

На правах рукописи

Маламанов Степан Юрьевич

**Математическое моделирование гидродинамического
и электромагнитного отклика при воздействии линейных и
тороидальных магнитных полей**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена в Государственном предприятии «МАГНИС»

Официальные оппоненты: **Стасенко Альберт Леонидович**
Главный научный сотрудник научно-исследовательского отделения 8, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского (ЦАГИ)», профессор кафедры физики ФАЛТ МФТИ; доктор технических наук, профессор

Андреев Виктор Константинович
Заведующий отделом дифференциальных уравнений механики Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий кафедрой математического моделирования в механике Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета; доктор физико–математических наук, профессор

Павлов Валерий Андреевич
Профессор кафедры радиофизики физического факультета СПбГУ; доктор физико–математических наук, профессор.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «**Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук (ИО РАН)**»

Защита состоится «__» _____ 2018 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/disser/soiskatellyu-uchjonoj-stepeni/dislist/details/14/1492.html>

Автореферат разослан «__» _____ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, доцент

Е.В. Кустова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследований.

Нелинейный характер уравнений магнитной гидродинамики позволяет получать аналитические решения только в редких частных случаях. Трудности в поиске аналитических решений гидродинамических задач и неотложные задачи практики сделали весьма привлекательным численное моделирование. Численные методы позволяют составить математическую модель и провести численное моделирование практически для любой задачи. Из существующих в настоящей работе нами был выбран гидродинамический модуль комплекса ANSYS – ANSYS.CFX. Междисциплинарная направленность комплекса ANSYS позволяет ставить и решать задачи численного моделирования в различных областях науки и техники. К настоящему времени накоплен богатый опыт использования этого комплекса. Однако расчет магнитогидродинамических течений стал возможным сравнительно недавно (2005–2006 гг.) с появлением специального модуля MHD. Использование появившихся возможностей нашло свое применение, в основном, при моделировании потоков в алюминиевых электролизерах, что диктуется потребностями практики. Однако этот мощный инструмент можно использовать значительно шире и не ограничиваться только решением практических задач, но и применять его в исследовательских целях. В этом плане важно изучение макроскопических движений морской воды (проводящей жидкости), находящейся в магнитном поле Земли, которые сопровождаются появлением электрических токов и, как следствие, индуцированного магнитного поля. Актуальность темы обусловлена необходимостью изучения Мирового океана, играющего все большую роль в жизни человечества. В настоящее время задача определения индуцированного электромагнитного поля естественным образом распадается на две части: определение поля скоростей волнения и нахождение по заданному полю скоростей электромагнитного возмущения. При этом скорость движения среды находят или из результатов натуральных наблюдений, или из расчётов модельных течений, таких, как модель Стомелла, Экмана и др. Главные особенности этих моделей состоят в том, что скорость течения содержит только горизонтальные компоненты, рассматриваются течения конечной или бесконечной ширины, закон изменения скорости поперек течения задается определенной аналитической функцией (косинус и т.п.). Описанный подход представляет собой декомпозицию задачи на гидродинамическую и электродинамическую части. Именно им следуют большинство исследователей, не всегда корректно его обосновывая.

Возможность определения характеристик движения морской среды по её электромагнитному полю является одной из основных комплексных задач морской электродинамики. В этой связи измерения и вычисления индуцированного электромагнитного поля носят как фундаментальный, так и сугубо прикладной аспект в современных геофизических исследованиях, и применение комплекса ANSYS, наделенной новыми возможностями, могло бы позволить ставить и ре-

шать многие комплексные научные и технические задачи гео- и гидрофизики. Однако такие исследования в настоящее время отсутствуют. Поэтому изучение взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей с помощью модуля ANSYS.CFX является актуальным. Максимальный эффект взаимодействия полей достигается, когда вектор скорости потока ортогонален вектору индукции магнитного поля. В наиболее общем случае таких вариантов два – линейное магнитное поле при круговом движении проводящей жидкости, а также тороидальное магнитное поле при прямолинейном движении жидкости. Во втором случае наиболее явно проявляется масштабный фактор магнитогиродинамических процессов, который приводит к значительным затратам времени счета и памяти при численном решении задачи. Рассмотрение кругового движения позволяет значительно уменьшить масштаб и с единых позиций рассмотреть природу взаимодействия электромагнитного поля с макро- и микро- гидродинамическими течениями. Под последними понимается течение около шероховатой поверхности, при котором происходят срывы потока с вершин бугорков шероховатости и возникновение в промежутках между ними циркуляционных зон. Такого рода течение в магнитном поле так же является примером взаимодействия гидродинамического и магнитного полей, носящий ярко выраженный нелинейный характер – так называемое турбулентное «динамо».

Несмотря на широкое применение численных методов, точные аналитические решения дифференциальных уравнений продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания изучаемых явлений и процессов, именно они позволяют определить области изменения характерных параметров, при которых возможны те или иные существенные эффекты. Это особенно актуально для магнитной гидродинамики, уравнения которой представляют собой значительно более сложную нелинейную систему уравнений, чем уравнения электродинамики и гидродинамики, взятые по отдельности. Поскольку наиболее универсальным методом, позволяющим решать аналитически нелинейные уравнения и качественно исследовать математические модели является метод группового анализа, то вполне естественным является применение этого мощного математического аппарата. Групповой анализ дифференциальных уравнений был создан замечательным норвежским математиком Софусом Ли во второй половине 19-го века. Многоплановое применение методов теории групп к задачам механики жидкости было продолжено во второй половине 20-го века. К настоящему времени в рамках сформулированной Л.В. Овсянниковым в 1991 году программы ПОДМОДЕЛИ (эта программа направлена на систематическое и полное изучение групповых свойств разнообразных моделей механики сплошных сред) рассмотрены уравнения классической механики жидкости и газодинамики. В последние годы методы теории групп начинают применяться в геофизической гидродинамике, для анализа сложных неоднородных течений, в том числе в атмосфере и гидросфере. Однако в магнитной гидродинамике обычно ограничиваются рассмотрением линейных и одномерных уравнений, описывающих течение идеальной проводящей жидкости. Таким образом, актуальным

является исследование нелинейных многомерных МГД–уравнений, что позволит существенно расширить класс решаемых задач и более полно, «изнутри», аналитически изучить структуру данной модели. Групповой анализ применяется, в частности, как метод построения промежуточных моделей – с целью создания более комфортных исходных позиций для применения численных методов, и как метод, позволяющий провести сравнение общих свойств уже существующих моделей, получивших распространение в магнитной гидродинамике.

Кроме того, основанная на свойствах симметрии редукция уравнений позволяет находить как асимптотические, так и точные решения, что, безусловно, поможет создавать новые математические модели сложных МГД–устройств.

Целью работы является:

1. Физико–математическое моделирование потоков вязкой слабопроводящей жидкости в каналах различной формы при наличии магнитных полей.
2. Проведение группового анализа системы МГД–уравнений вязкой несжимаемой проводящей жидкости для дальнейшей редукции и оптимизации нахождения инвариантных решений.
3. Изучение турбулентного течения вблизи плоской шероховатой поверхности как при наличии внешнего магнитного поля, так и в его отсутствие.
4. Апробация вычислительного комплекса ANSYS.CFX на тестовых МГД–течениях и изучение с его помощью взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей в условиях, обеспечивающих максимальный эффект этого взаимодействия

Научная новизна работы.

1. Впервые показано, что:
 - стационарное движения проводящей жидкости в тороидальном канале, находящемся в однородном магнитном поле, эквивалентно движению той же жидкости в прямолинейном канале, который находится в магнитном поле, периодически изменяющемся вдоль оси симметрии канала.
 - течение проводящей жидкости в спиралевидных каналах различной формы, находящихся в однородном магнитном поле, приводит к появлению различных пространственно–временных структур индуцированного магнитного поля.
2. Впервые установлено, что круговое движение проводящей жидкости в зазоре коаксиальных цилиндров во внешнем однородном магнитном поле направленном вдоль оси симметрии цилиндров, вызывает намагничивание стенки одного из цилиндров.
3. Впервые показано, что:
 - при обтекании проводящей жидкостью спиралевидного канала (с такой же неподвижной жидкостью), находящегося в зазоре коаксиальных цилиндров в однородном магнитном поле, появляется индуцированное магнитное поле.

- для двух разных течений:
 - а) течения в спиралевидном канале, находящемся в зазоре коаксиальных цилиндров (заполненном такой же неподвижной жидкостью) при наличии однородного магнитного поля перпендикулярного оси цилиндров,
 - б) течение в зазоре коаксиальных цилиндров при котором происходит обтекание спиралевидного канала (заполненного такой же неподвижной жидкостью), находящегося в этом зазоре, при наличии однородного магнитного поля, перпендикулярного оси цилиндров, существует подобие распределений проекции индуцированного магнитного поля, направленной вдоль оси цилиндров.
- 4. Показано, что вязкий подслои и буферная зона в пограничном слое могут быть объединены в единую область, охваченную турбулентным движением. Найдены распределения интенсивности турбулентных пульсаций вблизи стенки с естественной шероховатостью.
- 5. Найдено распределение составляющей индуцированного магнитного поля, вызванного турбулентным движением проводящей жидкости вблизи шероховатой стенки, находящейся в однородном магнитном поле, перпендикулярном поверхности,
- 6. Впервые предпринято изучение групповых свойств уравнений морской электродинамики.

