(j, f) = f(j), \quad j \in 0:n. \tag{4.7}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$Q_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

и потребуем выполнения равенств

$$Q_n(j) = f(j), \quad j \in 0:n.$$

Такой многочлен существует, так как матрица системы линейных уравнений относительно коэффициентов $\{c_k\}$

$$c_0 + c_1 j + \ldots + c_n j^n = f(j), \quad j \in 0 : n$$

невырождена, поскольку ее определитель есть определитель Вандермонда. Таким образом, из (4.6) имеем

$$0 \le \|f - s_n\| \le \|f - Q_n\| = 0\,.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Из* (4.5) *при* $m = n$ *получаем* *р а в е н с т в о П а р с е в а л я*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2\;. \tag{4.8}$$

Рассмотрим одно экстремальное свойство ортогонального многочлена, которое является характеристическим и называется *вторым критерием ортогональности.*

Обозначим $\tilde{\Pi}_m$ множество всех многочленов степени m с единичным старшим коэффициентом. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$\Im(\tilde{Q}_m) = \langle Q_m, Q_m \rangle = \|Q_m\|^2 \tag{4.9}$$

на множестве $\tilde{\Pi}_m$.

Теорема 1.6. *Минимум функционала* (4.9) *на множестве* $\tilde{\Pi}_m$ *достигается тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{Q}_m(x) \equiv \tilde{P}_m(x) \equiv \frac{1}{\mu_m} P_m(x)\;, \tag{4.10}$$

причем этот минимум равен μ_m^{-2}*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как всякий многочлен $\tilde{Q}_m(x)$ из множества $\tilde{\Pi}_m$ имеет единичный старший коэффициент, то для него справедливо разложение

$$\tilde{Q}_m(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_{m-1} P_{m-1}(x) + \frac{1}{\mu_m} P_m(x)\;,$$

с помощью которого, используя равенство Парсеваля, находим

$$\Im(\tilde{Q}_m) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k + \frac{1}{\mu_m^2} \ge \frac{1}{\mu_m^2}\;.$$

Следовательно, минимум функционала (4.9) достигается тогда и только тогда, когда все $c_k \equiv 0$. Теорема доказана.

§5. Свойства нулей ортогональных многочленов

Мы по-прежнему рассматриваем $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n}$ — систему ортогональных многочленов в $l^2_{\mathcal{P}}(0 : n)$. Эти многочлены, как функции непрерывного аргумента x, обладают следующими свойствами.

Теорема 1.7. *Все нули ортогонального многочлена* $P_m(x)$ *при* $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *действительны, различны и расположены в открытом интервале* $(0, n)$.

Доказательство. Достаточно показать, что многочлен $P_m(x)$ в интервале $(0, n)$ меняет знак m раз. Допустим противное, что многочлен $P_m(x)$ меняет знак в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, где $k < m$. Тогда многочлен

$$Q_k(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k)$$

также меняет знак в тех же самых точках. Следовательно, произведение $P_m(x)Q_k(x)$ сохраняет знак на интервале $(0, n)$. Рассмотрим многочлен

$$\Phi_{m+k}(x) = cP_m(x)Q_k(x)$$

где постоянный множитель c выбирается таким образом, чтобы $\Phi_{m+k}(x)$ был неотрицательным при $x \in (0, n)$. Многочлен $\Phi_{m+k}(x)$ может иметь не более m различных нулей, поскольку его степень в точности равна $m + k$, а точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ — его нули четной кратности. Значит, найдется узел $j_0 \in 0 : n$ такой, что $\Phi_{m+k}(j_0) > 0$. В силу (1.1),

$$0 < \sum_{j=0}^{n} p_j \Phi_{m+k}(j) = c \sum_{j=0}^{n} p_j P_m(j) Q_k(j) \, .$$

Но, с другой стороны, по теореме 1.2 при условии $k < m$ последняя сумма равна нулю. Этим противоречием теорема 1.8 доказана.

В силу доказанной теоремы для нулей $\{x_k^{(m)}\}$ ортогонального многочлена $P_m(x)$ имееют место неравенства

$$0 < x_1^{(m)} < x_2^{(m)} < \ldots < x_k^{(m)} < \ldots < x_m^{(m)} < n \, . \tag{5.1}$$

Так как старший коэффициент ортонормированного многочлена $P_m(x)$ положителен, и $x_m^{(m)}$ — последний нуль этого многочлена, то в любом случае имеем

$$P_m(n) > 0. \tag{5.2}$$

Аналогично справедливы неравенства

$$P_{2k}(0) > 0, \quad P_{2k+1}(0) < 0. \tag{5.3}$$

Лемма 1.4. *При любом m из $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ два соседних многочлена $P_m(x)$ и $P_{m+1}(x)$ не могут иметь общих нулей.*

Доказательство. Допустим противное, что эти многочлены имеют общий нуль x_0. Тогда в силу рекуррентной формулы (3.1) x_0 является нулем и многочлена $P_{m-1}(x)$.

Рассуждая аналогично, придем к равенствам

$$P_{m-2}(x_0) = 0, \ \ldots, \ P_1(x_0) = 0, \ P_0(x_0) = 0,$$

последнее из которых невозможно. Это противоречие доказывает лемму 1.4.

Лемма 1.5. *Если $x_k^{(m)}$ есть нуль многочлена $P_m(x)$, то многочлены $P_{m-1}(x)$ и $P_{m+1}(x)$ имеют в точке $x_k^{(m)}$ значения разных знаков.*

Доказательство. Из той же рекуррентной формулы имеем

$$\frac{\mu_m}{\mu_{m+1}} P_{m+1}(x_k^{(m)}) = -\frac{\mu_{m-1}}{\mu_m} P_{m-1}(x_k^{(m)}), \tag{5.4}$$

и поскольку все $\mu_k > 0, \ k = 0, 1, \ldots, n$, лемма 1.5 доказана.

Теорема 1.8. *Для нулей двух соседних ортогональных многочленов $P_m(x)$ и $P_{m+1}(x)$ имеют место неравенства*

$$\begin{gathered} 0 < x_1^{(m+1)} < x_1^{(m)} < x_2^{(m+1)} < \ldots < x_k^{(m)} < x_{k+1}^{(m+1)} < x_{k+1}^{(m)} < \ldots \\ \ldots < x_{m-1}^{(m)} < x_m^{(m+1)} < x_m^{(m)} < x_{m+1}^{(m+1)} < n\,. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Иными словами, нули многочленов $P_m(x)$ и $P_{m+1}(x)$ перемежаются.

Доказательство. Так как $P_0(x_1^{(1)}) > 0$, то $P_2(x_1^{(1)}) < 0$ в силу леммы 1.5. Поэтому, учитывая (5.2) и (5.3), находим, что на концах отрезков $[0, x_1^{(1)}]$ и $[x_1^{(1)}, n]$ многочлен $P_2(x)$ имеет значения разных знаков. Следовательно, внутри каждого из этих отрезков $P_2(x)$ имеет по одному нулю, и для $m = 1$ теорема доказана.

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Допустим, что неравенство (5.5) справедливо. Для обоснования индукционного перехода от m к $m+1$ достаточно доказать, что многочлен $P_{m+2}(x)$ имеет нули в каждом из интервалов

$$\left(0, x_1^{(m+1)}\right), \ \left(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}\right), \ \ldots, \ \left(x_k^{(m+1)}, x_{k+1}^{(m+1)}\right), \ \ldots, \ \left(x_{m+1}^{(m+1)}, n\right). \tag{5.6}$$

В силу (5.3) и (5.4) многочлены $P_{m+2}(x)$ и $P_m(x)$ имеют значения одинаковых знаков в нуле и разных — в точке $x_1^{(m+1)}$. Но многочлен $P_m(x)$ в силу (5.5) не имеет нулей в интервале $\left(0, x_1^{(m+1)}\right)$. Следовательно, многочлен $P_{m+2}(x)$ на концах отрезка $\left[0, x_1^{(m+1)}\right]$ имеет значения разных знаков, и внутри этого отрезка у него есть по крайней мере один нуль. Аналогично доказывается существование нуля многочлена $P_{m+2}(x)$ в последнем из интервалов (5.6).

Далее, в силу (5.5) многочлен $P_m(x)$ имеет в интервале $\left(x_k^{(m+1)}, x_{k+1}^{(m+1)}\right)$ один простой нуль, а на концах — значения разных знаков. Поэтому по лемме 1.5 многочлен $P_{m+2}(x)$ имеет в точках $x_k^{(m+1)}$ и $x_{k+1}^{(m+1)}$ значения разных знаков, и, следовательно, внутри этого интервала он обращается в нуль хотя бы один раз. Таким образом, многочлен $P_{m+2}(x)$ имеет в каждом из $m+2$ интервалов (5.6) по одному нулю, и теорема 1.9 доказана.

ГЛАВА 2
Случай единичного веса

В этой главе рассмотрим часто встречающийся в приложениях частный случай, когда $\mathcal{P} = \{1,\, 1,\, \dots,\, 1\}$. Пространство $l^2_{\mathcal{P}}(0:n)$ с таким весом будем обозначать $l^2(0:n)$. Многочлены, ортогональные в $l^2(0:n)$, в дальнейшем будем называть просто ортогональными многочленами.

