САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Машарский Сергей Михайлович

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2001 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук, профессор
Малоземов Василий Николаевич

Официальные оппоненты —
доктор физико-математических наук, профессор
Демьянович Юрий Казимирович,

кандидат физико-математических наук
Третьяков Алексей Андреевич

Ведущая организация —
Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Защита состоится «_____»___________________2001 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 4526.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «_____»_____________________2001 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Открытие в 1965 г. быстрого преобразования Фурье явилось мощным стимулом для развития дискретного гармонического анализа. Широкое распространение цифровой электронной вычислительной техники способствовало проникновению в классический дискретный гармонический анализ других ортогональных преобразований, таких как дискретное преобразование Уолша, дискретное преобразование Хаара, дискретное косинусное, пилообразное и другие преобразования. В их числе стоит и дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона.

В последние полтора десятилетия бурно развивается (в основном, за рубежом) новый аппарат обработки сигналов — вейвлеты (всплески). Отправной точкой лавинообразного развития вейвлетной теории принято считать работы И. Добеши конца восьмидесятых – начала девяностых годов. Отличительной чертой вейвлетов является их способность одновременно характеризовать как частотные, так и временные особенности сигнала. Успехи этого нового направления чистой и прикладной математики столь существенны, что говорят о «вейвлетной революции». Из огромного количества публикаций по этой теме следует выделить монографии К. Чуи, И. Мейера, М. Виккерхаузера, С. Малла, Г. Стрэнга, а также русскоязычные статьи А. П. Петухова, И. Я. Новикова, С. Б. Стечкина, В. А. Желудева.

Одной из специфических конструкций вейвлетной теории являются вейвлет-пакеты — наборы из нескольких вейвлетных базисов. Вейвлет-пакеты позволяют получать детальные частотно-временные портреты сигналов, варьируя разрешение (масштабность) по времени и по частоте. В этом смысле анализ сигналов с помощью вейвлет-пакетов можно рассматривать как естественное дополнение к традиционному анализу Фурье. С другой стороны, использование сразу всех базисов из вейвлет-пакета приводит к крайне избыточному представлению сигнала. Это обеспечивает возможность выбирать из пакета ортогональный базис, адаптированный к определенному классу сигналов или даже к отдельному сигналу.

В конце девяностых годов В. Н. Малоземовым и А. А. Третьяковым был разработан новый подход к быстрому преобразованию Фурье, при котором результаты промежуточных вычислений интерпретируются как коэффициенты разложений по некоторым ортогональным базисам. При длине периода N, равной 2^s, в пространстве дискретных периодических сигналов построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. В каждом блоке сигналы различаются лишь сдвигом аргумента. Из блоков, принадлежащих *разным базисам* рекуррентной последовательности, формируются обобщенные вейвлетные базисы. Это значительно расширяет возможности цифровой обработки сигналов. В работе[1] с аналогичных позиций

[1] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Секционирование, ортогональность и перестановки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1 (№ 1). С. 16–21.

проанализировано дискретное преобразование Уолша.

В диссертационной работе рассматривается более общая по сравнению с работой[1] ситуация, когда длина периода N равна n^s. В пространстве дискретных N-периодических сигналов строятся несколько рекуррентных последовательностей ортогональных базисов. Финальным базисом во всех последовательностях является дискретный базис Виленкина–Крестенсона. Соответствующие обобщения оказались возможными благодаря тому, что удалось разобраться с источником рекуррентных соотношений для базисов. Если раньше при $N = 2^s$ такие соотношения, по существу, *предъявлялись*, то теперь они *выводятся* на основе различных факторизаций матрицы Виленкина–Крестенсона порядка $N = n^s$. Эффективные расчетные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матрицы. После построения последовательности ортогональных базисов естественным образом формируется обобщенный вейвлет-пакет.