Теоретическая и практическая значимость работы.

1. Методами теории групп осуществлена редукция системы МГД–уравнений, описывающей движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости – эволюционные уравнения сведены к стационарным. Найдена группа, допускаемая полученной упрощенной системой, что позволяет ставить задачи по оптимизации поиска инвариантных решений.
2. Диссертационная работа является опытом применения теории инвариантных решений для уравнений морской электродинамики.
3. Изменение однородного магнитного поля при турбулентном движении проводящей жидкости вблизи стенки с естественной шероховатостью можно рассматривать как фактор, управляющий течением в пограничном слое.
4. Диссертационная работа направлена на изучение взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей в условиях, обеспечивающих максимальный эффект этого взаимодействия. Решение этой проблемы весьма актуально для прикладных задач морской гео- и гидрофизики, создания перспективных образцов энергетических систем.

Методы исследования.

В работе применяются теоретические методы исследования, опирающиеся на основные положения общей физики, классической электродинамики,

механики сплошных сред и ее математический аппарат. Для качественного аналитического исследования математической модели движения вязкой проводящей несжимаемой жидкости используются методы группового анализа дифференциальных уравнений (алгоритм вычисления допускаемой группы преобразований). Для расчетов МГД–течений широко используется прямое численное моделирование, как вычислительный эксперимент. Аналитические результаты получены с помощью метода срашиваемых асимптотических разложений и общей теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту:

- эволюционные уравнения магнитной гидродинамики сведены к стационарным уравнениям относительно инвариантов группы растяжений; найдена соответствующая фактор–система;
- построена группа преобразований, допускаемая фактор–системой уравнений морской электродинамики;
- найдены распределения интенсивности турбулентных пульсаций вблизи стенки с естественной шероховатостью.
- найдено решение задачи о зарождении индуцированного магнитного поля вблизи шероховатой поверхности при наличии внешнего магнитного поля, перпендикулярного этой поверхности;
- разработан оригинальный макрос **Spiral**, существенно дополняющий и расширяющий возможности традиционного ANSYS.CFX для анализа результатов численного моделирования в каналах спиралевидной формы.
- результаты численного моделирования потоков вязкой слабопроводящей жидкости в каналах различной формы при наличии магнитных полей.

В результате вычислительных экспериментов установлено, что:

- гидродинамический комплекс ANSYS.CFX адекватно воспроизводит экспериментально наблюдаемые величины и физику процессов, происходящих при течении проводящей жидкости в магнитном поле;
- отношение радиусов внутреннего и внешнего цилиндров является намагничивающим фактором, при круговом движении проводящей жидкости в зазоре постоянного объема коаксиальных цилиндров во внешнем однородном магнитном поле.

Публикации.

Основное содержание диссертации отражено в 27 печатных работах, в том числе 15 в научных изданиях из Перечня, утвержденного ВАК для публикации результатов диссертаций.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались, обсуждались и были одобрены на следующих конференциях и семинарах:

- Семинар кафедры «Вычислительные методы механики деформируемого твердого тела» СПбГУ (руководитель Ю.М. Даль), 2007 г.
- Международная конференция “6–е Окуневские чтения”, 2008 г.
- Международная конференция по механике “Пятое Поляховские чтения”. 2009 г.
- Международная конференция “7–е Окуневские чтения”, 2011 г.
- Международная конференция по механике “Шестые Поляховские чтения”, 2012 г.
- 55–я Научная конференции МФТИ “Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе”, 2012 г.
- Международная конференция “8–е Окуневские чтения”, 2013 г.
- 56–я Научная конференция МФТИ, “Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе”, 2013 г.
- Международная конференция: «Турбулентность и волновые процессы», посвященная 100–летию со дня рождения академика М.Д. Миллионщикова. МГУ, 2013 г.
- Всероссийская (с международным участием) научно-практическая конференция: “Изобретатели в инновационном процессе России” СПбГПУ, 2013 г.
- LXVII Международная конференция «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2014». СПбГПУ им. Герцена, 2014 г.
- 20–th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization BDO–VESC–ICEE–ICSTPEA–BDO–2014, Saint Petersburg, 2014.
- 57–я Научная конференция МФТИ с международным участием, посвященная 120–летию со дня рождения П.Л. Капицы, 2014 г.
- Международная конференция по механике “Седьмые Поляховские чтения”, посвящённая 110–летию со дня рождения профессора К.И.Страховича, 2015 г.
- LXVIII Международная конференция «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения—2015». СПбГПУ им. Герцена, 2015 г.
- 58–я Научная конференция МФТИ, “Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе”, 2015 г.
- Пятая всероссийская научно–техническая конференция «Актуальные проблемы морской энергетики». СПбГМТУ, 2016 г.
- Одиннадцатая Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях NPNJ'2016. МАИ, 2016 г.

- 59-я Всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием в честь 65-летия образования МФТИ и 70-летия образования Физико-технического факультета МГУ, 2016 г.
- Семинар кафедры общей физики ФАЛТ МФТИ (руководитель А. Л. Стасенко), 2016 г.
- Семинар кафедры «Гидроаэродинамика» СПбГУ (руководитель Р. Н. Мирошин), 2016 г.
- XX Юбилейная Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС 2017. МАИ, 2017 г.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Работа содержит 236 страниц, 101 рисунок и список литературы из 168 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Обоснованы актуальность и практическая значимость темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования и основные результаты.

Первая глава. Рассмотрена математическая модель магнитной гидродинамики. Приведены необходимые сведения теории группового анализа дифференциальных уравнений, методов численного моделирования с помощью гидродинамического модуля ANSYS.CFX и метода сращиваемых асимптотических разложений. Конкретизированы задачи для исследования.

Исследованию математической модели, служащей для описания параметров потоков движущихся проводящих сред в широком диапазоне условий посвящена **вторая глава**. В ней с целью аналитического изучения внутренних свойств математической модели, проведен групповой анализ системы уравнений, описывающей движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитном поле

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_m \sigma} \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \end{array} \right. \quad (1)$$

В этих уравнениях $\mathbf{u}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \mathbf{E}$ – векторы скорости, индукции магнитного поля, плотности тока и напряжённости электрического поля соответственно; μ, μ_m – коэффициенты вязкости и магнитной вязкости, σ – коэффициент электропроводности, ρ, p – плотность и давление. При дальнейшем анализе считалось, что электрическое поле отсутствует.

Вначале была найдена группа неравномерных растяжений, допускаемая изучаемой МГД-системой уравнений.

$$t = a^2 \hat{t}; \quad \mathbf{x} = a \hat{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{u} = \frac{1}{a} \hat{\mathbf{u}}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{a} \hat{\mathbf{B}}; \quad \mathbf{E} = \frac{1}{a^2} \hat{\mathbf{E}} \quad p = \frac{1}{a^2} \hat{p}.$$

Через инварианты найденной группы были выражены автомодельные переменные

$$\xi = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{U}(\xi), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{H}(\xi), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{t} \mathbf{G}(\xi) \quad p = \frac{1}{t} P(\xi),$$

позволившие упростить исходную систему уравнений и получить так называемую фактор-систему:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \\ \frac{\rho}{2} (-\mathbf{U} - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \nabla P = \mu \Delta \mathbf{U} + \sigma (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \\ \frac{1}{2} (-\mathbf{H} - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{H}) = \frac{1}{\mu_m \sigma} \Delta \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) \\ \frac{1}{2} (-\mathbf{G} - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{G} - (\xi \cdot \nabla) (\mathbf{U} \times \mathbf{H})) = \frac{1}{\mu_m \sigma} \Delta \mathbf{G} + \mathbf{U} \times \mathbf{H}. \end{cases}$$

Видно, что дифференциальные уравнения связывают только инварианты допускаемой группы неоднородных растяжений. Для последующей редукции и поиска классов частных решений – инвариантных и частично-инвариантных – была найдена подгруппа, допускаемая фактор-системой, при наличии заданного постоянного внешнего магнитного поля в отсутствии электрического поля. Такая постановка задач является типичной для морской электродинамики. При этом преобразованные уравнения движения и переноса вектора индуцированного магнитного поля упрощаются и возможна декомпозиция задачи на две части гидродинамическую и электродинамическую, а решение последней ищется на основе решения первой части. В качестве магнитного поля рассматривается геомагнитное поле Земли. Симметричный анализ проведен с помощью традиционного алгоритма поиска допускаемых точечных групп для уравнений с частными производными. В результате были получены следующие операторы симметрии, относящиеся к гидродинамической части (они образуют подалгебру в общей алгебре):

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial U} - \frac{1}{4} \xi \frac{\partial}{\partial P}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V} - \frac{1}{4} \eta \frac{\partial}{\partial P}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} + \frac{1}{4} \zeta \frac{\partial}{\partial P}. \end{aligned}$$

Структура этой подалгебры может быть наглядно представлена в виде таблицы Кэли.