§1. Разностное уравнение

Покажем, что ортогональные многочлены удовлетворяют некоторому линейному однородному разностному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Для этого нам понадобятся несколько вспомогательных сведений, касающихся свойств конечных разностей. Напомним, что *конечной разностью* функции f в точке x называется величина

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)\,. \tag{1.1}$$

Конечные разности высших порядков определяются рекурсивно по формуле

$$\Delta^k f(x) = \Delta\big[\Delta^{k-1} f(x)\big] \quad k = 1, 2, \dots\,. \tag{1.2}$$

При этом считается по определению $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

Лемма 2.1. *Пусть f и g — некоторые функции, $C \neq 0$ — произвольная константа. Справедливы следующие равенства:*

$$\Delta\big(f(x) + g(x)\big) = \Delta f(x) + \Delta g(x)\,, \tag{1.3}$$

$$\Delta\big(C f(x)\big) = C\, \Delta f(x)\,, \tag{1.4}$$

$$\Delta\big(f(x) g(x)\big) = f(x)\, \Delta g(x) + g(x+1)\, \Delta f(x)\,. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу очевидности равенств (1.3) и (1.4) ограничимся доказательством равенства (1.5). Пользуясь определением конечной разности, находим

$$\Delta\big(f(x)g(x)\big) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) +$$

$$+ f(x)g(x+1) - f(x)g(x) = g(x+1)\,\Delta f(x) + f(x)\,\Delta g(x)\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть f и g — некоторые функции. Имеют место* *ф о р м у л ы   с у м м и р о в а н и я   п о   ч а с т я м*

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\,\Delta g(j) = f(j)g(j)\Big|_{j=0}^{j=n+1} - \sum_{j=0}^{n} g(j+1)\,\Delta f(j)\ , \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\,\Delta g(j) = f(j-1)g(j)\Big|_{j=0}^{j=n+1} - \sum_{j=0}^{n} g(j)\,\Delta f(j-1)\ , \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Цепочка равенств

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\Delta g(j) = \sum_{j=0}^{n} f(j)\big(g(j+1) - g(j)\big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f(j)g(j+1) - \sum_{j=-1}^{n-1} f(j+1)g(j+1) =$$

$$= f(n+1)g(n+1) - f(0)g(0) + \sum_{j=0}^{n} \big(f(j) - f(j+1)\big)g(j+1) =$$

$$= f(j)g(j)\Big|_{j=0}^{j=n+1} - \sum_{j=0}^{n} g(j+1)\,\Delta f(j)$$

показывает справедливость равенства (1.6). Аналогично,

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\Delta g(j) = \sum_{j=0}^{n} f(j)\big(g(j+1) - g(j)\big) = \sum_{j=1}^{n+1} f(j-1)g(j) - \sum_{j=0}^{n} f(j)g(j) =$$

$$= f(n)g(n+1) - f(-1)g(0) + \sum_{j=0}^{n} \big(f(j-1) - f(j)\big)g(j) =$$

$$= f(j-1)g(j)\Big|_{j=0}^{j=n+1} - \sum_{j=0}^{n} g(j)\,\Delta f(j-1)\,.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся так называемые *факториальные многочлены* или *обобщенные степени*

$$x^{[m]} = x(x-1)\cdots(x-m+1) = \binom{x}{m} m!\,, \quad x^{[0]} = 1\,. \tag{1.8}$$

Факториальный многочлен порядка m можно охарактеризовать как многочлен с единичным старшим коэффициентом, обращающийся в нуль в точках $0,\, 1,\, \ldots,\, m-1$.

Применение факториальных многочленов на равномерной сетке обусловлено сходством их свойств со свойствами обычных степеней x^m в непрерывном случае. В частности, легко вычисляются конечные разности факториального многочлена:

$$\Delta x^{[m]} = (x{+}1)^{[m]} - x^{[m]} = x(x{-}1)\cdots(x{-}m{+}2)\big[(x{+}1)-(x{-}m{+}1)\big] = m\,x^{[m-1]}.$$

Применяя эту формулу к вычислению вторых, третьих и т.д. разностей, находим, что вообще

$$\Delta^{\mu} x^{[m]} = m(m-1)\cdots(m-\mu+1)\,x^{[m-\mu]} = m^{[\mu]}\,x^{[m-\mu]}\,. \tag{1.9}$$

Лемма 2.3. *Пусть $Q_k(x)$ — многочлен степени k. Тогда его конечная разность $\Delta Q_k(x)$ есть многочлен степени $k-1$.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 имеем разложение

$$Q_k(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^{[2]} + \ldots + c_k x^{[k]}\,.$$

Согласно (1.3) и (1.4),

$$\Delta Q_k(x) = c_1 \Delta x + c_2 \Delta x^{[2]} + \ldots + c_k \Delta x^{[k]} = c_1 + 2c_2 x + \ldots + k c_k x^{[k-1]}\,.$$

Лемма доказана.

Представленных выше сведений вполне достаточно, чтобы доказать теорему — цель этого параграфа. Итак,

Теорема 2.1. *Ортогональный многочлен $P_m(x)$ является решением однородного разностного уравнения*

$$x(n+1-x)\,\Delta^2 y(x-1) + (n-2x)\,\Delta y(x) + m(m+1)\,y(x) = 0\,. \tag{1.10}$$

Доказательство. Возьмем $y = P_m(x)$ и рассмотрим функцию

$$z(x) = x(n+1-x)\,\Delta^2 y(x-1) + (n-2x)\,\Delta y(x)\,.$$

Согласно лемме 2.3, $z(x)$ является многочленом степени m. Покажем, что этот многочлен ортогональный. Заметим, что в силу (1.5)

$$\Delta\big[x(n+1-x)\,\Delta y(x-1)\big] = x(n+1-x)\,\Delta^2 y(x-1) + (n-2x)\,\Delta y(x) = z(x)\,.$$

Пусть $Q_k(x)$ — многочлен степени k, где $k < m$. Пользуясь формулой суммирования по частям (1.7), имеем

$$\langle z, Q_k\rangle = \sum_{j=0}^{n} Q_k(j) z(j) = \sum_{j=0}^{n} Q_k(j)\Delta\big[j(n+1-j)\,\Delta y(j-1)\big] =$$

$$= Q_k(j-1)\,j(n+1-j)\,\Delta y(j-1)\Big|_{j=0}^{j=n+1} - \sum_{j=0}^{n} j(n+1-j)\,\Delta y(j-1)\,\Delta Q_k(j-1)\,.$$

Так как $j(n+1-j) = 0$ при $j = 0$ и $j = n+1$, то член, стоящий вне знака суммы, обращается в нуль. Пользуясь на этот раз формулой (1.6), находим

$$\langle z, Q_k\rangle = -\sum_{j=0}^{n} \big[j(n+1-j)\,\Delta Q_k(j-1)\big]\,\Delta y(j-1) =$$

$$= -\big[j(n+1-j)\,y(j-1)\,\Delta Q_k(j-1)\big]\Big|_{j=0}^{j=n+1} + \sum_{j=0}^{n} \Delta\big[j(n+1-j)\,\Delta Q_k(j-1)\big]\,y(j)\,.$$

Согласно лемме 2.3, функция $\Delta\big[x(n+1-x)\,\Delta Q_k(x-1)\big]$ является многочленом степени k. Но $y = P_m(x)$ — ортогональный многочлен, поэтому в силу теоремы 1.2 последняя сумма равняется нулю. Окончательно имеем

$$\langle z, Q_k\rangle = 0\ .$$

Так как $Q_k(x)$ — произвольный многочлен степени $k < m$, то в силу той же теоремы 1.2 заключаем, что $z(x)$ может только множителем отличаться от ортогонального многочлена $P_m(x)$. Чтобы найти этот множитель, приравняем старшие коэффициенты многочленов $P_m(x)$ и $z(x)$.

Пусть старший коэффициент многочлена $P_m(x)$ равен s. Тогда старший коэффициент $z(x)$ равен

$$-m(m-1)s - 2ms = -m(m+1)s\,.$$

Таким образом,

$$x(n+1-x)\,\Delta^2 y(x-1) + (n-2x)\,\Delta y(x) = -m(m+1)\,y(x)\,.$$

Теорема доказана.

Пользуясь определнием конечных разностей, формулу (1.10) можно переписать в виде

$$(x+1)(n-x)\,y(x+1) - \big[2x(n-x) + n - m(m+1)\big]\,y(x) + x(n+1-x)\,y(x-1) = 0\,.$$

Отсюда получаем следующий результат.

Предложение. *Пусть известны значения ортогонального многочлена $P_m(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Тогда его значения в остальных точках множества $0 : n$ можно восстановить по формуле*

$$P_m(j) = \frac{2(j-1)(n+1-j) + n - m(m+1)}{j(n+1-j)}\, P_m(j-1) - \\ - \frac{(j-1)(n+2-j)}{j(n+1-j)}\, P_m(j-2)\,, \quad j \in 2 : n. \qquad (1.11)$$

§2. Формула Родрига—Чебышева

Следующая теорема представляет собой аналог *формулы Родрига* для классических ортогональных многочленов.

Теорема 2.2. *Для ортогональных многочленов в $l^2(0:n)$ имеет место представление*

$$P_m(x) = C_m\, \Delta^m \Big(x^{[m]}(n+m-x)^{[m]} \Big)\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n, \qquad (2.1)$$

где $\{C_m\}$ — некоторые коэффициенты.

Доказательство (ср. [1]). При $m = 0$ утверждение теоремы тривиально, поэтому рассмотрим случай $m > 0$. Введем для краткости обозначение

$$\Phi_m(x) = x^{[m]}(n+m-x)^{[m]}\,. \qquad (2.2)$$

Так как $\Phi_m(x) = 0$ при $x = 0, 1, \ldots, m-1$ и $x = n+m, n+m-1, \ldots, n+1$, то все выражения $\Phi_m(j)$, $\Phi_m(j+1)$, …, $\Phi_m(j+m-1)$ обращаются в нуль при $j = 0$ и $j = n+1$. Следовательно, определяемые по этим величинам разности $\Delta^{m-1}\Phi_m(j)$, $\Delta^{m-2}\Phi_m(j+1)$, …, $\Delta\Phi_m(j+m-2)$ также обращаются в нуль при $j = 0$ и $j = n+1$.

Пусть $F(x)$ — произвольная функция. Применим к выражению

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\, \Delta^m \Phi_m(j)$$

последовательно m раз формулу суммирования по частям (1.6). В результате получим

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\, \Delta^m \Phi_m(j) = \big[F(j)\, \Delta^{m-1}\Phi_m(j) - \Delta F(j)\, \Delta^{m-2}\Phi_m(j+1) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{m-1}\Phi_m(j+m-1)\, \Delta^{m-1}F(j)\big]\Big|_{j=0}^{j=n+1} +$$

$$+(-1)^m \sum_{j=0}^{n} \Phi_m(j+m)\, \Delta^m F(j)\ .$$

Но по вышесказанному относительно функции $\Phi_m(j+m-1)$ и разностей $\Delta^{m-1}\Phi_m(j)$, $\Delta^{m-2}\Phi_m(j+1)$, $\ldots$, $\Delta\Phi_m(j+m-2)$, все члены, стоящие вне знака суммы, обращаются в нуль. Следовательно

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\, \Delta^m \Phi_m(j) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n} \Phi_m(j+m)\, \Delta^m F(j)\ .$$

Заметим, что $\Phi_m(j+m) = 0$ при $j = n,\ n-1,\ \ldots,\ n-m+1$, поэтому верхним пределом суммирования можно положить $j = n-m$. Окончательно имеем

$$\sum_{j=0}^{n} F(j)\, \Delta^m \Phi_m(j) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n-m} \Phi_m(j+m)\, \Delta^m F(j)\ . \tag{2.3}$$

Пусть $Q_k(x)$ — произвольный многочлен степени k, где $k < m$. В силу леммы 2.3 конечная разность порядка m от $Q_k(x)$ есть тождественный нуль, поэтому, подставляя в формулу (2.3) $F(x) = Q_k(x)$, получаем

$$\langle \Delta^m \Phi_m, Q_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} Q_k(j)\, \Delta^m \Phi_m(j) = 0\ .$$

В силу теоремы 1.2 многочлен $\Delta^m \Phi_m(x)$ только множителем отличается от ортогонального многочлена $P_m(x)$. Теорема доказана.