Большинство из описанных выше ортогональных преобразований используется с целью получения спектра сигнала для его дальнейшей цифровой обработки или анализа. Для решения этих задач часто требуется умение устанавливать связь между спектрами исходных сигналов и спектрами их сдвига, свертки и корреляции. В случае дискретных преобразований Фурье, Уолша, Виленкина–Крестенсона это не вызывает затруднений. В общем случае этот вопрос рассмотрен в работах Н. Н. Айзенберга, О. Т. Трофимлюка, Г. А. Кухарева и др. Полученные в этих работах результаты отражают свойства дискретных ортогональных преобразований, являющихся собственными по отношению к некоторому оператору сдвига. В отличие от классических ортогональных преобразований, вейвлет-преобразования не являются собственными по отношению к традиционным операторам сдвига, и поэтому результаты упомянутых выше работ к ним неприменимы. Однако вопрос о спектрах сигналов в вейвлетных базисах остается актуальным.

Цель работы.

1) Построить ортогональные вейвлетные базисы в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$.
2) Исследовать спектральные свойства дискретных сигналов в этих базисах.
3) Установить более тесную связь между дискретным гармоническим анализом и вейвлетной теорией.

Методика исследования. В работе использовались методы дискретного гармонического анализа, матричной алгебры и вейвлетной теории.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) В пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$ построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов.

2) С помощью этих последовательностей базисов построены четыре варианта быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона (БПВК).
3) Установлено, что в процессе реализации алгоритмов БПВК второго рода вычисляются коэффициенты вейвлетных разложений (в частности, разложений по базисам Хаара–Крестенсона).
4) Доказаны теоремы о спектре сдвига, свертки и корреляции дискретных сигналов в базисах Хаара–Крестенсона.
5) Установлена связь между базисами Хаара–Крестенсона, связанными с прореживанием по частоте и прореживанием по времени, в том числе с использованием понятия логарифмически автореверсного спектра.
6) Построены два обобщенных кратномасштабных анализа по основанию n пространства дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при цифровой обработке сигналов различной природы.

Апробация работы и публикации. По результатам диссертации сделаны доклады на семинарах кафедры исследования операций и кафедры вычислительной математики мат-мех факультета СПбГУ, на Санкт-Петербургском городском семинаре по всплескам и их приложениям, на Санкт-Петербургском городском семинаре по конструктивной теории функций, на научно-методическом семинаре Института тепло- и массообмена НАН Беларуси (г. Минск), на международной конференции “Optimization of Finite Element Approximations & Splines and Wavelets” (Санкт-Петербург, 25–29 июня 2001 г.), на международной конференции “Neural Networks and Artificial Intelligence” (Минск, Беларусь, 2–5 октября 2001 г.). По теме диссертации опубликовано шесть работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на 13 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации — 115 страниц. Список литературы насчитывает 45 наименований. В диссертации имеется 2 рисунка и 2 таблицы.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена дискретному преобразованию Виленкина–Крестенсона. На основе четырех вариантов факторизации матрицы функций Виленкина–Крестенсона построены четыре рекуррентных последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$. С помощью этих последовательностей базисов получены четыре варианта быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона.

В § 1 вводится терминология и описываются основные объекты дискретного гармонического анализа. Дается определение и основные свойства перестановки reverse и операций поразрядного сложения $\underset{n}{\oplus}$ и вычитания $\underset{n}{\ominus}$ по модулю n. Приводятся необходимые сведения о функциях и матрице Виленкина–Крестенсона.

Пусть $j,\,k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, где $N = n^s$. Запишем эти числа в n-ичном коде: $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$, $k = (k_{s-1}, \ldots, k_0)_n$, и введем операцию $\{k, j\}_s = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu\, j_\nu$. Обозначим $\omega_n = \exp(2\pi i/n)$. Сигналы $v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, называются дискретными функциями Виленкина–Крестенсона. Они образуют мультипликативный ортогональный базис в пространстве дискретных N-периодических сигналов $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$. Матрица Виленкина–Крестенсона V_N, строки которой составлены из значений функций $v_k(j)$ на основном периоде, имеет порядок $N = n^s$ и является s-й кронекеровой степенью матрицы Фурье F_n порядка n. Она стандартным приемом раскладывается на множители (факторизуется)[2]:

$$V_N = T_1\, T_2 \cdots T_s, \tag{1}$$

где $T_\nu = \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes F_n \otimes \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}}$, E_n — единичная матрица порядка n. Сомножители в разложении (1) допускают перестановку в любом порядке. В частности,

$$V_N = T_s\, T_{s-1} \cdots T_1. \tag{2}$$

Кроме того, матрица Виленкина–Крестенсона может быть двумя способами представлена в виде обычной степени разреженной матрицы порядка N:

$$V_N = D^s, \tag{3}$$

где $D[lN_1 + p,\, pn + q] = F_n[l, q]$, $p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, $l, q = 0, 1, \ldots, n-1$, и $D[k, j] = 0$ при остальных $k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$;

$$V_N = C^s, \tag{4}$$

где $C[pn + l,\, qN_1 + p] = F_n[l, q]$, $p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, $l, q = 0, 1, \ldots, n-1$, и $C[k, j] = 0$ при остальных $k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Факторизация (3) предложена Гудом[2], факторизация (4) предъявляется, по-видимому, впервые.

В § 2 и § 3 на основе представлений (3) и (4) соответственно строятся две последовательности ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$. Последовательность базисов $\{h_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$ определяется следующим образом: $h_0(k; j) = \delta_N(j - k)$ и $h_\nu = D^\nu h_0$, $\nu = 1, \ldots, s$. Здесь $\delta_N(j)$ — это единичный N-периодический импульс; сдвиги $\delta_N(j - k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, образуют

[2]Good I. J. *The interaction algorithm and practical Fourier analysis* // J. Royal Stat. Soc. (London). 1958. Vol. B-20. No. 2. P. 361–372.

естественный ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_N$. Аналогично строится последовательность базисов $\{\xi_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$: $\xi_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $\xi_\nu = C^\nu \xi_0$, $\nu = 1, \ldots, s$. В обоих случаях финальный базис является базисом Виленкина–Крестенсона: $h_s(k;j) = \xi_s(k;j) = v_k(j)$.

Для базисных сигналов $h_\nu(k)$ и $\xi_\nu(k)$ можно получить явное представление. Введем обозначения $N_\nu = N/n^\nu$, $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$.

Теорема 2.1. *Справедливо равенство*

$$h_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{l,q\}_\nu} h_0(p\Delta_{\nu+1} + q),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Теорема 3.1. *Справедливо равенство*

$$\xi_\nu(p\Delta_{\nu+1} + l) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{l,q\}_\nu} \xi_0(qN_\nu + p),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Зная структуру матриц D и C, входящих в факторизации (3) и (4), можно строить последовательности базисов h_ν и ξ_ν рекуррентно, не пользуясь явным представлением. Формулы пересчета имеют вид

$$h_\nu(lN_1 + p) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{lq} h_{\nu-1}(pn + q),$$

$$\xi_\nu(pn + l) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{lq} \xi_{\nu-1}(qN_1 + p),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

В § 4 описаны в явном виде быстрые алгоритмы разложения сигналов по всем промежуточным базисам h_ν и ξ_ν. А именно, любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису $h_\nu(0)$, $h_\nu(1)$, …, $h_\nu(N-1)$ при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, h_\nu(k).$$

Тогда

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(lN_1 + p) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{-lq} x_{\nu-1}(pn + q), \tag{5}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Аналогично сигнал x можно разложить по ортогональному базису $\xi_\nu(0)$, $\xi_\nu(1)$, $\ldots$, $\xi_\nu(N-1)$ при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, \xi_\nu(k).$$

При этом

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu(pn + l) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{-lq}\, y_{\nu-1}(qN_1 + p), \tag{6}$$

$$l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ в обоих случаях получаем коэффициенты разложения по базису Виленкина–Крестенсона. Вычислительные схемы (5) и (6) назовем *быстрыми преобразованиями Виленкина–Крестенсона первого рода*, связанными соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени.*

Также в § 4 дается строго математический анализ понятия частоты для дискретных функций Виленкина–Крестенсона, введенного на интуитивном уровне в монографии[3] (с. 79–84).

В § 5 на основе разложения (2) в пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ строится последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, которая определяется следующим образом: $f_0(k; j) = \delta_N(j - k)$ и $f_\nu = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1 f_0$, $\nu = 1, \ldots, s$. Выясняется структура матриц-сомножителей T_ν.