Таблица Кэли для операторов $X_1, X_2,$ и X_3

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	0
X_2	0	0	0
X_3	0	0	0

Эта подалгебра абелева, значит L_3 разрешима. По операторам X_1, X_2 и X_3 могут быть легко найдены соответствующие им преобразования локальных групп Ли. Так, в частности, оператору X_1 соответствуют преобразования:

$$\begin{cases} \xi' = \xi + a_2, \eta' = \eta, \zeta' = \zeta, \\ U' = U + \frac{1}{2}a_2, V' = V, W' = W \\ P' = P - \frac{1}{4}\xi'a_2, \end{cases}$$

где a_2 групповая константа. Полученные преобразования действуют на уравнение движения и уравнение неразрывности, при этом уравнение переноса вектора индуцированного магнитного поля остается инвариантным. Отчасти, это является следствием отмеченной выше декомпозиции задачи на гидродинамическую и электродинамическую части.

Прежде чем проводить численное моделирование (вычислительный эксперимент), направленное на изучение взаимодействия гидродинамического и магнитного полей, необходимо апробировать вычислительный комплекс ANSYS.CFX на тестовых МГД – течениях. Этому посвящена **третья глава**. В ней проведена проверка адекватности математической модели и тестирование эффективных вычислительных методов, реализованных в гидродинамическом модуле ANSYS.CFX. Математическая модель в виде системы уравнений МГД потребовала привлечения определенного числа физических гипотез, правомерность которых, как и всей методики в целом, достигается путем удовлетворительного сопоставления с экспериментальными (или расчетными) данными. При этом может возникнуть принципиальная трудность: методика в целом, как результат совместного действия различных процессов может давать удовлетворительное совпадение с экспериментальными (или с уже существующими расчетными) данными, хотя каждый из процессов в отдельности может быть описан неверно.

Поэтому, наряду с проверкой метода в целом, необходима проверка адекватного описания отдельных процессов – с одной стороны, гидродинамических, с другой

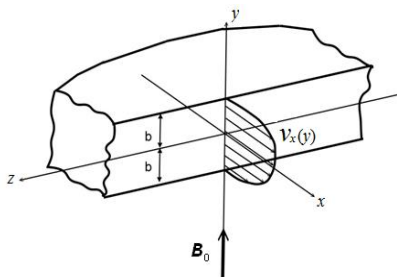


Рис. 1. Схема течения в плоском канале

стороны – магнитогидродинамических. Для решения первой задачи были проведены расчеты турбулентных струйных течений и дано сопоставление этих расчетов с опытом. Особое внимание было уделено проверке работоспособности комплекса при решении магнитогидродинамической задачи. Для этой цели была рассмотрена задача Гартмана, достаточно хорошо изученная и при определенных допущениях имеющая аналитическое решение. Именно с этим решением и сравнивались результаты тестовых расчетов. Схема течения представлена на рисунке 1, где \mathbf{B}_0 – вертикальное магнитное поле, $V_x(y)$ – распределение продольной компоненты скорости, толщина канала – $2b$. Рассмотрим некоторые результаты численного моделирования. Рисунок 2 иллюстрирует связь скорости потока с величиной магнитного поля. U на этом графике – средняя скорость в данном сечении, Ha – число Гартмана.

Видно очень хорошее совпадение с аналитическим решением. Кроме того, прослеживается впервые отмеченная Гартманом тенденция «заполнения» профиля скорости с ростом величины магнитного поля (числа Ha).

Кроме рассмотренной, аналитическим решением обладает задача о течении проводящей жидкости в зазоре между двумя соосными цилиндрами. Это течение обладает осевой симметрией, когда внешнее магнитное поле направлено азимутально. Магнитогидродинамические явления в кольцевом зазоре сходны с явлениями в плоскопараллельном канале. Система уравнений, описывающая это течение, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрируется в квадратурах. Эта задача допускает предельный переход. Дело в том, что если в решении осесимметричной задачи представить $r = R_2 + y$, $0 < y < 2b$ (где R_2 – радиус внутреннего цилиндра, а $2b$ – толщина кольцевого зазора) и сохраняя b постоянным, перейти к пределу при $R_2 \rightarrow \infty$, то получится решение плоской задачи. Эта задача о течении между двумя параллельными пластинами. В рамках численного моделирования с помощью ANSYS.CFX этот предельный переход сводится к рассмотрению течения в зазоре цилиндров «очень большого» радиуса. Так, на ри-

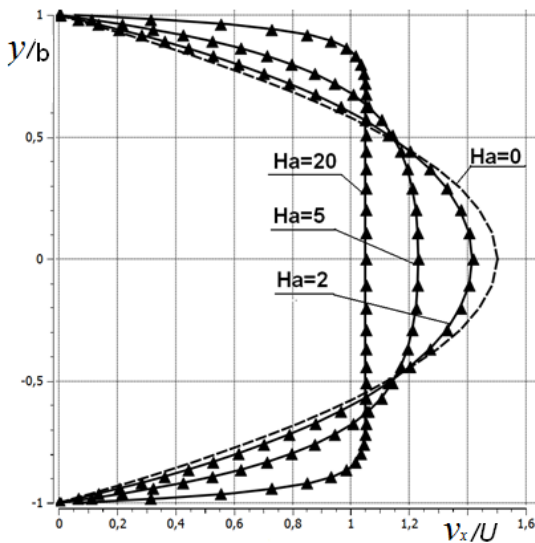


Рис. 2. Сравнение безразмерных профилей скорости при различных числах Гартмана. Линии – результаты моделирования, треугольники – аналитическое решение.

сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрируется в квадратурах. Эта задача допускает предельный переход. Дело в том, что если в решении осесимметричной задачи представить $r = R_2 + y$, $0 < y < 2b$ (где R_2 – радиус внутреннего цилиндра, а $2b$ – толщина кольцевого зазора) и сохраняя b постоянным, перейти к пределу при $R_2 \rightarrow \infty$, то получится решение плоской задачи. Эта задача о течении между двумя параллельными пластинами. В рамках численного моделирования с помощью ANSYS.CFX этот предельный переход сводится к рассмотрению течения в зазоре цилиндров «очень большого» радиуса. Так, на ри-

сунке 3 показаны профили скоростей в зазорах цилиндров и между плоскопараллельными пластинами. Кроме того, сопоставление рассчитанных двумя различными способами значений скорости позволяет сделать другое, не менее важное заключение.

Аналитическое решение было получено Гартманом из упрощенных уравнений. В то же время, моделирование сводилось к численному решению МГД-уравнений без каких-либо допущений. Следовательно, хорошее совпадение результатов свидетельствует о правомерности допущений, сделанных Гартманом. Именно поэтому полученные им формулы улучшить никому не удалось, хотя такие попытки имели место.

Чтобы теперь сделать вывод о том, что и магнитогидродинамическая задача с помощью комплекса ANSYS.CFX решается корректно, необходимо сравнить рассчитанные значения с реально наблюдаемыми в эксперименте. Для этой цели была рассмотрено течение ртути в канале квадратного сечения ($2a = 1.7 \cdot 10^{-2}$ м) при наличии вертикального однородного магнитного поля – рисунок 4. Выполнен расчет характеристик турбулентного потока ртути с помощью трех моделей турбулентности, реализуемых в ANSYS.CFX. Первой является хорошо известная « $k - \epsilon$ » модель (она содержит уравнение переноса кинетической энергии турбулентности k и уравнение переноса скорости ее диссипации – ϵ), второй – модель « $k - \omega$ » (где ω – удельная скорость диссипации), а третья – это модель переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса («SSG» – модель). Выбор этих моделей не случаен. Первая из них имеет хорошую, многолетнюю апробацию в инженерной и научно-исследовательской работе при опи-

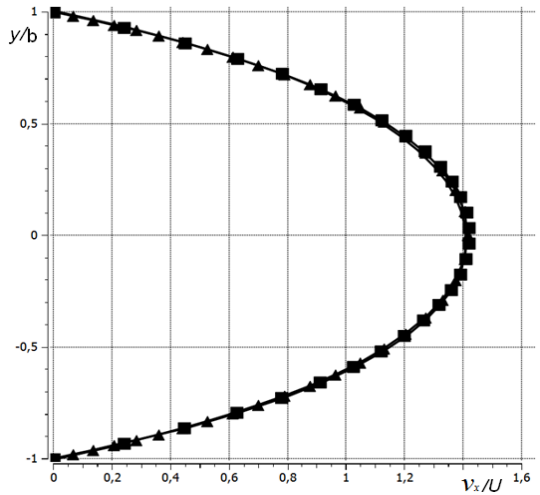


Рис. 3. Сравнение безразмерных профилей скорости в зазоре одинаковой ширины как между двумя соосными цилиндрами (радиус внешнего $R_1 = 5$ м), так и между двумя пластинами. Линии – результат моделирования, треугольники и квадраты – аналитические решения.