Введем обозначение

$$\varphi_m(x) = \Delta^m \Phi_m(x) = \Delta^m \left(x^{[m]} (n+m-x)^{[m]} \right) . \tag{2.4}$$

Формулу (2.1) с учетом (2.4) можно записать в виде

$$P_m(x) = C_m \varphi_m(x)\,, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{2.5}$$

Найдем безразностное выражение для многочлена $\varphi_m(x)$.

Лемма 2.4. *Справедлива формула*

$$\varphi_m(x) = n^{[m]} m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}} \binom{m}{k} \binom{m+k}{k} x^{[k]}\ . \tag{2.6}$$

Доказательство. Из численного анализа известно [5], что любой многочлен $Q_m(x)$ степени не выше m можно представить в форме Ньютона:

$$Q_m(x) = Q_m(x_0) + \frac{x-x_0}{1}\, \Delta Q_m(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-1)}{1\cdot 2}\, \Delta^2 Q_m(x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_0-1)\cdots(x-x_0-m+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}\,\Delta^m Q_m(x_0)\ ,$$

или, с помощью обобщенных степеней,

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^{[k]}}{k!}\,\Delta^k Q_m(x_0)\ . \tag{2.7}$$

Применим (2.7) к $Q_m(x) = (n+m-x)^{[m]}$ при $x_0 = m$. Замечая, что по (1.9)

$$\Delta^k Q_m(x) = \Delta^k\Big((-1)^m (x-n-1)^{[m]}\Big) =$$
$$= (-1)^m\, m^{[k]}\,(x-n-1)^{[m-k]} = (-1)^k\, m^{[k]}\,(n+m-k-x)^{[m-k]}\,,$$

находим

$$(n+m-x)^{[m]} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\frac{m^{[k]}\,(n-k)^{[m-k]}}{k!}\,(x-m)^{[k]}\,.$$

Значит,

$$\Phi_m(x) = x^{[m]}\,(n+m-x)^{[m]} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\frac{m^{[k]}\,(n-k)^{[m-k]}}{k!}\,x^{[m+k]}\,.$$

Отсюда, снова пользуясь (1.9), получаем

$$\varphi_m(x) = \Delta^m\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\,\frac{m^{[k]}\,(n-k)^{[m-k]}}{k!}\,(m+k)^{[m]}\,x^{[k]}\,.$$

Учитывая, что

$$\frac{m^{[k]}(n-k)^{[m-k]}(m+k)^{[m]}}{k!} = \frac{m!\,(n-k)!\,(m+k)!}{(m-k)!\,(n-m)!\,(k!)^2} = m!\frac{n^{[m]}}{n^{[k]}}\binom{m}{k}\binom{m+k}{k},$$

приходим к формуле (2.6). Лемма доказана.

Первые четыре многочлена системы $\{\varphi_m\}_{m=0}^{n}$ выглядят следующим образом:

$\varphi_0(x) = 1\ ,$
$\varphi_1(x) = n - 2x\ ,$
$\varphi_2(x) = 2n(n-1) - 12(n-1)\,x + 12\,x^{[2]} = 2n(n-1) - 12nx + 12x^2,$
$\varphi_3(x) = 6n(n-1)(n-2) - 72(n-1)(n-2)\,x + 180(n-2)\,x^{[2]} - 120\,x^{[3]} =$
$\quad = 6n(n-1)(n-2) - 12(6n^2-3n+2)x + 180nx^2 - 120x^3.$

Лемма 2.5. *Для нормы многочлена $\varphi_m(x)$ имеет место формула*

$$\|\varphi_m\|^2 = \frac{(m!)^2}{2m+1}\,(n+m+1)^{[2m+1]}\ . \tag{2.8}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (2.3) при $F = \varphi_m$, получаем

$$\|\varphi_m\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \varphi_m(j)\, \Delta^m \Phi_m(j) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n-m} \Phi_m(j+m)\, \Delta^m \varphi_m(j)\ .$$

Так как $\Delta^m \varphi_m(j) = \Delta^{2m}\Phi_m(j) \equiv (-1)^m (2m)!$, то

$$\|\varphi_m\|^2 = (2m)! \sum_{j=0}^{n-m} (j+m)^{[m]} (n-j)^{[m]} = (2m)!\,(m!)^2 \sum_{j=0}^{n-m} \binom{j+m}{m}\binom{n-j}{m}.$$

В Добавлении будет доказана формула суммирования биномиальных коэффициентов

$$\sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-j}{m}\binom{s+j}{s} = \binom{n+s+1}{m+s+1}\ . \tag{2.9}$$

Пользуясь (2.9) при $s = m$, получаем

$$\|\varphi_m\|^2 = (2m)!\,(m!)^2 \binom{n+m+1}{2m+1} = (m!)^2\, \frac{(2m)!}{(2m+1)!}\,(n+m+1)^{[2m+1]}\ ,$$

откуда следует (2.8). Лемма доказана.

§3. Различные формы ортогональных многочленов

В этом параграфе мы рассмотрим три встречающихся в литературе нормировки дискретных ортогональных многочленов [3, 5, 6]: многочлены $P_m(x)$, удовлетворяющие условию $P_m(0) = 1$, ортонормированные многочлены $\hat{P}_m(x)$ и ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом $\tilde{P}_m(x)$.

Поскольку $\varphi_m(0) = n^{[m]}\, m!$, то имеет место связь

$$P_m(x) = \frac{1}{n^{[m]}\, m!}\, \varphi_m(x)\,. \tag{3.1}$$

Отсюда с учетом (2.6) получаем явное выражение для $P_m(x)$:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}} \binom{m}{k}\binom{m+k}{k} x^{[k]}\ . \tag{3.2}$$

Таблицы значений многочленов (3.2) при различных n приведены в [6].

Старший коэффициент многочлена $\varphi_m(x)$ равен $(-1)^m\,(2m)^{[m]}$, поэтому для $\tilde{P}_m(x)$ получаем

$$\tilde{P}_m(x) = \frac{(-1)^m}{(2m)^{[m]}}\, \varphi_m(x)\,, \tag{3.3}$$

или, в явном виде,

$$\tilde{P}_m(x) = \frac{n^{[m]}}{\binom{2m}{m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{n^{[k]}} \binom{m}{k} \binom{m+k}{k} x^{[k]} . \qquad (3.4)$$

С учетом (2.8) для ортонормированных многочленов имеем

$$\hat{P}_m(x) = \frac{(-1)^m}{m!} \sqrt{\frac{2m+1}{(n+m+1)^{[2m+1]}}}\, \varphi_m(x)\,, \qquad (3.5)$$

или, в явном виде,

$$\hat{P}_m(x) = \sqrt{\frac{(2m+1)\, n^{[m]}}{(n+m+1)^{[m+1]}}}\, \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{n^{[k]}} \binom{m}{k} \binom{m+k}{k} x^{[k]} . \qquad (3.6)$$

С помощью соотношений (3.1) и (3.3) из (2.8) можно получить значение нормы многочленов $P_m(x)$ и $\tilde{P}_m(x)$:

$$\|P_m\|^2 = \frac{(n+m+1)^{[m+1]}}{(2m+1)\, n^{[m]}}\,, \qquad (3.7)$$

$$\|\tilde{P}_m\|^2 = \left(\frac{m!}{(2m)^{[m]}}\right)^2 \frac{(n+m+1)^{[2m+1]}}{2m+1}\,. \qquad (3.8)$$

Найдем рекуррентное соотношение для многочленов (3.4). Старший коэффициент ортонормированного многочлена $\hat{P}_m(x)$ равен

$$\mu_m = \sqrt{\frac{(2m+1)\, n^{[m]}}{(n+m+1)^{[m+1]}}}\, \frac{\binom{2m}{m}}{n^{[m]}} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \sqrt{\frac{2m+1}{(n+m+1)^{[2m+1]}}}\,.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_{m-1}^2}{\mu_m^2} = \left(\frac{(2m-2)!}{(2m)!}\right)^2 \left(\frac{m!}{(m-1)!}\right)^4 \frac{2m-1}{2m+1}\, \frac{(n+m+1)^{[2m+1]}}{(n+m)^{[2m-1]}} =$$

$$= \frac{m^2\big((n+1)^2 - m^2\big)}{4\,(4m^2-1)}\,.$$

Подставляя найденное значение в формулу (3.7) предыдущей главы, получаем

$$\tilde{P}_{m+1}(x) = (x-\alpha_m)\tilde{P}_m(x) - \frac{m^2\left((n+1)^2 - m^2\right)}{4(4m^2-1)}\tilde{P}_{m-1}(x)\,.$$

Для отыскания коэффициента α_m подставим в эту формулу значение $x = 0$. Так как

$$\tilde{P}_m(0) = \frac{(-1)^m\, n^{[m]}}{\dbinom{2m}{m}} = \frac{(-1)^m\, n!\,(m!)^2}{(2m)!\,(n-m)!}\ ,$$

то в результате подстановки получим

$$\frac{(-1)^{m+1}\, n!\,\big((m+1)!\big)^2}{(2m+2)!\,(n-m-1)!} =$$

$$= (-\alpha_m)\frac{(-1)^m\, n!\,(m!)^2}{(2m)!\,(n-m)!} - \frac{m^2\left((n+1)^2-m^2\right)}{4(4m^2-1)}\frac{(-1)^{m-1}\, n!\,\big((m-1)!\big)^2}{(2m-2)!\,(n-m+1)!}\ ,$$

откуда после незначительных алгебраических преобразований найдем

$$\alpha_m = \frac{n}{2}\,.$$

Таким образом, рекуррентное соотношение для многочленов $\tilde{P}_m(x)$ имеет вид

$$\tilde{P}_{m+1}(x) = \big(x - \frac{n}{2}\big)\tilde{P}_m(x) - \frac{m^2\left((n+1)^2-m^2\right)}{4(4m^2-1)}\tilde{P}_{m-1}(x)\,. \qquad (3.9)$$