Лемма 5.2. *Матрица T_ν имеет следующую структуру:*

$$T_\nu[(np + \sigma)\Delta_\nu + l, (np + \tau)\Delta_\nu + l] = \omega_n^{\sigma\tau},$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma, \tau = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$T_\nu[k, j] = 0 \ \textit{при остальных} \ k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Равенство $f_\nu = T_\nu f_{\nu-1}$ и лемма 5.2 позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $f_{\nu-1}$ к базису f_ν:

$$f_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$f_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, f_{\nu-1}\big(l + (np + \tau)\Delta_\nu\big),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Для базисных сигналов $f_\nu(k)$ указан явный вид.

[3] Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975. 208 с.

Теорема 5.2. *Имеет место явное представление*

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{l,q\}_\nu} f_0(q + p\Delta_{\nu+1}),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Отмечается, что построенные ортогональные базисы с точностью до нумерации сигналов совпадают с базисами, построенными в § 2. Показано, что при такой нумерации базисы естественным образом разбиваются на блоки, в каждом из которых сигналы различаются лишь сдвигом аргумента.

Теорема 5.3. *Справедливо тождество*

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(l; j - p\Delta_{\nu+1}),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

В § 6 с аналогичных позиций проанализирована факторизация (1). На ее основе в пространстве $\mathbb{C}_N$ построена последовательность ортогональных базисов $\{g_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, которая определяется следующим образом: $g_0(k; j) = \delta_N(j-k)$ и $g_\nu = T_{s-\nu+1} T_{s-\nu+2} \cdots T_s g_0$, $\nu = 1, \ldots, s$. Равенство $g_\nu = T_{s-\nu+1} g_{\nu-1}$ и лемма 5.2 позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $g_{\nu-1}$ к базису g_ν:

$$g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$g_\nu\bigl((nl + \sigma)N_\nu + p\bigr) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Получены явные формулы для базисных сигналов $g_\nu(k)$. Показано, что базисные сигналы каждого уровня разбиваются на блоки, в каждом из которых сигналы различаются лишь сдвигом аргумента. Отмечается, что построенные ортогональные базисы с точностью до нумерации сигналов совпадают с базисами, построенными в § 3. Приведем основные результаты.

Теорема 6.2. *Имеет место представление*

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{l,q\}_\nu} g_0(qN_\nu + p),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Теорема 6.3. *При $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ выполняются тождества*

$$g_\nu(lN_\nu + p; j) = g_\nu(lN_\nu; j - p),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1.$$

Остальной материал параграфов 5 и 6 является заготовкой для второй главы.

В § 7 с помощью разложений по построенным в § 5, 6 ортогональным базисам получены два алгоритма быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона. А именно, любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису $f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)$ при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, f_\nu(k).$$

Тогда

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}\big(l + (np+\tau)\Delta_\nu\big), \tag{7}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Аналогично сигнал x можно разложить по ортогональному базису $g_\nu(0)$, $g_\nu(1)$, $\ldots$, $g_\nu(N-1)$ при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, g_\nu(k).$$

При этом

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{8}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Вычислительные схемы (7) и (8) назовем *быстрыми преобразованиями Виленкина–Крестенсона второго рода*, связанными соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени.*

В § 8 вводятся матрицы реверсных перестановок R_ν — квадратные матрицы порядка $\Delta_{\nu+1}$ с элементами

$$R_\nu[k, j] = \begin{cases} 1, \text{ если } j = \mathrm{rev}_\nu(k), \\ 0 \text{ при остальных } k, j \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}. \end{cases}$$

С помощью этих матриц устанавливается связь между четырьмя вариантами факторизации матрицы Виленкина–Крестенсона (1)–(4). Приведем центральный результат этого параграфа.

Теорема 8.1. *При каждом* $\nu = 1, \ldots, s$ *справедливо равенство*

$$T_\nu = (R_{s-\nu+1} \otimes R_{\nu-1}) D (R_{s-\nu} \otimes R_\nu).$$

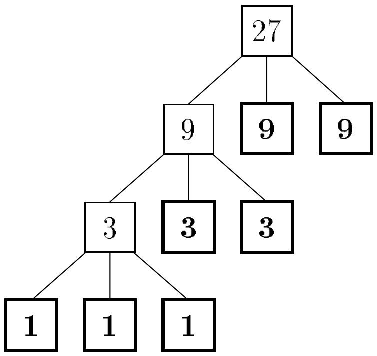
Двойственным результатом является тождество