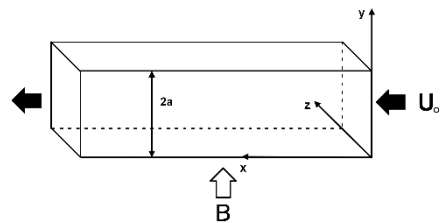


Рис. 4. Схема течения ртути в прямолинейном канале

сании сдвиговых течений. Вторая, за счет усовершенствований пристеночных функций – некоторые преимущества при моделировании течений вблизи твердых стенок. Третья модель более современная и претендует на роль более информативной, так как в ней турбулентные напряжения находятся из решения соответствующих уравнений переноса, что позволяет учитывать большинство эффектов, свойственных турбулентному течению, в частности, анизотропию. Использование трех указанных моделей позволяет произвести сравнительный анализ того, как они воспроизводят наблюдаемые в реальном эксперименте величины. Некоторые результаты численного моделирования при заданных скорости потока на входе в канал $U_0 = 0.4 \text{ М/с}$ и индукции магнитного поля $B = 0.3 \text{ Тл}$ (это соответствует числу Рейнольдса $Re = 5.9 \cdot 10^4$ и числу Гартмана $Ha = 440$) в сечении, отстоящем на расстоянии 0.75 метра от входа в канал вниз по потоку приведены на рисунке 5. Видно хорошее совпадение рассчитанных значений скорости с экспериментально наблюдаемыми. Такой результат лишний раз подтверждает некий «консерватизм», свойственный турбулентности, который неплохо отслеживается этими моделями даже в таких непростых условиях. В результате тестовых расчетов установлено, что гидродинамический модуль ANSYS.CFX даёт удовлетворительное воспроизведение экспериментальных данных как в простых условиях – турбулентная струя – так и в сложных физических условиях – турбулентное течение жидкого металла в магнитном поле. Сложный характер взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей обуславливает необходимость рассмотрения достаточно упрощенных моделей, которые, однако, правильно выявляют суть и описывают основные закономерности изучаемых явлений. Рассмотрению одной из таких моделей посвящена **четвёртая глава**. В ней рассмотрена

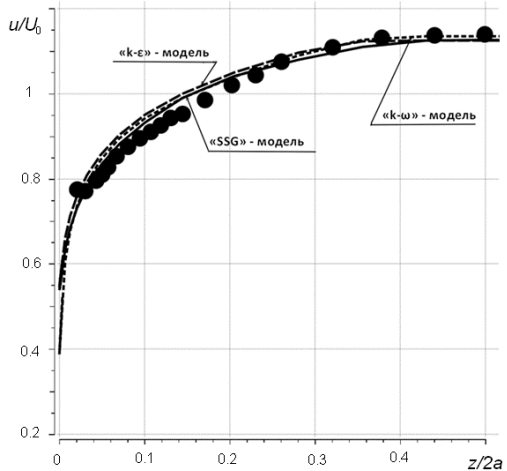


Рис. 5. Сравнение безразмерных профилей скорости при расчетах с различными моделями турбулентности. Линии – результаты моделирования, кружки – экспериментальные данные.

Такой результат лишний раз подтверждает некий «консерватизм», свойственный турбулентности, который неплохо отслеживается этими моделями даже в таких непростых условиях. В результате тестовых расчетов установлено, что гидродинамический модуль ANSYS.CFX даёт удовлетворительное воспроизведение экспериментальных данных как в простых условиях – турбулентная струя – так и в сложных физических условиях – турбулентное течение жидкого металла в магнитном поле. Сложный характер взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей обуславливает необходимость рассмотрения достаточно упрощенных моделей, которые, однако, правильно выявляют суть и описывают основные закономерности изучаемых явлений. Рассмотрению одной из таких моделей посвящена **четвёртая глава**. В ней рассмотрена

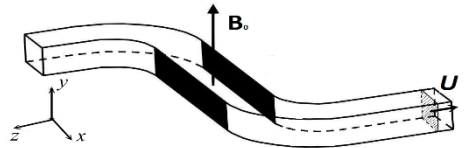


Рис. 6. Схема течения

модельная задача о течении проводящей жидкости в МГД–насосе. Модельность заключалась в выборе геометрии и значениях определяющих параметров. Так, насос представлялся изогнутым каналом прямоугольного сечения. На некотором участке к противоположным стенкам – заштрихованы на рисунке – приложена разность потенциалов – 120 В (плоский конденсатор), кроме того, задано вертикальное магнитное поле с индукцией $B_0 = 1$ Тл – рисунок 6. Взаимодействие электромагнитного и гидродинамического полей показано на рисунках 7 а) и б), на которых по вертикальной оси отложены вертикальная компонента индуцированного магнитного поля B_y и скорость потока вдоль канала U , а по горизонтальной оси – расстояние вдоль линии пересечения боковой стенки и плоскости симметрии канала L . Видно, что локальные (большие градиенты скорости) изменения гидродинамической обстановки, влекут за собой адекватные изменения магнитного поля. В этой связи представляет интерес рассмотрение течения, при котором вектор скорости испытывает постоянное изменение, например, поворачивается. Это круговое движение.

Пятая глава посвящена численному моделированию индуцированного магнитного поля в условиях, соответствующих максимальному эффекту взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей. Поскольку в наиболее общем случае таких вариантов два – линейное магнитное поле при круговом движении проводящей жидкости, а также тороидальное магнитное поле при прямолинейном движении жидкости, то именно эти варианты направления полей лежали в основе постановок рассмотренных задач. К первой группе относились задачи о течении проводящей жидкости в кольцевом зазоре двух соосных цилиндров. При этом задавалось радиальное электрическое поле и либо однородное, либо тороидальное магнитное поле. Во второй группе рассматривались задачи о взаимодействии кругового движения проводящей жидкости и однородного магнитного поля. Наиболее простой моделью, в которой можно обеспечить взаимную перпендикулярность векторов \mathbf{j} и \mathbf{B} , является течение в кольцевом

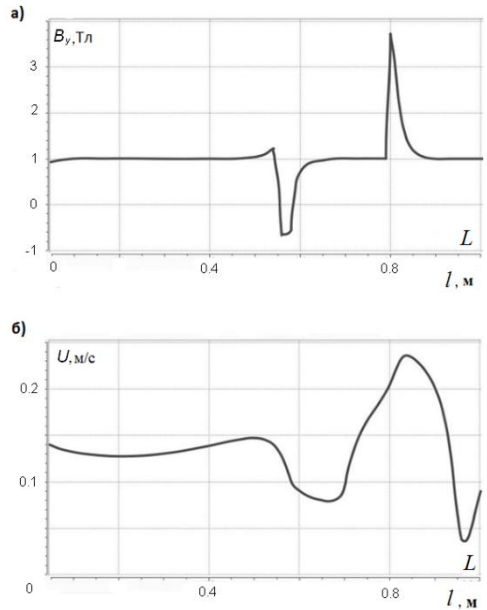


Рис. 7. Распределения вертикальной компоненты магнитного поля (а) и скорости потока (б) вдоль боковой поверхности канала.

зазоре двух соосных цилиндров – рисунок 8. В общем виде рассматриваемая нами задача в стационарной постановке ставится следующим образом: выяснить основные черты и рассчитать параметры течения первоначально покоящейся конечной массы проводящей жидкости, к которой прикладываются постоянные электрическое и магнитное поля.

Проводящей жидкостью, находящейся в зазоре, является морская вода (удельная проводимость $\sigma = 5 \text{ См/м}$). Между поверхностями цилиндров действует электрическое поле, потенциал внутреннего цилиндра равен 200 В, а внешнего – 0 В. Индукция магнитного поля принимается равной $B_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$, это в десять раз больше, чем магнитное поле Земли. При выбранных направлениях векторов \mathbf{j} и \mathbf{B}_0 появляется электро-

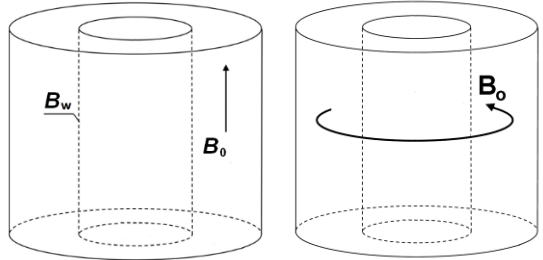


Рис. 8. Различные способы расположения внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 : вертикальное (линейное) и горизонтальное (тороидальное).

магнитная сила, которая и приводит жидкость в движение: жидкость будет вращаться вокруг вертикальной оси. Также существенно влияют на происходящие процессы магнитные свойства материала стенок цилиндров. В данной работе рассматривались два полярных случая: внутренняя стенка является намагниченной или не намагниченной (внешняя стенка всегда бралась не намагниченной). Индукция магнитного поля стенки B_w задавалась как параметр, равный индукции внешнего магнитного поля B_0 , либо нулю. Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На рисунке 9 представлено распределение индукции магнитного поля при различной намагниченности внутренней стенки вдоль радиуса, лежащего в горизонтальной плоскости симметрии. Штриховая линия 1 – $B_w = B_0$, сплошная линия 2 – $B_w = 0$. Радиус

внешнего цилиндра – R , внутреннего – r . Видно кратное увеличение магнитного поля (штрихованная линия) в случае ненулевой намагниченности внутреннего цилиндра. Это позволяет трактовать рассмотренную систему «магнитное поле–проводящая среда», состоящую из двух коаксиальных цилиндров, зазор между которыми заполнен проводящей жидкостью, как своеобразный трансформатор с жидким «сердечником».

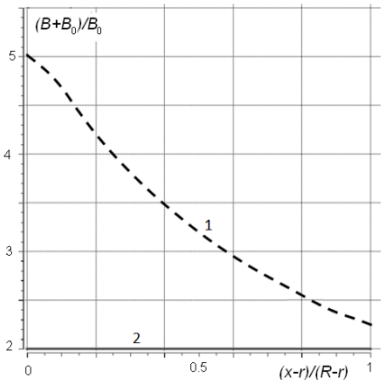


Рис. 9. Распределение индукции магнитного поля при различной намагниченности внутренней стенки.