Начальными данными для (3.9) служат многочлены

$$\tilde{P}_0(x) = 1\,,$$

$$\tilde{P}_1(x) = x - \frac{n}{2}\,.$$

Зная значение коэффициента α_m, из формулы (3.1) предыдущей главы можно получить рекуррентное соотношение для ортонормированных многочленов:

$$\frac{m+1}{2}\sqrt{\frac{(n+1)^2-(m+1)^2}{(2m+1)(2m+3)}}\ \hat{P}_{m+1}(x) =$$

$$= \big(x-\frac{n}{2}\big)\hat{P}_m(x) - \frac{m}{2}\sqrt{\frac{(n+1)^2-m^2}{(2m-1)(2m+1)}}\ \hat{P}_{m-1}(x)\ ,$$

или

$$\hat{P}_{m+1}(x) = \frac{1}{m+1}\sqrt{\frac{(2m+3)(2m+1)}{(n+m+2)(n-m)}}\,(2x-n)\,\hat{P}_m(x) -$$

$$-\frac{m}{m+1}\sqrt{\frac{(2m+3)(n+m+1)(n-m+1)}{(2m-1)(n+m+2)(n-m)}}\ \hat{P}_{m-1}(x)\ , \qquad (3.10)$$

с начальными данными

$$\hat{P}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{n+1}}\ ,$$

$$\hat{P}_1(x) = \sqrt{\frac{3}{n(n+1)(n+2)}}\ (2x-n)\,.$$

Из (3.9) и (3.3) можно получить рекуррентное соотношение для многочленов $\varphi_m(x)$:

$$\varphi_{m+1}(x) = (2m+1)(n-2x)\varphi_m(x) - m^2\left((n+1)^2 - m^2\right)\varphi_{m-1}(x)\ , \qquad (3.11)$$

$$\varphi_0(x) = 1\,,$$

$$\varphi_1(x) = n - 2x\,,$$

а из (3.11) и (3.1) — для $P_m(x)$:

$$P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{(m+1)(n-m)}(n-2x)P_m(x) - \frac{m(n+m+1)}{(m+1)(n-m)}P_{m-1}(x)\ , \quad (3.12)$$

$$P_0(x) = 1\,,$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{2}{n}\,x\,.$$

В заключение параграфа укажем простую формулу для старшего многочлена системы (3.2)

Лемма 2.6. *Справедливы равенства*

$$P_n(j) = (-1)^j\binom{n}{j}\ , \quad j \in 0:n\,. \qquad (3.13)$$

Доказательство. Пусть $j \in 0 : n$. Запишем формулу (3.2) при $m = n$ и $x = j$:

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} j^{[k]}\ .$$

Заметим, что $j^{[k]} = 0$ при $k > j$, поэтому реально суммирование проводится по индексам $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, j$. Распишем эту формулу подробнее:

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,\frac{j!}{(j-k)!}\ .$$

Производя сокращения и перегруппировывая множители, получим

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{n+k}{n}\binom{j}{k}\ .$$

В Добавлении будет доказана формула суммирования биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{s+k}{n}\binom{j}{k} = (-1)^j\binom{s}{n-j} \, . \tag{3.14}$$

Применяя формулу (3.14) при $s = n$ и учитывая равенство

$$\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j} \, ,$$

убеждаемся в справедливости равенства (3.13). Лемма доказана.

Замечание. Пусть $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $Q_m(x) = x^m$. Тогда

$$0 = \Delta^n Q_m(0) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}Q_m(j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^m \, .$$

Этим объясняется ортогональность многочлена (3.13) всем многочленам степени не выше $n-1$.

ГЛАВА 3
Метод наименьших квадратов

§1. Круг идей П. Л. Чебышева

Полиномиальная аппроксимация экспериментальных данных по равноотстоящим узлам — часто возникающая задача во многих приложениях. Одна из возможных постановок этой задачи выглядит следующим образом.

Обозначим через Π_s множество алгебраических многочленов степени не выше s. Пусть задана дискретная функция $\{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$. Требуется найти многочленам из Π_s $(s \le n)$, наилучшим образом аппроксимирующий функцию f в метрике пространства $l^2(0:n)$:

$$\|f - \pi_s\|^2 := \sum_{j=0}^{n}[f(j) - \pi_s(j)]^2 \longrightarrow \min_{\pi_s \in \Pi_s} \, . \tag{1.1}$$

В этом параграфе представлен подход П. Л. Чебышева к данной проблематике, изложенный в работе [1].

Следуя [1], будем искать решение задачи (1.1) в виде

$$\pi_s(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_s\varphi_s(x)\,, \tag{1.2}$$

где $\{\varphi_m(x)\}$ — ортогональные многочлены, введенные в §2 главы 2. Тогда, согласно §4 главы 1, коэффициенты $\{a_m\}$ есть не что иное, как коэффициенты Фурье функции f, которые найдутся по формуле

$$a_m = \frac{1}{\|\varphi_m\|^2}\sum_{j=0}^{n}\varphi_m(j)f(j)\;, \quad m = 0,\,1,\,\ldots,\,s. \tag{1.3}$$

Вспоминая, что $\varphi_m(x) = \Delta^m\Phi_m(x)$, и пользуясь формулой (2.3) предыдущей главы, находим

$$\sum_{j=0}^{n}\varphi_m(j)f(j) = (-1)^m\sum_{j=0}^{n-m}(j+m)^{[m]}\,(n-j)^{[m]}\,\Delta^m f(j)\,,$$

или, переходя к биномиальным коэффициентам,

$$\sum_{j=0}^{n}\varphi_m(j)f(j) = (-1)^m\big(m!\big)^2\sum_{j=0}^{n-m}\binom{j+m}{m}\binom{n-j}{m}\Delta^m f(j)\,.$$

Внося эту величину в формулу (1.3) и подставляя известное значение нормы многочлена $\varphi_m(x)$ (лемма 2.5), получаем

$$a_m = (-1)^m\frac{2m+1}{(n+m+1)^{[2m+1]}}\sum_{j=0}^{n-m}\binom{j+m}{m}\binom{n-j}{m}\Delta^m f(j)\;.$$

Введем следующее обозначение:

$$F_m = (-1)^m\frac{2m+1}{n+1}\,\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-m}\binom{j+m}{m}\binom{n-j}{m}\Delta^m f(j)}{\displaystyle\binom{n+m+1}{m}}\;. \tag{1.4}$$

Тогда для коэффициентов (1.3) имеем

$$a_m = \frac{F_m}{n^{[m]}\,m!}\,.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для искомого многочлена наилучшего среднеквадратического приближения:

$$\pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s}\frac{F_m}{n^{[m]}\,m!}\,\varphi_m(x)\;, \tag{1.5}$$

где коэффициенты F_m находятся из формулы (1.4), а базисные многочлены $\varphi_m(x)$ — из формулы (2.6) предыдущей главы.

Запишем многочлен $\pi_s(x)$ в форме Ньютона (формула (2.7) предыдущей главы) при $x_0 = 0$:

$$\pi_s(x) = \sum_{\mu=0}^{s} \frac{\Delta^\mu \pi_s(0)}{\mu!}\, x^{[\mu]}\,. \tag{1.6}$$

Величины $\pi_s(0)$, $\Delta\pi_s(0)$, $\ldots$, $\Delta^s\pi_s(0)$, как будет показано ниже, легко вычисляются.

Найдем разность $\Delta^\mu\pi_s(x)$, где $\mu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$\Delta^\mu \pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} \frac{F_m}{n^{[m]}\, m!}\, \Delta^\mu \varphi_m(x)\ ,$$

$$\Delta^\mu \varphi_m(x) = n^{[m]}\, m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n^{[k]}} \binom{m}{k} \binom{m+k}{k} \Delta^\mu x^{[k]}\ .$$

Заметим, что $\Delta^\mu\varphi_m(x) \equiv 0$ при $m < \mu$, поэтому нижний предел суммирования в первой формуле можно заменить на $m = \mu$. Далее, согласно формуле (1.9) предыдущей главы,

$$\Delta^\mu x^{[k]} = k^{[\mu]}\, x^{[k-\mu]}\,,$$

что при $x = 0$ дает

$$k^{[\mu]}\, 0^{[k-\mu]} = \begin{cases} \mu!\,, & \text{если } k = \mu\,, \\ 0, & \text{если } k \neq \mu\,. \end{cases}$$

Следовательно, в сумме, представляющей величину $\Delta^\mu\varphi_m(x)$, при $x = 0$ остается только одно слагаемое, соответствующее $k = \mu$. Получаем

$$\Delta^\mu \varphi_m(0) = (-1)^\mu \frac{n^{[m]}\, m!}{n^{[\mu]}} \binom{m}{\mu} \binom{m+\mu}{\mu} \mu!\ ,$$

$$\Delta^\mu \pi_s(0) = \sum_{m=\mu}^{s} (-1)^\mu \frac{\mu!}{n^{[\mu]}} \binom{m}{\mu} \binom{m+\mu}{\mu} F_m\ .$$

Переходя к факториалам, выведенную формулу можно записать так:

$$\Delta^\mu \pi_s(0) = \sum_{m=\mu}^{s} (-1)^\mu \frac{(n-\mu)!\,(m+\mu)!\,F_m}{n!\,\mu!\,(m-\mu)!}\ . \tag{1.7}$$

Для упрощения вычислений по формуле (1.7) введем следующее обозначение:

$$(\mu, m) = (-1)^\mu \frac{(n-\mu)!\,(m+\mu)!}{n!\,\mu!\,(m-\mu)!}\ .$$

Рассмотрим подробнее свойства (μ, m). Заметим, что при $\mu = 0$ выражение

$$\frac{(n-\mu)!\,(m+\mu)!}{n!\,\mu!\,(m-\mu)!}$$

обращается в 1, а потому

$$(0, m) = 1\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

Далее,

$$\frac{(\mu+1, m)}{(\mu, m)} = -\frac{(n-\mu-1)!}{(n-\mu)!}\frac{(m+\mu+1)!}{(m+\mu)!}\frac{\mu!}{(\mu+1)!}\frac{(m-\mu)!}{(m-\mu-1)!} =$$

$$= -\frac{(m+\mu+1)(m-\mu)}{(n-\mu)(\mu+1)}\ ,$$

откуда следует, что

$$(\mu+1, m) = -\frac{m(m+1) - \mu(\mu+1)}{(n-\mu)(\mu+1)}\,(\mu, m)\ . \tag{1.9}$$