$$T_\nu = (R_{s-\nu} \otimes R_\nu) C (R_{s-\nu+1} \otimes R_{\nu-1}).$$

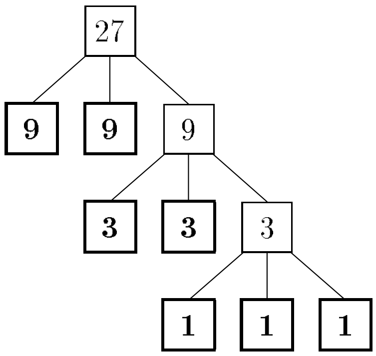
Вторая глава посвящена вопросам оснащения дискретного гармонического анализа вейвлетной теорией. Получены вейвлетные разложения пространства дискретных периодических сигналов. Изучаются спектральные свойства сигналов в вейвлетных базисах.

В § 5, 6 было показано, как последовательно строятся ортогональные базисы $f_0, f_1, \ldots, f_s$ и $g_0, g_1, \ldots, g_s$, имеющие блочную структуру. Количество ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$ можно значительно увеличить, если формировать их из блоков, принадлежащих *разным базисам* рекуррентной последовательности. Это демонстрируется на рис. 1 при $N = 3^3$. Квадратами выделены блоки. Число внутри квадрата показывает, сколько элементов (сигналов) содержится в данном блоке. Сигналы, находящиеся в висячих блоках, во всех четырех представленных примерах образуют ортогональные базисы.

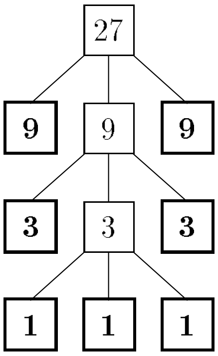
Ортогональные базисы в $\mathbb{C}_N$, образованные из блоков всех уровней $\nu = 1, \ldots, s$, будем называть *обобщенными вейвлетными базисами.* Совокупность всех вейвлетных базисов составляет *обобщенный вейвлет-пакет.* Во второй главе детально изучаются обобщенные вейвлетные базисы, соответствующие схеме ветвления (a) на рис. 1.



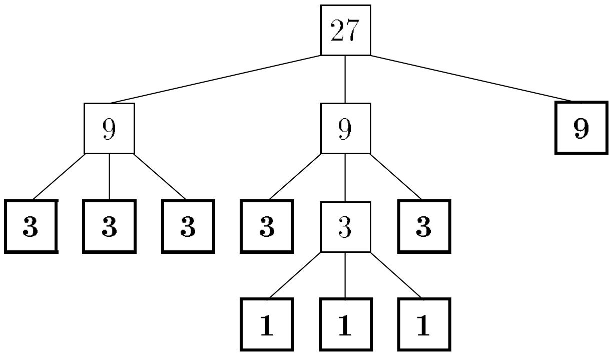
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 1

В § 9 рассматривается вейвлетный базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по времени. Этот базис образуют сигналы

$$\bigl\{g_s(0);\ \ g_\nu(\sigma N_\nu + p),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = 1, \ldots, s\bigr\}.$$

Обозначим $V_\nu = \operatorname{lin}\bigl(\{g_\nu(p)\}_{p=0}^{N_\nu-1}\bigr)$, $W_\nu^{(\sigma)} = \operatorname{lin}\bigl(\{g_\nu(\sigma N_\nu + p)\}_{p=0}^{N_\nu-1}\bigr)$, $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$. Установлено, что пространство $\mathbb{C}_N$ допускает разложение

$$\mathbb{C}_N = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s \oplus V_s. \tag{9}$$

При этом вейвлетные подпространства имеют следующую структуру.

Теорема 9.1. *Справедливы формулы*

$$V_\nu = \mathbb{C}_{N_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s;$$

$$W_\nu^{(\sigma)} = \bigl\{x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}} \bigm| x(j - \tau N_\nu) = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j) \quad \forall\, \tau \in \{1, \ldots, n-1\}\bigr\},$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Любой сигнал x допускает представление

$$x = y_s(0)\, g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma N_\nu + p)\, g_\nu(\sigma N_\nu + p).$$

Для вычисления коэффициентов этого разложения предложена рекуррентная схема

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu(\sigma N_\nu + p) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \tag{10}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты $y_\nu(p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, соответствующие индексу $\sigma = 0$, используются для вычисления коэффициентов $(\nu+1)$-го уровня.