Усиление же магнитного поля, вызванного круговым движением находящейся в нем проводящей жидкости, позволило поставить задачу о намагничивании среды (тела), используя в качестве магнетика проводящую жидкость. Рассмотрено течение в кольцевом зазоре двух соосных цилиндров. Задано внешнее вертикальное магнитное поле и магнитное поле стенки внутреннего цилиндра, равное внешнему полю. Оставляя объем зазора между цилиндрами неизменным, – что равносильно постоянству массы жидкости, заполняющей зазор, – были изменены радиусы внешнего R и внутреннего – r цилиндров: $\frac{r}{R} = 0,34, 0,6$ и $0,85$. Первый случай соответствует наиболее «широкому» зазору, тогда как третий – наиболее «тонкому».

Значения радиусов были следующие:
 $R = 1,0$ м, $r = 0,6$ м,
 затем изменялись: $\frac{r}{R} = 0,34$, при $R = 1,0$ м, $\frac{r}{R} = 0,85$, при $R = 1,5$ м.

Результаты моделирования представлены на рисунке 10. По оси x отложено приведенное расстояние вдоль радиуса, лежащего в горизонтальной плоскости симметрии, по оси y величина относительной компоненты магнитного поля B_z . Из рисунка следует, что по мере уменьшения толщины щелевого зазора величина индуцированного поля возрастает. Причем это возрастание очень сильное – кратное. Полученный результат можно усилить. Для этого рассмотрим течение при $\frac{r}{R} = 0,85$, и $B_w = -B_0$, т.е. изменим начальную намагниченность внутреннего цилиндра на противоположную. Результаты расчетов пред-

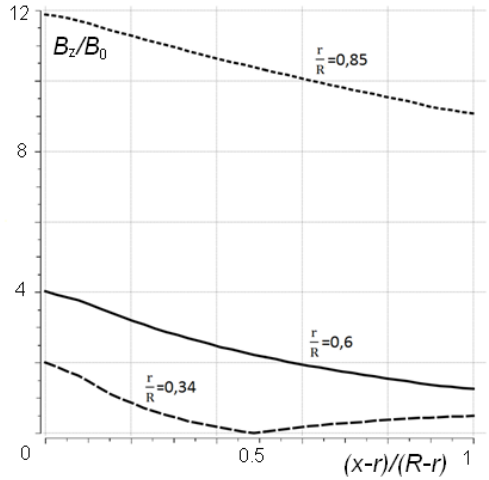


Рис. 10. Распределение индуцированного магнитного поля при различных толщинах кольцевого зазора, но при одинаковом объеме в внутренней части.

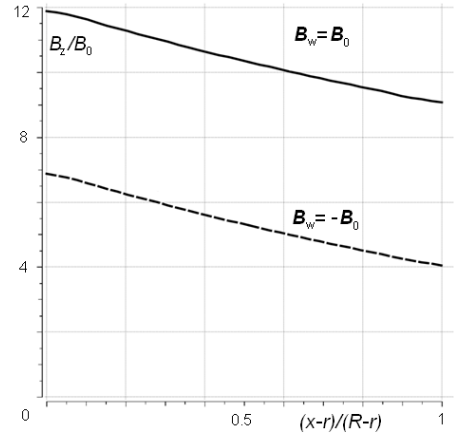


Рис. 11. Распределение индуцированного магнитного поля при противоположных значениях намагниченности стенки внутреннего цилиндра – B_w .

ставлены на рисунке 11. Из рассмотрения приведенных распределений видно, что круговое движение проводящей среды, находящейся в однородном магнитном поле, обладает намагничивающим действием. Течение проводящей жидкости в кольцевом зазоре цилиндрического конденсатора – это один из возможных случаев, когда реализуются наиболее благоприятные условия для перехода энергии в системе «электромагнитное поле – движущаяся проводящая среда». Правда, в этом случае для приведения жидкости в движение необходимо было прикладывать как магнитное, так и электрическое поле. Однако, такая возможность бывает не всегда. С другой стороны, «аналогичный» эффект взаимодействия полей будет иметь место, когда вращающаяся жидкость находится в однородном магнитном поле. Кроме того, круговое движение жидкости является понятным гидродинамическим источником, что особенно важно при изучении индуцированного поля. В этой связи был выделен внутри жидкости узкий канал в форме винтовой линии, по которому она движется, образуя своеобразную трубку тока – рисунок 12. Такое движение напоминает текущий по обмотке соленоида ток. Проводящей жидкостью является морская вода, коэффициент электропроводности, которой $\sigma=5$ См/м, задано внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 . Поле прикладывалось или вертикально, или горизонтально, задача рассматривалась в стационарной постановке. Рассмотрим некоторые результаты расчетов.

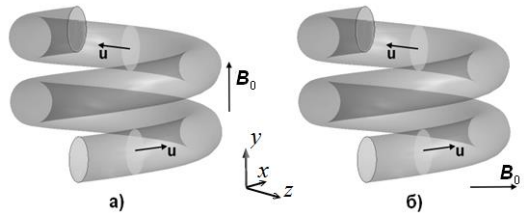


Рис. 12. Схема винтового канала и направление приложения внешнего магнитного поля: вертикальное (а) и горизонтальное (б).

Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На рисунке 13 приведено распределение безразмерной индуцированной компоненты магнитного поля B_y . По вертикальной оси отложена безразмерная координата y/H (H – высота канала) отсчитываемая вдоль оси канала. По горизонтальной оси – B_y . Приведенный график показывает, что выбранная простая и понятная – с точки зрения гидродинамики – модель движения жидкости по винтовому каналу

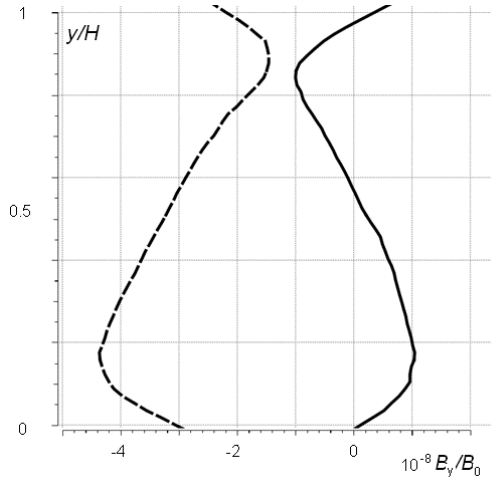


Рис. 13. Распределение B_y вдоль оси канала – сплошная кривая, и вдоль прямой параллельной оси и расположенной вне канала – штрихованная.

На рисунке 13 приведено распределение безразмерной индуцированной компоненты магнитного поля B_y . По вертикальной оси отложена безразмерная координата y/H (H – высота канала) отсчитываемая вдоль оси канала. По горизонтальной оси – B_y . Приведенный график показывает, что выбранная простая и понятная – с точки зрения гидродинамики – модель движения жидкости по винтовому каналу

лу достаточно хорошо отражает физику явления. Движение по каналу – это своего рода течение тока по обмотке соленоида. Текущий по обмотке ток вызывает появление магнитного поля как внутри катушки, так и снаружи. Причем поле внутри и вне катушки отличается как по величине, так и по направлению, что и иллюстрирует этот график. Таким образом, численное моделирование показывает, что локальное вращательное движение проводящей жидкости, находящейся во внешнем однородном магнитном поле, индуцирует дополнительное поле. Причем, если начальное поле имело одну компоненту, то индуцированное поле – три компоненты. Для того чтобы это понять, было рассмотрено стационарное течение в замкнутом торообразном канале – рисунок 14. Внешнее магнитное поле $B_0 = 0,1$ Тл приложено горизонтально в направлении оси x . Жидкость внутри канала движется со скоростью $u=0.5$ м/с. Проводящая жидкость в целом нейтральна, однако при её движении в магнитном поле действие силы Лоренца приводит к разделению зарядов, своеобразной поляризации. Положительно и отрицательно заряженные ионы смещаются в прямо противоположные стороны. Возникает дипольный момент и разность потенциалов, которая помимо силы Лоренца обусловлена еще и появившейся силой Кулона, действующей на поляризованные заряды. При движении жидкости вдоль тора происходит периодическое изменение указанных сил. Описанный механизм иллюстрирует рисунок 15, на котором показано изменение приведенного потенциала вдоль окружности **1** (верхняя часть тора) и окружности **2** (нижняя часть тора).

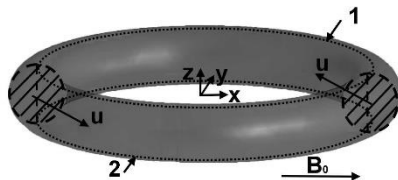
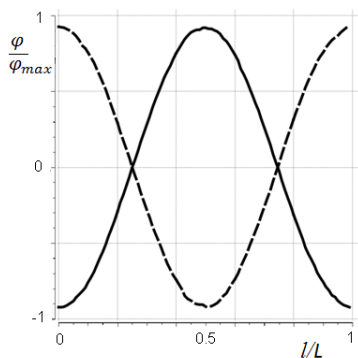


Рис. 14. Тороидальный канал и направление приложения внешнего магнитного поля. Линии **1** и **2** – окружности в верхней и нижней частях тора

Рис. 15. Изменение потенциала в верхней (сплошная линия) и нижней (штрихованная линия) частях тора.