Рекуррентное соотношение (1.9) в совокупности с начальными условиями (1.8) дает возможность легко вычислять все значения множителей (μ, m) в формуле

$$\Delta^\mu \pi_s(0) = \sum_{m=\mu}^{s} (\mu, m) F_m\ .$$

На основании выше сказанного заключаем, что искомый многочлен наилучшего среднеквадратического приближения может быть представлен в виде (1.6), где величины $\pi_s(0)$, $\Delta\pi_s(0)$, $\ldots$, $\Delta^s\pi_s(0)$ найдутся по формулам

$$\begin{array}{rccccccccc}
\pi_s(0) = & F_0 + F_1 & + & F_2 + F_3 & + & \ldots & + & F_s\,, \\
\Delta\pi_s(0) = & (1,1)F_1 & + & (1,2)F_2 & + & (1,3)F_3 & + & \ldots & + & (1,s)F_s\,, \\
\Delta^2\pi_s(0) = & & & (2,2)F_2 & + & (2,3)F_3 & + & \ldots & + & (2,s)F_s\,, \\
\Delta^3\pi_s(0) = & & & & & (3,3)F_3 & + & \ldots & + & (3,s)F_s\,, \\
\multicolumn{10}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\Delta^s\pi_s(0) = & & & & & & & & & (s,s)F_s\,,
\end{array} \tag{1.10}$$

в которых величины F_0, F_1 $\ldots$, F_s определяются формулой (1.4), а множители

$$\begin{array}{cccc}
(1,1)\,, & (1,2)\,, & (1,3) & \ldots\ (1,s)\,, \\
 & (2,2)\,, & (2,3) & \ldots\ (2,s)\,, \\
 & & & \ddots \\
 & & & (s,s)
\end{array}$$

выводятся один из другого с помощью рекуррентного соотношения (1.9) с начальными данными (1.8). Эта схема, по существу, и была предложена П. Л. Чебышевым [1].

Вычисление значений многочлена $\pi_s(x)$, представленного в виде (1.6), целесообразно проводить по схеме Горнера для многочленов в форме Ньютона [7].

§2. Дальнейшее развитие

Несмотря на то, что задача о наименьших квадратах (1.1) имеет единственное решение, существует широкий творческий простор для выбора конкретной вычислительной схемы. В предыдущем параграфе был продемонстрирован подход, предложенный П. Л. Чебышевым. Здесь же мы рассмотрим альтернативный вариант, основанный на современной идеологии рекуррентных вычислений [7].

Теорема 3.1. *Пусть многочлен $\pi_s(x)$ представлен в виде*

$$\pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} a_m Q_m(x) \ ,$$

где многочлены $Q_m(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Q_{m+1}(x) = A_m(x-\alpha_m)Q_m(x) + B_m Q_{m-1}(x)\,. \tag{2.1}$$

Введем последовательность Клиншоу $\{b_m\}_{m=0}^{s+2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&b_{s+2} = b_{s+1} = 0\,,\\
&b_m - A_m(x-\alpha_m)b_{m+1} - B_{m+1}b_{m+2} = a_m\,, \qquad m = s,\, s-1,\, \ldots,\, 0.
\end{aligned}$$

Тогда значение многочлена π_s в точке x можно вычислить по формуле

$$\pi_s(x) = b_0 Q_0(x) + b_1\big[Q_1(x) - A_0(x-\alpha_0)Q_0(x)\big]\,. \tag{2.2}$$

Доказательство. Заменяя в представлении многочлены $\pi_s(x)$ каждый коэффициент a_m на соответствующую комбинацию b_m, b_{m+1} и b_{m+2}, получим:

$$\pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} a_m Q_m(x) = \sum_{m=0}^{s}\big[b_m - A_m(x-\alpha_m)b_{m+1} - B_{m+1}b_{m+2}\big]Q_m(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} b_m Q_m(x) - \sum_{m=1}^{s+1} A_{m-1}(x-\alpha_{m-1})b_m Q_{m-1}(x) - \sum_{m=2}^{s+2} B_{m-1}b_m Q_{m-2}(x) \ .$$

Выделяя из первой суммы два первых члена (при $m = 0$ и $m = 1$), а из второй суммы — один (при $m = 1$), и учитывая $b_{s+2} = b_{s+1} = 0$, получим:

$$\pi_s(x) = b_0 Q_0(x) + b_1 Q_1(x) - A_0(x - \alpha_0) b_1 Q_0(x) +$$
$$+ \sum_{m=2}^{s} b_m \left[Q_m(x) - A_{m-1}(x - \alpha_{m-1}) Q_{m-1}(x) - B_{m-1} Q_{m-2}(x) \right] .$$

Выражение в квадратных скобках, согласно (2.1), есть тождественный нуль, следовательно, равенство (2.2) справедливо. Теорема доказана.

Теорема 3.1 является модификацией рекуррентной схемы Клиншоу [4]. Использование этой схемы, как следует из результатов численных экспериментов, значительно упрощает процедуру вычисления значений многочлена $\pi_s(x)$, что приводит к сокращению времени и увеличению точности вычислений.

Найдем последовательности Клиншоу для четырех систем ортогональных многочленов, рассмотренных в предыдущей главе.

Для системы $\{\varphi_m(x)\}$ имеем:

$$b_m - (2m+1)(n-2x) b_{m+1} + (m+1)^2 \big((n+1)^2 - (m+1)^2 \big) b_{m+2} = a_m \,, \quad (2.3)$$

$$\pi_s(x) = b_0 \varphi_0(x) + b_1 \big[\varphi_1(x) - (n-2x) \varphi_0(x) \big] = b_0 \,; \quad (2.4)$$

для $\{\hat{P}_m(x)\}$:

$$\hat{b}_m - \frac{1}{m+1} \sqrt{\frac{(2m+3)(2m+1)}{(n+m+2)(n-m)}}\, (2x-n)\, \hat{b}_{m+1} +$$
$$+ \frac{m+1}{m+2} \sqrt{\frac{(2m+5)(n+m+2)(n-m)}{(2m+1)(n+m+3)(n-m-1)}}\, \hat{b}_{m+2} = \hat{a}_m \,, \quad (2.5)$$

$$\pi_s(x) = \hat{b}_0 \hat{P}_0(x) + \hat{b}_1 \big[\hat{P}_1(x) - \sqrt{\frac{3}{n(n+2)}}\, (2x-n) \hat{P}_0(x) \big] = \frac{\hat{b}_0}{\sqrt{n+1}} \,; \quad (2.6)$$

для $\{\tilde{P}_m(x)\}$:

$$\tilde{b}_m - (x - \frac{n}{2}) \tilde{b}_{m+1} + \frac{(m+1)^2}{4} \frac{(n+1)^2 - (m+1)^2}{4(m+1)^2 - 1}\, \tilde{b}_{m+2} = \tilde{a}_m \,, \quad (2.7)$$

$$\pi_s(x) = \tilde{b}_0 \tilde{P}_0(x) + \tilde{b}_1 \big[\tilde{P}_1(x) - (x - \frac{n}{2}) \tilde{P}_0(x) \big] = \tilde{b}_0 \,; \quad (2.8)$$

и, наконец, для $\{P_m(x)\}$:

$$\bar{b}_m - \frac{2m+1}{(m+1)(n-m)} (n-2x) \bar{b}_{m+1} + \frac{(m+1)(n+m+2)}{(m+2)(n-m-1)}\, \bar{b}_{m+2} = \bar{a}_m \,, \quad (2.9)$$

$$\pi_s(x) = \bar{b}_0 P_0(x) + \bar{b}_1 \big[P_1(x) - \frac{1}{n}(n-2x)P_0(x)\big] = \bar{b}_0 . \qquad (2.10)$$

Здесь a_m, $\hat{a}_m$, $\tilde{a}_m$, $\bar{a}_m$ — это коэффициенты в разложениях

$$\pi_s(x) = \sum_{m=0}^{s} a_m \varphi_m(x) = \sum_{m=0}^{s} \hat{a}_m \hat{P}_m(x) = \sum_{m=0}^{s} \tilde{a}_m \tilde{P}_m(x) = \sum_{m=0}^{s} \bar{a}_m P_m(x) ,$$

которые связаны между собой равенствами

$$a_m = \frac{\bar{a}_m}{n^{[m]}\, m!} = \frac{(-1)^m}{m!} \sqrt{\frac{2m+1}{(n+m+1)^{[2m+1]}}}\, \hat{a}_m = \frac{(-1)^m}{(2m)^{[m]}}\, \tilde{a}_m . \qquad (2.11)$$

В том случае, когда $\pi_s(x)$ есть решение экстремальной задачи (1.1), коэффициенты $\bar{a}_m$ есть не что иное, как коэффициенты F_m, определяемые формулой (1.4). Таким образом, если нам известны коэффициенты F_m, то мы можем вычислять значения многочлена наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$ пятью различными способами — по схеме, предложенной П. Л. Чебышевым, или с помощью модифицированной схемы Клиншоу для четырех рассмотренных выше систем ортогональных многочленов. Результаты численных экспериментов по применению различных вычислительных схем и их анализ будут представлены в §3.

Заметим, что вычисление самих коэффициентов F_m тоже можно произвести с использованием рекуррентных соотношений. Если представить F_m в виде

$$F_m = \sum_{j=0}^{n-m} \psi_m(j)\, \Delta^m f(j) \ , \qquad (2.12)$$

то для коэффициентов $\psi_m(j)$ будет иметь место рекуррентное соотношение

$$\psi_m(j+1) = \frac{(j+m+1)(n-j-m)}{(j+1)(n-j)}\, \psi_m(j) , \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-m-1,$$

$$\psi_m(0) = (-1)^m \frac{2m+1}{n+1} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n+m+1}{m}} \ . \qquad (2.13)$$

При этом вычислять $\psi_m(0)$ непосредственно нет необходимости, так как для них тоже есть рекуррентное соотношение:

$$\psi_{m+1}(0) = -\frac{(2m+3)(n-m)}{(2m+1)(n+m+2)}\, \psi_m(0) , \quad m = 0,\, 1,\, \ldots,\, s-1,$$

$$\psi_0(0) = \frac{1}{n+1} \ . \qquad (2.14)$$

§3. Численные эксперименты

С целью выяснения эффективности вычислительных схем, рассмотренных в двух предыдущих параграфах, были произведены численные эксперименты следующего вида. В качестве исходной функции $f(x)$ генерировался случайный многочлен вида

$$f_s(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \ldots + \xi_s x^s \,, \tag{3.1}$$

где ξ_0, ξ_1, …, ξ_s — равномерно распределенные на отрезке $\left[\text{-}1{,}1\right]$ независимые случайные величины. Затем для многочлена (3.1) вычислялись коэффициенты F_m (по формулам (2.12)–(2.14)) и строился многочлен наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$. Вычисление значений многочлена $\pi_s(x)$ производилось пятью различными способами — по схеме Чебышева (формулы (1.6) и (1.8)–(1.10)) и по модифицированной схеме Клиншоу для четырех систем дискретных ортогональных многочленов (формулы (2.3)–(2.10)). В каждом случае определялась относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\|f_s - \pi_s\|}{\|f_s\|} \,. \tag{3.2}$$

Теоретически многочлены $f_s(x)$ и $\pi_s(x)$ должны совпадать, однако на практике из-за ограниченности мантиссы и связанных с этим неизбежных ошибок округления величина ε оказывается отличной от нуля. Именно эта величина и служила критерием эффективности той или иной вычислительной схемы.