В § 10 проводится аналогичное исследование базиса Хаара–Крестенсона, связанного с прореживанием по частоте. Этот базис образуют сигналы

$$\bigl\{f_s(0);\ \ f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = 1, \ldots, s\bigr\}.$$

Обозначим $V_\nu = \operatorname{lin}\bigl(\{f_\nu(p\Delta_{\nu+1})\}_{p=0}^{N_\nu-1}\bigr)$, $W_\nu^{(\sigma)} = \operatorname{lin}\bigl(\{f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\}_{p=0}^{N_\nu-1}\bigr)$, $\sigma \in$ $\in \{1, \ldots, n-1\}$, $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$. Данные подпространства обеспечивают вейвлетное разложение пространства $\mathbb{C}_N$, аналогичное разложению (9). Выясняется структура этих подпространств.

Теорема 10.1. *Сигнал x является элементом подпространства V_ν тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x(j), \quad q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теорема 10.2. *Справедлива формула*

$$W_\nu^{(\sigma)} = \bigl\{x \in V_{\nu-1} \bigm| x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j) \ \ \textit{при всех}\ \ \tau = 1, \ldots, n-1 \ \ \textit{и}\ \ j = 0, 1, \ldots, N-1\bigr\}.$$

Любой сигнал x допускает представление

$$x = x_s(0)\, f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

Для вычисления коэффициентов этого разложения предложена следующая рекуррентная схема:

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \tag{11}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Вычислительные схемы (10) и (11) назовем *быстрыми преобразованиями Хаара–Крестенсона*, связанными соответственно *с прореживанием по времени* и *прореживанием по частоте*.

Также в § 9, 10 предлагается «наивный» подход к построению ортогональных вейвлетных базисов, использующий разложение сигнала по собственным сдвигам. При этом поясняется роль операций поразрядного сложения и вычитания по модулю n при прореживании по частоте.

В § 11–13 несколько изменяются обозначения. Используется «облегченный» способ нумерации сигналов в базисах Хаара–Крестенсона: мы пишем $f_\nu(\sigma)$ вместо $f_\nu(\sigma\Delta_\nu)$ и $g_\nu(\sigma)$ вместо $g_\nu(\sigma N_\nu)$. Для сигналов $f_s(0)$ и $g_s(0)$ используется общее обозначение $c(j)$. В новых обозначениях базисы Хаара–Крестенсона будут выглядеть следующим образом:

$$\bigl\{c(j);\ f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, s\bigr\}, \tag{12}$$

$$\bigl\{c(j);\ g_\nu(\sigma;\, j - p),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, s\bigr\}. \tag{13}$$

Здесь

$$f_\nu(\sigma;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - q),$$

$$g_\nu(\sigma;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu).$$

Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису (12):

$$x(j) = \alpha c(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, p)\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Совокупность коэффициентов этого разложения

$$H_f(x) = \big\{\alpha;\ \ x_\nu(\sigma, p),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = 1, \ldots, s\big\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала x, *связанный с прореживанием по частоте.*

Аналогично, любой сигнал $y \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$y(j) = \alpha c(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(\sigma, p)\, g_\nu(\sigma;\, j - p), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Совокупность коэффициентов этого разложения

$$H_g(y) = \big\{\alpha;\ \ y_\nu(\sigma, p),\ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = 1, \ldots, s\big\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала y, *связанный с прореживанием по времени.*

В § 11 изучаются свойства спектров Хаара–Крестенсона: вычисляются спектры Хаара–Крестенсона сдвигов единичного импульса, доказываются аналоги известных теорем о спектре сдвига, свертки и корреляции. При этом, в зависимости от базиса, в качестве оператора сдвига может выступать циклический или n-ичный сдвиг. Соответственно, свертка и корреляция может быть циклической или n-ичной.

Приведем два характерных результата.