На этом графике по оси x отложена относительная длина окружностей **1** и **2** – L (D – диаметр средней окружности тора), по оси y приведенное значение потенциала φ . Эти колебания потенциала генерируют в окружающем пространстве электромагнитные волны. Для того, чтобы разобраться в деталях процесса, необходимо решать задачу в нестационарной постановке. Однако постановка нестационарной задачи для рассматриваемой модели течения выявляет принципиальные трудности. С одной стороны, возможности программного комплекса ANSYS не позволяют задать скорость течения в торе как функцию времени. С другой стороны – трудно представить себе физические причины (кроме изменя-

ющего со временем магнитного поля, при наличии электрического поля), которые обусловили ускоренное движение жидкости в торе. Указанные трудности можно преодолеть, если обратить внимание на два существенных факта. Во-первых, при течении жидкости внутри тора вектор скорости \mathbf{u} по отношению к направлению внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 , изменяется гармонически. Во-вторых, из третьего уравнения системы (1) видно, что компоненты \mathbf{u} и \mathbf{B} в последнем слагаемом (ответственном за генерацию индукции магнитного поля) расположены «симметрично». Это позволяет рассматривать гармоническое изменение вектора \mathbf{B} по отношению к постоянному вектору \mathbf{u} . Таким образом мы приходим к следующей постановке задачи: рассчитать параметры индуцированного магнитного поля, при течении проводящей жидкости в *прямолинейной* трубке тока, если заданное внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0

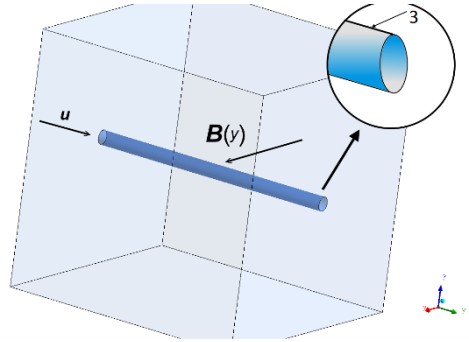


Рис.16. Прямолинейный канал и направление приложения внешнего магнитного поля, являющегося функцией координаты y . Прямая линия $\mathbf{3}$ параллельна оси симметрии канала.

меняется по гармоническому закону и лежит в плоскости перпендикулярной трубке тока. Расчетная область, соответствующая этой задаче, показана на рисунке 16. Индукция приложенного внешнего модельного магнитного поля имеет вид

$$B_0(y) = B_0^{max} \cdot \sin(p \cdot y),$$

где B_0^{max} амплитуда поля, равная 0.1 Тл, а число p подобрано так, чтобы длина канала соответствовала одному периоду синуса. Скорость движения жидкости в цилиндре та же, что и в случае тора – $u=0.5$ м/с. Масса жидкости в каналах (и радиусы окружностей, образующих тор и цилиндр), в обоих случаях одинакова. На рисунке 17 показано изменение потенциала φ вдоль прямой $\mathbf{3}$ (рисунок 16), лежащей в вертикальной плоскости симметрии прямолинейного канала в верхней его части параллельно горизонтальной оси, и окружности $\mathbf{1}$ (рисунок 14) тороидального канала. На этом графике l – коор-

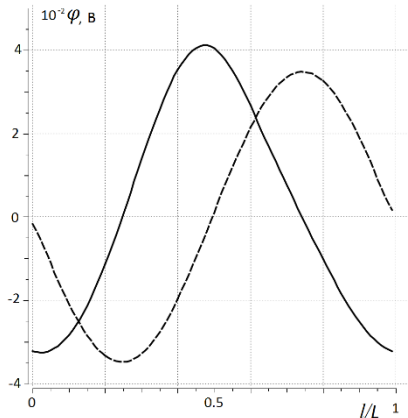


Рис. 17. Распределение φ индуцированного поля вдоль окружности $\mathbf{1}$ для тора – сплошная кривая, и прямой $\mathbf{3}$ параллельной оси симметрии для цилиндрического канала – пунктирная кривая.

дината, отсчитываемая вдоль окружности **1** тора и прямой **3** цилиндра, а L – длина тора (вдоль центральной окружности) и цилиндра вдоль оси симметрии, равные, как указывалось раньше. Из графиков видно, что изменение потенциала при течении как в тороидальном, так и в прямолинейном канале носит гармонический характер. Причем, численные значения практически совпадают. Кроме поведения потенциала рассмотрим, как ведет себя индуцированное электрическое поле – рисунок 18.

Из кривых, представленных на рисунке 18, следует, что в обоих течениях существует периодически меняющееся электрическое поле, причем численные значения практически совпадают. Различие – определенный сдвиг по фазе – безусловно связан с различной геометрией рассматриваемых течений и видом зависимости от координаты у внешнего магнитного поля в задаче о течении в прямолинейной трубке. Кроме того, сопоставление графиков на рисунках 17 и 18, безусловно, свидетельствует о правомерности замены решения задачи о течении внутри тора, решением задачи о течении внутри цилиндра.

Выше была отмечена большая роль изменения направления скорости движения жидкости на величину возникающего индуцированного магнитного поля. В этой связи представляет интерес изменение формы винтового канала для увеличения (уменьшения) центростремительного ускорения движущейся жидкости, являющегося причиной изменения направления вектора скорости. Схематические варианты измененных каналов совместно с основным, показаны на рисунке 19.

Относительно формы и размеров каналов необходимо сделать следующие пояснения. Объемы всех трех каналов одинаковы. Радиусы окружностей, вращением которых вдоль прямолинейной, суживающейся кверху и расширяющейся кверху винтовых линий, получены соответствующие каналы – тоже одинаковы. Одинаковы и радиусы окружностей, с которых начинается это вращение. Количество витков различно. Таким образом, масса проводящей жидкости в каналах одинакова. Единственное отличие – это форма каналов, все

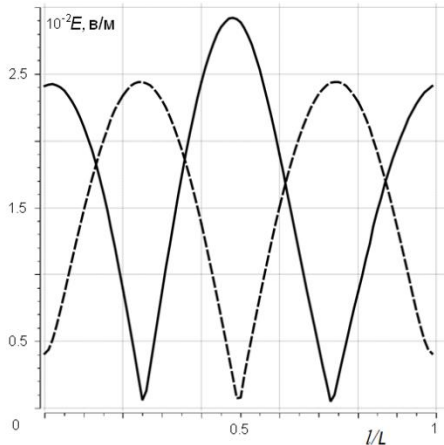


Рис. 18. Распределение E напряженности индуцированного поля вдоль центральной окружности тора – сплошная кривая, и оси симметрии цилиндрического канала – пунктирная кривая.

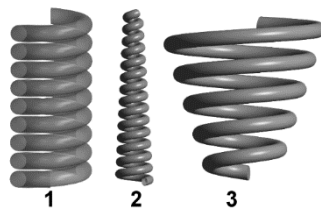


Рис. 19. Различные формы винтовых каналов. **1** – основной, **2** – суживающийся кверху, **3** – расширяющийся кверху.

остальные внешние параметры, характеризующие течения, одинаковы. Рассмотрим некоторые результаты численного моделирования. Представлены они на рисунке 20. На нём по вертикальной оси отложена приведенная координата y/h – это высота канала. По горизонтальной оси относительная вертикальная компонента индуцированного магнитного поля B_y . Сплошная кривая – расчет для канала формы 1, штриховая – формы 3, а пунктирная – формы 2. Обращает на себя внимание поведение пунктирной кривой в верхней части графика. Наблюдается периодическое изменение величины компоненты индуцированного магнитного поля. Это вполне объяснимо, так как именно в верхней, суживающейся части канала центростремительное ускорение увеличивается (при неизменной скорости потока – в силу несжимаемости, радиус спирали уменьшается) и вектор скорости чаще меняет направление. Также видно, что внутри базового канала индуцированное поле меньше по величине, чем в остальных двух. Хорошо видно, что течение в суживающемся канале – пунктирная кривая – генерирует сильный всплеск магнитного поля, в несколько раз превышающий среднее поле внутри канала. В итоге можно сделать вывод о сильной зависимости индуцированного поля от формы канала, по которой движется проводящая жидкость. Во всех рассмотренных выше задачах расчетная область, моделирующая пространство, считалась безграничной, во всяком случае ее размеры в несколько раз превосходили размеры спиралевидных каналов. И все полученные результаты относились именно к этому случаю. С другой стороны, возможности расчетного комплекса позволяют передавать физическую обстановку через стенки как внутрь канала, так и наружу. В этой связи возникает вопрос – имеет ли какое-либо значение конечность массы окружающей жидкости? Для того, чтобы попытаться на него ответить, была рассмотрена следующая постановка задачи. Спиралевидный канал находится внутри зазора двух коаксиальных цилиндров. Почему выбрана именно такая геометрия, станет ясно из дальнейшего. Приложено внешнее горизонтальное (в направлении оси x) магнитное поле B_0 . Схема представлена на рисунке 21. Задача решается в два этапа. Вначале рассчитывалось индуцированное магнитное поле, вызванное движением жидкости, поступающей в канал в направлении стрелки 1. В остальной части кольцевого

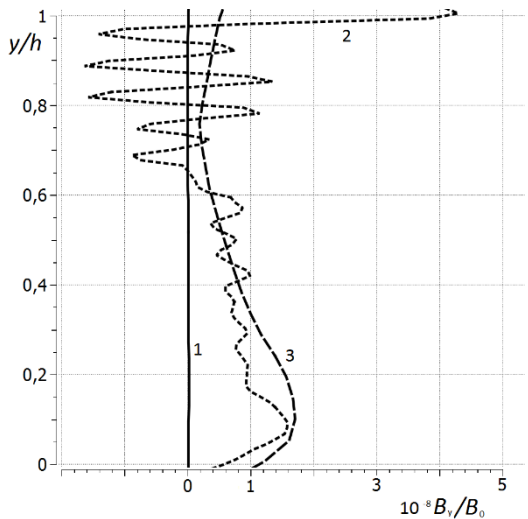


Рис.20. Распределение B_y вдоль оси канала для трех различных форм – 1, 2, и 3.