На сетках $0 : n$ при $n = 50$ и $n = 100$ и степенях исходного многочлена $s = 10, 15, 20, \ldots, 45$ было произведено по $N = 1000$ численных экспериментов. В каждом эксперименте определялась относительная погрешность (3.2), и по окончании вычислялись ее наименьшее (min) и наибольшее (max) значения, а также среднее значение

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \,, \tag{3.3}$$

и величина среднеквадратического отклонения

$$\sigma = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon})^2 \right]^{1/2} . \tag{3.4}$$

Изложенный план проведения экспериментов был реализован в виде программы в среде программирования Delphi Desktop v. 2.0 фирмы Borland International на объектно-ориентированном расширении языка Pascal. Вычисления велись с *двойной точностью* (тип double: 8 байт, диапазон значений $5,0\cdot 10^{-324}...1,7\cdot 10^{308}$). Листинг основных вычислительных процедур исходных модулей с некоторыми комментариями приведен в Приложении 2.

Результаты экспериментов приведены в Приложении 1. Основываясь на этих данных, можно сделать вывод, что вычисление многочлена наилучшего среднеквадратического приближения $\pi_s(x)$ по модифицированной схеме Клиншоу значительно устойчивее, чем по схеме, предложенной П. Л. Чебышевым.

Кроме точности, важное значение имеет такая характеристика вычислений, как затраченное на них время. В табл. 1 приведено среднее время, затраченное на решение одной аппроксимационной задачи в зависимости от вида эксперимента.[1] Результаты по применению модифицированной схемы Клиншоу даны только для системы многочленов $\{P_m(x)\}$, поскольку различия между четырьмя вариантами схемы Клиншоу весьма незначительны по сравнению со схемой Чебышева. В последнем столбце приведено среднее время нахождения коэффициентов F_m (общая часть схем Чебышева и Клиншоу). Значения приведены в миллисекундах.

Из данных табл. 1 видно, что модифицированная схема Клиншоу не только устойчивее, но и значительно быстрее схемы Чебышева.

Таблица 1

Вид эксперимента	Чебышев	Клиншоу	Вычисление $\{F_m\}$
$n=50,\ s=10$	15,7	11,9	10,1
$n=50,\ s=15$	22,5	12,9	10,3
$n=50,\ s=20$	30,7	14,1	10,7
$n=50,\ s=25$	40,7	15,2	11,0
$n=50,\ s=30$	53,0	16,3	11,3
$n=50,\ s=35$	67,4	17,2	11,4
$n=50,\ s=40$	83,9	18,2	11,7
$n=50,\ s=45$	102,1	19,0	11,8
$n=100,\ s=10$	22,6	14,7	11,2
$n=100,\ s=15$	35,2	17,1	12,4
$n=100,\ s=20$	51,7	19,6	13,1
$n=100,\ s=25$	72,4	21,9	13,9
$n=100,\ s=30$	97,1	24,2	14,8
$n=100,\ s=35$	125,7	26,3	15,4
$n=100,\ s=40$	158,5	28,5	16,0
$n=100,\ s=45$	195,1	30,7	16,7

[1] Вычисления проводились на ЭВМ типа IBM PC с процессором Intel Pentium с тактовой частотой 75 МГц и встроенным математическим сопроцессором.

Добавление

Докажем формулы (2.9) и (3.14) из второй главы.

Напомним, что *обобщенным биномиальным коэффициентом* называется величина

$$\binom{n}{m} = \prod_{k=1}^{m} \frac{n-k+1}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}, \qquad n \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N}.$$

При этом по определению

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{-m} = 0, \qquad n \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N}.$$

Одним из основных свойств обобщенных биномиальных коэффициентов является соотношение

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

Доказательство формулы (2.9) проведем индукцией по n. При $n = 0$ (2.9) превращается в равенство $0 = 0$, если $m > 0$, или $1 = 1$, если $m = 0$. Далее, пусть (2.9) верно при $n = n_0$ и любых $m,\ s \geq 0$. При $n = n_0 + 1$ имеем

$$\sum_{j=0}^{n_0+1-m} \binom{n_0+1-j}{m}\binom{s+j}{s} = \sum_{j=0}^{n_0+1-m} \left[\binom{n_0-j}{m} + \binom{n_0-j}{m-1}\right]\binom{s+j}{s} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_0-m} \binom{n_0-j}{m}\binom{s+j}{s} + \sum_{j=0}^{n_0-(m-1)} \binom{n_0-j}{m-1}\binom{s+j}{s}.$$

Замена верхнего предела в первой сумме законна, так как $\binom{n_0-j}{m} = 0$ при $j = n_0+1-m$. Пользуясь индукционным предположением, получаем

$$\sum_{j=0}^{n_0+1-m} \binom{n_0+1-j}{m}\binom{s+j}{s} = \binom{n_0+s+1}{m+s+1} + \binom{n_0+s+1}{m+s} =$$

$$= \binom{(n_0+1)+s+1}{m+s+1}.$$

Формула (2.9) доказана.[2]

---

[2]Доказательство индукционного перехода корректно и в случае $m = 0$, поскольку по определению $\binom{n_0-j}{-1} = 0$.

Доказательство формулы (3.14) проведем индукцией по j. При $j = 0$ (3.14) превращается в равенство $\binom{s}{n} = \binom{s}{n}$. Далее, пусть (3.14) верно при $j = j_0$ и любых n, $s \geq 0$. При $j = j_0 + 1$ имеем

$$\sum_{k=0}^{j_0+1} (-1)^k \binom{s+k}{n} \binom{j_0+1}{k} = \binom{s}{n} + \sum_{k=1}^{j_0+1} (-1)^k \binom{s+k}{n} \left[\binom{j_0}{k} + \binom{j_0}{k-1} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{j_0+1} (-1)^k \binom{s+k}{n} \binom{j_0}{k} + \sum_{k=1}^{j_0+1} (-1)^k \binom{s+k}{n} \binom{j_0}{k-1} .$$

Поскольку $\binom{j_0}{k} = 0$ при $k = j_0 + 1$, верхним пределом в первой сумме можно положить $k = j_0$. Во второй сумме сделаем замену $k' := k - 1$. Получим

$$\sum_{k=0}^{j_0+1} (-1)^k \binom{s+k}{n} \binom{j_0+1}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{j_0} (-1)^k \binom{s+k}{n} \binom{j_0}{k} + \sum_{k'=0}^{j_0} (-1)^{k'+1} \binom{s+1+k'}{n} \binom{j_0}{k'} ,$$

что в силу индукционного предположения равно

$$(-1)^{j_0} \binom{s}{n-j_0} - (-1)^{j_0} \binom{s+1}{n-j_0} = (-1)^{j_0+1} \binom{s}{n-j_0-1} .$$

Формула (3.14) доказана.

В заключение отметим, что более общие аналоги формул (2.9) и (3.14) представлены в [8] и [9].

Литература

[1] Чебышев П. Л. *Об интерполировании величин равноотстоящих* / Полн. собр. соч. Т.1. М., Изд-во АН СССР, 1949. С. 66–85.

[2] Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* Физматгиз, 1962. 500 с.

[3] Суетин П. К. *Классические ортогональные многочлены.* Изд-во "Наука", М., 1979. 416 с.

[4] Clenshaw C. W. *A Note on the Summation of Chebyshev Series* // Math. Tabl. Aids Comput. 1955. Vol. 9. P. 118–120.

[5] Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений.* Т.1. М., Физматгиз, 1962. 464 с.

[6] Милн В. Э. *Численный анализ.* М., Изд-во иностр. лит-ры, 1951. 292 с.

[7] Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Рекуррентные вычисления.* Л., Изд-во ЛГУ, 1976. 56 с.

[8] Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ.* Т.1. Изд-во "Мир", М., 1976. 736 с.

[9] Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.* Изд-во "Наука", М., 1982. 256 с.

[10] Машарский С. М. *О методе наименьших квадратов по равноотстоящим узлам* // Вестник молодых ученых, № 1, 1997. С. 11–19.

Приложение 1

n=50, s=10	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$2{,}248{\cdot}10^{-16}$	$9{,}023{\cdot}10^{-17}$	$9{,}641{\cdot}10^{-17}$	$1{,}093{\cdot}10^{-16}$	$1{,}254{\cdot}10^{-16}$
max	$1{,}757{\cdot}10^{-14}$	$4{,}899{\cdot}10^{-16}$	$4{,}321{\cdot}10^{-16}$	$4{,}578{\cdot}10^{-16}$	$5{,}153{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$4{,}851{\cdot}10^{-15}$	$2{,}610{\cdot}10^{-16}$	$2{,}594{\cdot}10^{-16}$	$2{,}608{\cdot}10^{-16}$	$2{,}885{\cdot}10^{-16}$
σ	$3{,}486{\cdot}10^{-15}$	$5{,}977{\cdot}10^{-17}$	$5{,}490{\cdot}10^{-17}$	$5{,}914{\cdot}10^{-17}$	$6{,}044{\cdot}10^{-17}$

n=50, s=15	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}222{\cdot}10^{-15}$	$1{,}048{\cdot}10^{-16}$	$1{,}169{\cdot}10^{-16}$	$1{,}109{\cdot}10^{-16}$	$1{,}103{\cdot}10^{-16}$
max	$3{,}772{\cdot}10^{-13}$	$4{,}780{\cdot}10^{-16}$	$4{,}269{\cdot}10^{-16}$	$4{,}658{\cdot}10^{-16}$	$5{,}161{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$5{,}386{\cdot}10^{-14}$	$2{,}474{\cdot}10^{-16}$	$2{,}484{\cdot}10^{-16}$	$2{,}464{\cdot}10^{-16}$	$2{,}778{\cdot}10^{-16}$
σ	$3{,}964{\cdot}10^{-14}$	$5{,}151{\cdot}10^{-17}$	$4{,}957{\cdot}10^{-17}$	$5{,}174{\cdot}10^{-17}$	$5{,}679{\cdot}10^{-17}$