Теорема 11.4. *Пусть z — n-ичная свертка сигналов x и y, $H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma, p)\}$, $H_f(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma, p)\}$, $H_f(z) = \{\gamma;\ z_\nu(\sigma, p)\}$. Тогда $\gamma = \alpha\beta N$ и*

$$z_\nu(\sigma, p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, q)\, y_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} q),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Теорема 11.7. *Пусть z — циклическая свертка сигналов x и y, $H_g(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma, p)\}$, $H_g(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma, p)\}$, $H_g(z) = \{\gamma;\ z_\nu(\sigma, p)\}$. Тогда $\gamma = \alpha\beta N$ и*

$$z_\nu(n - \sigma,\, p) = n^\nu \left\{ \sum_{q=0}^{p} x_\nu(\sigma, q)\, y_\nu(\sigma,\, p - q) + \omega_n^\sigma \sum_{q=p+1}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, q)\, y_\nu(\sigma,\, N_\nu + p - q) \right\},$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

В § 12 устанавливается взаимосвязь базисов Хаара–Крестенсона, связанных с прореживанием по частоте и прореживанием по времени. Ключевую роль здесь играет перестановка reverse.

Теорема 12.1. *Пусть $\sigma \in \{1, \dots, n-1\}$, $p \in \{0, 1, \dots, N_\nu - 1\}$. Справедливо тождество*

$$f_\nu\big(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - p\Delta_{\nu+1}\big) = g_\nu\big(\sigma;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big),$$
$$j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Введем понятие логарифмически автореверсного спектра Хаара–Крестенсона. Спектр

$$H = \big\{\eta;\ h_\nu(\sigma, p),\ \ p = 0, 1, \dots, N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1, \dots, n-1,\ \ \nu = 1, \dots, s\big\}$$

назовем *логарифмически автореверсным*, если

$$h_\nu(\sigma, p) = h_\nu\big(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big),$$

$$p = 0, 1, \dots, N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1, \dots, n-1,\ \ \nu = 1, \dots, s-1.$$

Теорема 12.2. *Пусть сигналы x и y из $\mathbb{C}_N$ таковы, что $H_f(x) = H_g(y) =: H$, и пусть при этом спектр H является логарифмически автореверсным. Тогда необходимо*

$$y(j) = x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \tag{14}$$

Эта теорема в определенном смысле обратима.

Теорема 12.3. *Пусть x, y — сигналы, удовлетворяющие условию* (14), *и пусть $H_f(x) = H_g(y) =: H$. Тогда спектр H является логарифмически автореверсным.*

Обозначим через $\mathcal{L}_N$ линейное множество логарифмически автореверсных спектров и через $\dim \mathcal{L}_N$ — его размерность. Напомним, что $N = n^s$.

Теорема 12.4. *Справедливо равенство*

$$\dim \mathcal{L}_N = \frac{n}{2}\left[n^{s-1} + \Big(2 + \frac{n-1}{2}\big(1 + (-1)^s\big)\Big) n^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1\right].$$

В § 13 представлены два обобщенных кратномасштабных анализа по основанию n пространства дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$, которые приводят к базисам Хаара–Крестенсона. Тем самым устанавливается связь полученных результатов с общей вейвлетной теорией.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Машарский С. М. *Свертка и корреляция дискретных сигналов в базисах Хаара–Крестенсона* // Вестник молодых ученых. Прикл. матем. и механика. 2000. № 4. С. 31–40.

2. Машарский С. М. *Автореверсные спектры Хаара–Крестенсона* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2001. Вып. 2 (№ 9). С. 57–65.

3. Машарский С. М. *Быстрое преобразование Виленкина–Крестенсона на основе факторизации Гуда* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского Мат. Общества. Препринт № 2000–14. 10 с.
`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2000/index.html#14`

4. Masharsky S. M. *Haar–Chrestenson spectra of discrete signals* // Abstracts of the Int. Conf. "Optimization of Finite Element Approximations & Splines and Wavelets". St. Petersburg, 2001. P. 153–154.

5. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 111–157.

6. Malozemov V. N., Masharsky S. M. *Adaptive signal processing based on discrete Vilenkin–Chrestenson transform* // Proc. Int. Conf. "Neural Networks and Artificial Intelligence". Minsk, Belarus, 2001. P. 211–213.

Полный текст диссертации в формате PostScript можно найти в Интернете:
`http://www.math.spbu.ru/user/dmp/smash/`

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00747).