канала индуцированное поле меньше по величине, чем в остальных двух. Хорошо видно, что течение в суживающемся канале – пунктирная кривая – генерирует сильный всплеск магнитного поля, в несколько раз превышающий среднее поле внутри канала. В итоге можно сделать вывод о сильной зависимости индуцированного поля от формы канала, по которой движется проводящая жидкость. Во всех рассмотренных выше задачах расчетная область, моделирующая пространство, считалась безграничной, во всяком случае ее размеры в несколько раз превосходили размеры спиралевидных каналов. И все полученные результаты относились именно к этому случаю. С другой стороны, возможности расчетного комплекса позволяют передавать физическую обстановку через стенки как внутрь канала, так и наружу. В этой связи возникает вопрос – имеет ли какое-либо значение конечность массы окружающей жидкости? Для того, чтобы попытаться на него ответить, была рассмотрена следующая постановка задачи. Спиралевидный канал находится внутри зазора двух коаксиальных цилиндров. Почему выбрана именно такая геометрия, станет ясно из дальнейшего. Приложено внешнее горизонтальное (в направлении оси x) магнитное поле B_0 . Схема представлена на рисунке 21. Задача решается в два этапа. Вначале рассчитывалось индуцированное магнитное поле, вызванное движением жидкости, поступающей в канал в направлении стрелки 1. В остальной части кольцевого

зазора жидкость неподвижна. На рисунке 22 приведено распределение безразмерной компоненты индуцированного магнитного поля B_y . По вертикальной

оси отложена безразмерная координата y (h – высота канала) отсчитываемая вдоль оси параллельной оси симметрии канала и лежащей между каналом и внутренним цилиндром. По горизонтальной оси – B_y . Очевидно, что наличие внутренней и внешней ограничивающих поверхностей вносит определенную симметрию в распределение индуцированного поля. Его малая величина, помимо всего прочего, безусловно, связана с размерами канала. Его высота h равна 0,7 метра, а диаметр, образующей окружности 0,1 метра, кроме того коэффициент электропроводности $\sigma = 5 \text{ См/м}$, что достаточно точно соответствует морской воде. Скорость

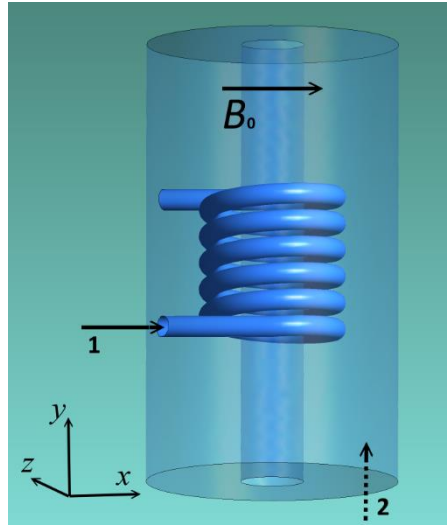


Рис. 21. Схема течения

жидкости на входе в канал равна $u = 0,3 \text{ м/с}$. После этого был произведен аналогичный расчет, но жидкость поступала по направлению стрелки 2. То есть жидкость движется в кольцевом зазоре обтекая канал, а в самом канале – неподвижна. При этом была уменьшена скорость на входе в кольцевой зазор ($u = 0,0026 \text{ м/с}$) так, чтобы расходы в обоих случаях были одинаковыми. Результаты этих двух расчетов представлены на рисунке 23. Из рисунка следует, что профили подобны. Теперь изменим геометрию кольцевого зазора так, чтобы объёмы (а, следовательно, массы) канала и окружающего канал пространства были равны. Полного равенства получить не удалось, ввиду достаточно

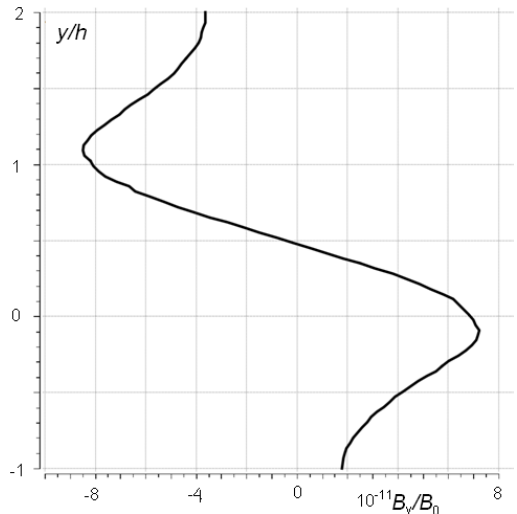


Рис. 22. Распределение B_y вдоль прямой параллельной оси симметрии и расположенной между каналом и внутренним цилиндром.

сложной топологии: масса жидкости в канале меньше массы остальной жидкости примерно на 1,5%.

Скорость жидкости на входе в канал и в кольцевой зазор равны, $u = 0,3 \text{ м/с}$.

Сопоставление результатов двух вариантов моделирования приведено на рисунке 24. Подобие распределений индуцированного поля здесь проявляется наиболее ярко. По всей видимости, при полном равенстве масс эти распределения совпадут.

Для нахождения распределений интересующих величин вдоль окружностей внутри тора, а также вдоль осевой линии внутри винтового канала – стандартных возможностей в комплексе ANSYS.CFXнет.С

целью увеличения возможностей обработки и анализа результатов численного моделирования МГД–течений в каналах спиралевидной формы было разработано расширение, созданное по технологии АСТ (Application Customization Toolkit) – дополнительный «макрос» – **Spiral**.

Для использования расширения необходимо сначала установить

Рис. 24. Распределение V_y в случае равенства масс жидкости в канале и окружающем пространстве. Сплошная кривая – жидкость поступает в направлении стрелки 1, штриховая линия – жидкость поступает в зазор в направлении стрелки 2. Высота канала $h=0,7 \text{ м}$.

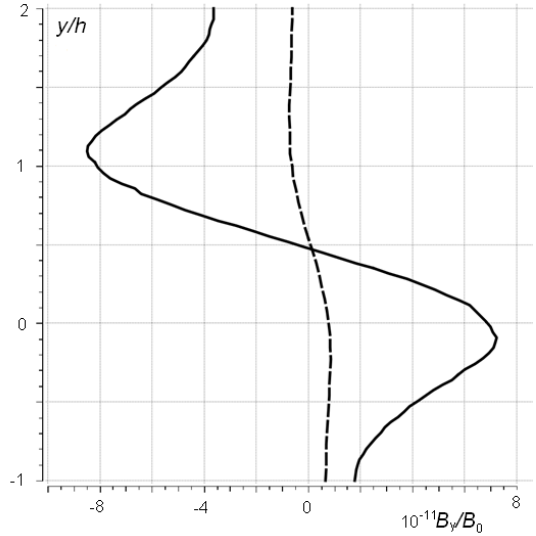
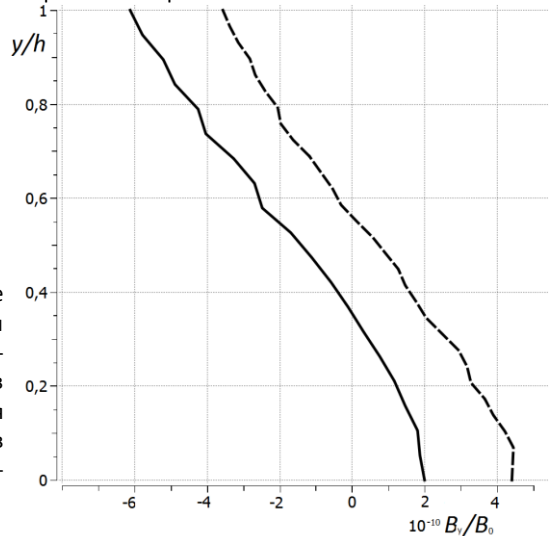


Рис. 23. Распределение V_y вдоль прямой параллельной оси симметрии и расположенной между каналом и внутренним цилиндром. Сплошная кривая – жидкость поступает в направлении стрелки 1, штриховая линия – жидкость поступает в зазор в направлении стрелки 2.