n=50, s=20	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}011{\cdot}10^{-14}$	$8{,}885{\cdot}10^{-17}$	$1{,}111{\cdot}10^{-16}$	$8{,}114{\cdot}10^{-17}$	$1{,}317{\cdot}10^{-16}$
max	$3{,}279{\cdot}10^{-12}$	$4{,}304{\cdot}10^{-16}$	$4{,}329{\cdot}10^{-16}$	$4{,}839{\cdot}10^{-16}$	$5{,}105{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$6{,}897{\cdot}10^{-13}$	$2{,}434{\cdot}10^{-16}$	$2{,}408{\cdot}10^{-16}$	$2{,}439{\cdot}10^{-16}$	$2{,}704{\cdot}10^{-16}$
σ	$5{,}176{\cdot}10^{-13}$	$5{,}479{\cdot}10^{-17}$	$5{,}252{\cdot}10^{-17}$	$5{,}236{\cdot}10^{-17}$	$6{,}029{\cdot}10^{-17}$

n=50, s=25	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$2{,}163{\cdot}10^{-13}$	$1{,}022{\cdot}10^{-16}$	$9{,}944{\cdot}10^{-17}$	$9{,}086{\cdot}10^{-17}$	$1{,}234{\cdot}10^{-16}$
max	$2{,}616{\cdot}10^{-11}$	$4{,}622{\cdot}10^{-16}$	$5{,}770{\cdot}10^{-16}$	$5{,}806{\cdot}10^{-16}$	$6{,}026{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$6{,}278{\cdot}10^{-12}$	$2{,}452{\cdot}10^{-16}$	$2{,}459{\cdot}10^{-16}$	$2{,}491{\cdot}10^{-16}$	$2{,}715{\cdot}10^{-16}$
σ	$4{,}520{\cdot}10^{-12}$	$5{,}767{\cdot}10^{-17}$	$6{,}101{\cdot}10^{-17}$	$6{,}341{\cdot}10^{-17}$	$6{,}966{\cdot}10^{-17}$

n=50, s=30	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$6{,}428{\cdot}10^{-13}$	$9{,}590{\cdot}10^{-17}$	$1{,}117{\cdot}10^{-16}$	$9{,}455{\cdot}10^{-17}$	$1{,}207{\cdot}10^{-16}$
max	$2{,}508{\cdot}10^{-10}$	$5{,}460{\cdot}10^{-16}$	$5{,}869{\cdot}10^{-16}$	$7{,}289{\cdot}10^{-16}$	$7{,}303{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$6{,}190{\cdot}10^{-11}$	$2{,}582{\cdot}10^{-16}$	$2{,}610{\cdot}10^{-16}$	$2{,}614{\cdot}10^{-16}$	$2{,}836{\cdot}10^{-16}$
σ	$4{,}497{\cdot}10^{-11}$	$7{,}028{\cdot}10^{-17}$	$7{,}460{\cdot}10^{-17}$	$7{,}379{\cdot}10^{-17}$	$8{,}199{\cdot}10^{-17}$

n=50, s=35	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}086{\cdot}10^{-11}$	$8{,}666{\cdot}10^{-17}$	$1{,}162{\cdot}10^{-16}$	$1{,}029{\cdot}10^{-16}$	$1{,}532{\cdot}10^{-16}$
max	$1{,}783{\cdot}10^{-9}$	$6{,}206{\cdot}10^{-16}$	$6{,}375{\cdot}10^{-16}$	$6{,}530{\cdot}10^{-16}$	$6{,}700{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$5{,}287{\cdot}10^{-10}$	$2{,}730{\cdot}10^{-16}$	$2{,}753{\cdot}10^{-16}$	$2{,}710{\cdot}10^{-16}$	$3{,}676{\cdot}10^{-16}$
σ	$3{,}196{\cdot}10^{-10}$	$7{,}849{\cdot}10^{-17}$	$8{,}563{\cdot}10^{-17}$	$8{,}192{\cdot}10^{-17}$	$7{,}102{\cdot}10^{-17}$

n=50, s=40	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$2{,}937{\cdot}10^{-11}$	$1{,}147{\cdot}10^{-16}$	$1{,}106{\cdot}10^{-16}$	$9{,}457{\cdot}10^{-17}$	$1{,}222{\cdot}10^{-16}$
max	$9{,}003{\cdot}10^{-9}$	$7{,}061{\cdot}10^{-16}$	$7{,}634{\cdot}10^{-16}$	$6{,}793{\cdot}10^{-16}$	$1{,}032{\cdot}10^{-15}$
$\bar{\varepsilon}$	$3{,}247{\cdot}10^{-9}$	$2{,}865{\cdot}10^{-16}$	$2{,}807{\cdot}10^{-16}$	$2{,}859{\cdot}10^{-16}$	$3{,}121{\cdot}10^{-16}$
σ	$1{,}793{\cdot}10^{-9}$	$9{,}284{\cdot}10^{-17}$	$8{,}919{\cdot}10^{-17}$	$9{,}474{\cdot}10^{-17}$	$1{,}119{\cdot}10^{-16}$

n=50, s=45	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}803{\cdot}10^{-10}$	$1{,}250{\cdot}10^{-16}$	$1{,}292{\cdot}10^{-16}$	$1{,}118{\cdot}10^{-16}$	$1{,}319{\cdot}10^{-16}$
max	$6{,}787{\cdot}10^{-8}$	$8{,}015{\cdot}10^{-16}$	$7{,}726{\cdot}10^{-16}$	$7{,}253{\cdot}10^{-16}$	$8{,}898{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$1{,}452{\cdot}10^{-8}$	$2{,}960{\cdot}10^{-16}$	$3{,}022{\cdot}10^{-16}$	$3{,}018{\cdot}10^{-16}$	$3{,}218{\cdot}10^{-16}$
σ	$8{,}509{\cdot}10^{-9}$	$9{,}981{\cdot}10^{-17}$	$1{,}078{\cdot}10^{-16}$	$1{,}044{\cdot}10^{-16}$	$1{,}206{\cdot}10^{-16}$

n=100, s=10	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}550{\cdot}10^{-16}$	$1{,}275{\cdot}10^{-16}$	$1{,}087{\cdot}10^{-16}$	$1{,}161{\cdot}10^{-16}$	$1{,}091{\cdot}10^{-16}$
max	$2{,}524{\cdot}10^{-14}$	$5{,}257{\cdot}10^{-16}$	$4{,}619{\cdot}10^{-16}$	$4{,}551{\cdot}10^{-16}$	$4{,}985{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$5{,}221{\cdot}10^{-15}$	$2{,}746{\cdot}10^{-16}$	$2{,}586{\cdot}10^{-16}$	$2{,}608{\cdot}10^{-16}$	$2{,}661{\cdot}10^{-16}$
σ	$3{,}717{\cdot}10^{-15}$	$6{,}224{\cdot}10^{-17}$	$5{,}711{\cdot}10^{-17}$	$5{,}802{\cdot}10^{-17}$	$6{,}047{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=15	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$2{,}336{\cdot}10^{-15}$	$1{,}588{\cdot}10^{-16}$	$1{,}385{\cdot}10^{-16}$	$1{,}516{\cdot}10^{-16}$	$1{,}427{\cdot}10^{-16}$
max	$5{,}962{\cdot}10^{-13}$	$5{,}517{\cdot}10^{-16}$	$5{,}410{\cdot}10^{-16}$	$5{,}133{\cdot}10^{-16}$	$5{,}823{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$1{,}001{\cdot}10^{-13}$	$3{,}207{\cdot}10^{-16}$	$3{,}013{\cdot}10^{-16}$	$2{,}988{\cdot}10^{-16}$	$3{,}078{\cdot}10^{-16}$
σ	$7{,}674{\cdot}10^{-14}$	$6{,}292{\cdot}10^{-17}$	$5{,}780{\cdot}10^{-17}$	$5{,}795{\cdot}10^{-17}$	$5{,}926{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=20	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$9{,}688{\cdot}10^{-14}$	$1{,}712{\cdot}10^{-16}$	$1{,}701{\cdot}10^{-16}$	$1{,}205{\cdot}10^{-16}$	$1{,}370{\cdot}10^{-16}$
max	$1{,}290{\cdot}10^{-11}$	$5{,}708{\cdot}10^{-16}$	$5{,}127{\cdot}10^{-16}$	$5{,}064{\cdot}10^{-16}$	$5{,}882{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$3{,}130{\cdot}10^{-12}$	$3{,}435{\cdot}10^{-16}$	$3{,}215{\cdot}10^{-16}$	$3{,}148{\cdot}10^{-16}$	$3{,}255{\cdot}10^{-16}$
σ	$1{,}759{\cdot}10^{-12}$	$6{,}551{\cdot}10^{-17}$	$5{,}791{\cdot}10^{-17}$	$5{,}884{\cdot}10^{-17}$	$5{,}895{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=25	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}497{\cdot}10^{-12}$	$1{,}927{\cdot}10^{-16}$	$1{,}563{\cdot}10^{-16}$	$1{,}780{\cdot}10^{-16}$	$1{,}906{\cdot}10^{-16}$
max	$1{,}406{\cdot}10^{-10}$	$6{,}003{\cdot}10^{-16}$	$5{,}866{\cdot}10^{-16}$	$8{,}416{\cdot}10^{-16}$	$5{,}784{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$3{,}593{\cdot}10^{-11}$	$3{,}640{\cdot}10^{-16}$	$3{,}367{\cdot}10^{-16}$	$3{,}308{\cdot}10^{-16}$	$3{,}405{\cdot}10^{-16}$
σ	$2{,}432{\cdot}10^{-11}$	$7{,}073{\cdot}10^{-17}$	$6{,}552{\cdot}10^{-17}$	$6{,}707{\cdot}10^{-17}$	$6{,}185{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=30	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$2{,}123{\cdot}10^{-11}$	$2{,}024{\cdot}10^{-16}$	$1{,}865{\cdot}10^{-16}$	$1{,}604{\cdot}10^{-16}$	$1{,}878{\cdot}10^{-16}$
max	$1{,}898{\cdot}10^{-9}$	$7{,}034{\cdot}10^{-16}$	$6{,}519{\cdot}10^{-16}$	$5{,}659{\cdot}10^{-16}$	$6{,}195{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$3{,}996{\cdot}10^{-10}$	$3{,}777{\cdot}10^{-16}$	$3{,}501{\cdot}10^{-16}$	$3{,}430{\cdot}10^{-16}$	$3{,}541{\cdot}10^{-16}$
σ	$2{,}920{\cdot}10^{-10}$	$7{,}841{\cdot}10^{-17}$	$6{,}776{\cdot}10^{-17}$	$6{,}811{\cdot}10^{-17}$	$6{,}632{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=35	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}553{\cdot}10^{-10}$	$1{,}759{\cdot}10^{-16}$	$1{,}656{\cdot}10^{-16}$	$1{,}789{\cdot}10^{-16}$	$1{,}532{\cdot}10^{-16}$
max	$1{,}903{\cdot}10^{-8}$	$7{,}521{\cdot}10^{-16}$	$7{,}092{\cdot}10^{-16}$	$6{,}464{\cdot}10^{-16}$	$6{,}700{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$5{,}304{\cdot}10^{-9}$	$3{,}935{\cdot}10^{-16}$	$3{,}681{\cdot}10^{-16}$	$3{,}579{\cdot}10^{-16}$	$3{,}676{\cdot}10^{-16}$
σ	$3{,}865{\cdot}10^{-9}$	$8{,}374{\cdot}10^{-17}$	$7{,}635{\cdot}10^{-17}$	$7{,}698{\cdot}10^{-17}$	$7{,}102{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=40	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$1{,}132{\cdot}10^{-9}$	$1{,}920{\cdot}10^{-16}$	$1{,}970{\cdot}10^{-16}$	$1{,}651{\cdot}10^{-16}$	$1{,}880{\cdot}10^{-16}$
max	$3{,}669{\cdot}10^{-7}$	$7{,}647{\cdot}10^{-16}$	$6{,}938{\cdot}10^{-16}$	$7{,}419{\cdot}10^{-16}$	$6{,}832{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$6{,}326{\cdot}10^{-8}$	$4{,}072{\cdot}10^{-16}$	$3{,}794{\cdot}10^{-16}$	$3{,}685{\cdot}10^{-16}$	$3{,}805{\cdot}10^{-16}$
σ	$4{,}762{\cdot}10^{-8}$	$8{,}861{\cdot}10^{-17}$	$8{,}086{\cdot}10^{-17}$	$7{,}970{\cdot}10^{-17}$	$7{,}414{\cdot}10^{-17}$

n=100, s=45	Чебыш.	$\{\varphi_m\}$	$\{P_m\}$	$\{\hat{P}_m\}$	$\{\tilde{P}_m\}$
min	$3{,}167{\cdot}10^{-8}$	$2{,}056{\cdot}10^{-16}$	$2{,}044{\cdot}10^{-16}$	$1{,}738{\cdot}10^{-16}$	$2{,}157{\cdot}10^{-16}$
max	$4{,}351{\cdot}10^{-5}$	$8{,}396{\cdot}10^{-16}$	$8{,}054{\cdot}10^{-16}$	$7{,}475{\cdot}10^{-16}$	$7{,}642{\cdot}10^{-16}$
$\bar{\varepsilon}$	$4{,}578{\cdot}10^{-6}$	$4{,}212{\cdot}10^{-16}$	$3{,}953{\cdot}10^{-16}$	$3{,}882{\cdot}10^{-16}$	$3{,}968{\cdot}10^{-16}$
σ	$4{,}342{\cdot}10^{-6}$	$9{,}792{\cdot}10^{-17}$	$9{,}042{\cdot}10^{-17}$	$9{,}134{\cdot}10^{-17}$	$8{,}505{\cdot}10^{-17}$

Приложение 2

```
CONST
   MaxPoints=100;
   MaxDegree=50;

VAR
   NumOfPoints: word;                         {размерность сетки — число n}
   PolDegree: byte;                           {степень многочлена — число s}
   Data,                                      {массив зачений f_s(j)}
   Delta: array [0..MaxPoints] of double;     {массив зачений Δ^m f_s(j)}
   abar,                                      {коэффициенты ā_m}
   aphi,                                      {коэффициенты a_m}
   ahat,                                      {коэффициенты â_m}
   atilde: array [0..MaxDegree] of double;    {коэффициенты ã_m}

Procedure FillData;                  {заполнение массива зачений f_s(j)}
Var
   xi: array [0..MaxDegree] of double;
   i: byte;
function RandomPolinom (x: double): double;
var
   j: byte;
   tmp: double;
begin
   tmp:=xi[PolDegree];
   for j:=PolDegree-1 downto 0 do tmp:=xi[j]+x*tmp;
   RandomPolinom:=tmp
end;
Begin
   for i:=0 to PolDegree do xi[i]:=-1+2*Random;
   for i:=0 to NumOfPoints do
     begin
       Data[i]:=RandomPolinom(i);
       Delta[i]:=Data[i]
     end
End;

Procedure Fill_abar;              {заполнение массива коэффициентов ā_m}
Var
   m,i: byte;
   n: word;
   psi0: double;
function F: double;                      {вычисление коэффициента F_m}
var
   psi,sum: double;
   j: byte;
begin
   psi:=psi0;
   sum:=psi*Delta[0];
   for j:=1 to n-m do
```

```
      begin
        psi:=psi*(j+m)*(n-j-m+1)/(j*(n-j+1));
        sum:=sum+psi*Delta[j]
      end;
    F:=sum
end;
Begin
    n:=NumOfPoints;
    psi0:=1.0/(n+1);
    for m:=0 to PolDegree do
    begin
        abar[m]:=F;
        for i:=0 to n-m do Delta[i]:=Delta[i+1]-Delta[i];
        psi0:=-1.0*psi0*(m+m+3)*(n-m)/((m+m+1)*(n+m+2));
      end
End;

Procedure Fill_ahat;                    {заполнение массива коэффициентов â_m}
Var
    m: byte;
    kappa: double;
Begin
    kappa:=1.0/(NumOfPoints+1);
    for m:=0 to PolDegree do
      begin
        ahat[m]:=abar[m]/sqrt(kappa);
        kappa:=kappa*(m+m+3)*(NumOfPoints-m)/((m+m+1)*
               (NumOfPoints+m+2))
      end
End;

Procedure Fill_aphi;                    {заполнение массива коэффициентов a_m}
Var
    m: byte;
    kappa: double;
Begin
    kappa:=1;
    for m:=0 to PolDegree do
      begin
        aphi[m]:=abar[m]*kappa;
        kappa:=kappa/((m+1)*(NumOfPoints-m))
      end
End;

Procedure Fill_atilde;                  {заполнение массива коэффициентов ã_m}
Var
    m: byte;
    kappa: double;
Begin
    kappa:=1;
    for m:=0 to PolDegree do
```

```
    begin
      atilde[m]:=abar[m]*kappa;
      kappa:=-kappa*(m+m+2)*(m+m+1)/((m+1)*(m+1)*
             (NumOfPoints-m))
  end
End;

Function pi_Cheb (x: double): double;      {вычисление π_s(x) по
                                                  схеме Чебышева}
Var
  mu,m1: byte;
  sum,kappa: double;
  Bracket: array [0..MaxDegree] of double;          {массив значений
                                               коэффициентов (μ, m)}
function dp: double;                           {вычисление Δ^μ π_s(0)}
var
  m: byte;
  dpsum: double;
begin
  dpsum:=0;
  for m:=mu to PolDegree do
    dpsum:=dpsum+Bracket[m]*abar[m];
  dp:=dpsum
end;
Begin
  sum:=0;
  kappa:=1;
  for mu:=0 to PolDegree do Bracket[mu]:=1;
  for mu:=0 to PolDegree do
    begin
      sum:=sum+(dp*kappa);
      kappa:=kappa*(x-mu)/(mu+1);
      for m1:=mu+1 to PolDegree do
        Bracket[m1]:=-Bracket[m1]*(m1*(m1+1)-mu*(mu+1))/
                     ((NumOfPoints-mu)*(mu+1))
    end;
  pi_Cheb:=sum
End;

Function pi_phi (x: double): double;      {вычисление π_s(x) по схеме
                                                   Клиншоу для φ_m(x)}
Var
  b: array [0..MaxDegree+2] of double;
  m: byte;
Begin
  b[PolDegree+2]:=0;
  b[PolDegree+1]:=0;
  for m:=PolDegree downto 0 do
    b[m]:=aphi[m]+b[m+1]*(m+m+1)*(NumOfPoints-x-x)-b[m+2]*
          (m+1)*(m+1)*(NumOfPoints+m+2)*(NumOfPoints-m);
  pi_phi:=b[0]
End;
```

```
Function pi_P (x: double): double;                 {вычисление πs(x) по схеме
                                                      Клиншоу для Pm(x)}
Var
   b: array [0..MaxDegree+2] of double;
   m: byte;
Begin
   b[PolDegree+2]:=0;
   b[PolDegree+1]:=0;
   for m:=PolDegree downto 0 do
     b[m]:=abar[m]+b[m+1]*(NumOfPoints-x-x)*(m+m+1)/
           ((m+1)*(NumOfPoints-m))-b[m+2]*(m+1)*
           (NumOfPoints+m+2)/((m+2)*(NumOfPoints-m-1));
   pi_P:=b[0]
End;

Function pi_Pnorm (x: double): double;             {вычисление πs(x) по схеме
                                                      Клиншоу для P̂m(x)}
Var
   b: array [0..MaxDegree+2] of double;
   m: byte;
   n: word;
Begin
   n:=NumOfPoints;
   b[PolDegree+2]:=0;
   b[PolDegree+1]:=0;
   for m:=PolDegree downto 0 do
     b[m]:=ahat[m]+b[m+1]*(n-x-x)*sqrt((m+m+3)*(m+m+1)/
           ((n+m+2)*(n-m)))/(m+1)-b[m+2]*(m+1)*sqrt((m+m+5)*
           (n+2+m)*(n-m)/((m+m+1)*(n+m+3)*(n-m-1)))/(m+2);
   pi_Pnorm:=b[0]/sqrt(n+1)
End;

Function pi_Psing (x: double): double;             {вычисление πs(x) по схеме
                                                      Клиншоу для P̃m(x)}
Var
   b: array [0..MaxDegree+2] of double;
   m:byte;
Begin
   b[PolDegree+2]:=0;
   b[PolDegree+1]:=0;
   for m:=PolDegree downto 0 do
     b[m]:=atilde[m]+b[m+1]*(x-NumOfPoints/2)-b[m+2]*
           (m+1)*(m+1)*(NumOfPoints+m+2)*(NumOfPoints-m)*
           0.25/(4*(m+1)*(m+1)-1);
   pi_Psing:=b[0]
End;

END.
```