его на рабочую станцию, а затем подключать к проекту по мере необходимости. На рисунке 25 показаны новые возможности POST-процессорной обработки расчетных данных комплекса ANSYS.CFX: ось спиралевидного канала, любое количество пользовательских плоскостей по её длине, взаимно перпендикулярные отрезки, вдоль которых можно строить распределения интересующих величин.

Рассмотрение кругового движения, помимо уменьшения масштаба, позволяет с единых позиций анализировать взаимодействие электромагнитного поля с макро- и микро- гидродинамическими течениями. Под последними понимается течение около шероховатой поверхности, при котором происходят срывы потока с вершин бугорков шероховатости и возникновении в промежутках между ними циркуляционных зон. Этому вопросу посвящена **шестая глава**. В ней проведен асимптотический анализ уравнений, описывающих пульсационную структуру турбулентного течения несжимаемой жидкости. По современной терминологии вместо ламинарного говорят о вязком подслое, ибо из экспериментов следует, что течение в нем сопровождается заметными турбулентными пульсациями. Если математическая модель, служащая для описания течения вблизи поверхности, не учитывает наличие пульсаций, то полученные в результате расчета гидродинамические величины будут существенно отличаться от тех, которые существуют в действительности. Поэтому любые попытки улучшения математической модели заведомо оправданы. Для анализа было использовано то обстоятельство, что уравнения Рейнольдса, записанные в безразмерном виде, содержат малый параметр при старшей производной. Поэтому вполне естественно воспользоваться одним из методов возмущений, в частности, методом сращиваемых асимптотических разложений.

Как известно, в турбулентном пограничном слое можно выделить три характерные области: вязкий подслой, буферная зона и турбулентное ядро. С точки зрения метода возмущений, все они являются внутренними областями (потенциальное течение – внешней), и решение в каждой из них строится в переменных, изменённых таким образом, что исследуемая зона оказывается как бы под увеличительным стеклом (для каждой зоны – свое стекло).

Запишем проекцию уравнения движения на ось X (использованы безразмерные переменные, обозначения оставлены без изменений)

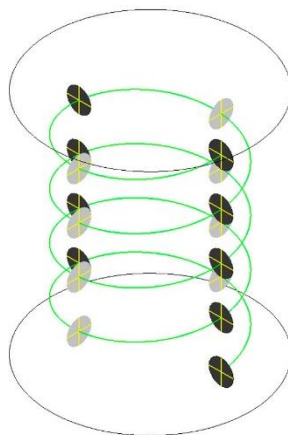


Рис. 25. Новые возможности обработки расчётов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\overline{U^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{UV}) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial y}(\overline{uv}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u^2}) - w \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

в этом уравнении $\frac{1}{Re_\infty}$ малый параметр, обратный числу Рейнольдса, лапласианом от u пренебрегаем.

Так для рассмотрения течения в буферной зоне введена новая переменная $Y = \frac{y}{\varepsilon}$, где ε – пока неопределенная малая величина.

Решения искались в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y, Re_\infty) &= \bar{U}(x, Y) + o(\varepsilon), \\ \bar{V}(x, y, Re_\infty) &= \varepsilon \bar{V}(x, Y) + o(\varepsilon^2), \\ \bar{p}(x, y, Re_\infty) &= \bar{p}(x, Y) + o(\varepsilon), \\ \overline{uv}(x, y, Re_\infty) &= \varepsilon \overline{uv}(x, Y) + o(\varepsilon^2), \\ \overline{(u^2)}(x, y, Re_\infty) &= \overline{(u^2)}(x, Y) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3)$$

В этих выражениях средние величины компонент скорости обозначены заглавными буквами – U, V , а пульсации скорости u, w и v – строчными, \overline{uv} и $\overline{u^2}$ – касательная и нормальная компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Отметим, что вид асимптотических последовательностей для \bar{V} и \overline{uv} обусловлен необходимостью удовлетворить уравнению неразрывности.

Затем был использован известный экспериментальный факт, согласно которому в рассматриваемой зоне напряжения Рейнольдса и вязкого трения одного порядка. Следовательно, из уравнения (2) имеем,

$$\frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\varepsilon \partial Y} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}}{\varepsilon \partial Y} \right) \sim \frac{\partial}{\varepsilon \partial Y} \varepsilon (\overline{uv}),$$

откуда можно получить $\frac{1}{Re_\infty \varepsilon^2} = C$.

Полагая $C = 1$, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re_\infty}}.$$

Точно такая же зависимость имеет место в вязком подслое. Это позволяет объединить вязкий подслей и буферную зону в *единообразную* область, охваченную, как будет видно из дальнейшего, *турбулентным* движением.

Затем в указанной области была рассмотрена подобласть, вплотную прилегающая к поверхности стенки и имеющая размер порядка высоты естественной шероховатости – R_a . Для неё были получены приближенные уравнения для компонент тензора напряжений Рейнольдса и с помощью вторичного применения метода сращиваемых асимптотических разложений найдены их ре-

шения (в этом случае в качестве малого параметра была взята R_a), в общем случае отличные от нуля

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= C_{\overline{uv}} e^{-\eta}, \\ \overline{u^2} &= C_{\overline{u^2}} e^{-\eta}, \\ \overline{v^2} &= C_{\overline{v^2}} e^{-\eta}, \\ \overline{w^2} &= C_{\overline{w^2}} e^{-\eta}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\eta = \frac{y\sqrt{Re_\infty}}{R_a}$ – вторично изменённая переменная y .

Отличные от нуля пульсационные составляющие скорости трактуются как составляющие скорости вихря, образовавшегося из-за обтекания бугорка шероховатости. Константы $C_{\overline{uv}}$, $C_{\overline{u^2}}$, $C_{\overline{w^2}}$ и $C_{\overline{v^2}}$ в общем случае не равны нулю, что говорит о том, что и \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{w^2}$ и $\overline{v^2}$ в таком случае тоже отличны от нуля, а это в свою очередь, допускает существование турбулентного движения уже на стенке (с естественной шероховатостью), где, видимо, и происходит его зарождение. Отличные от нуля пульсационные составляющие скорости можно трактовать как составляющие скорости вихря, образовавшегося из-за отрывного обтекания бугорка шероховатости.

Затем было рассмотрено течение проводящей жидкости около шероховатой поверхности при наличии однородного вертикального магнитного поля. Как показано в главе 5, круговое движение проводящей жидкости в однородном магнитном поле приводит к появлению индуцированного пространственного магнитного поля. Таким образом, можно говорить об изменении (усилении) начального магнитного поля. Обтекание в этом случае показано на рисунке 26. На этом рисунке \mathbf{B}_{0y} вектор напряженности однородного внешнего магнитного поля. Штриховая линия – направление индуцированного магнитного поля \mathbf{b} , его направление, в общем случае, отлично от направления начального поля.

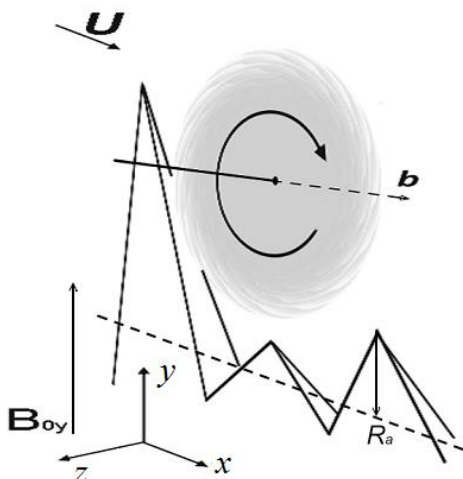


Рис. 26. Схема отрывного обтекания бугорка шероховатости.

Для того, чтобы найти распределение индуцированного поля, в частности его горизонтальной x -компоненты, направленной вдоль по течению, было использовано уравнение движения проводящей жидкости

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0} B_{0y} \frac{\partial b_x}{\partial y} = 0.$$

В этом уравнении τ – составляющая напряжения вязкого трения, $\frac{\partial p}{\partial x}$ – заданный по условию задачи перепад давления, обеспечивающий течение, μ_0 – магнитная проницаемость проводящей жидкости. Согласно известному экспериментальному факту, в данной зоне напряжения Рейнольдса и вязкого трения одного порядка. Таким образом, вместо τ можно рассматривать \overline{uv} и полученное распределение (4). Теперь приведенное уравнение примет вид

$$\frac{\partial \left(C_{\overline{uv}} e^{-\frac{y\sqrt{Re_\infty}}{Ra}} \right)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0} B_{0y} \frac{\partial b_x}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения при заданном градиенте давления, дает

$$b_x = \frac{\mu_0}{B_{0y}} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + \frac{Ra C_{\overline{uv}}}{\sqrt{Re_\infty}} \exp \left(-\frac{y\sqrt{Re_\infty}}{Ra} \right) \right) + b_{0x}.$$

Положив $b_{0x} = 0$, запишем величину b_x на «стенке», при $y = 0$

$$b_{xw} = \frac{\mu_0}{B_{0y}} \frac{Ra C_{\overline{uv}}}{\sqrt{Re_\infty}}.$$

Из этого выражения видно, что в общем случае $b_{xw} \neq 0$, что можно трактовать как наличие магнитного момента у вихря, – своеобразный аналог магнитного момента витка с током. Таким образом, можно говорить о том, что при обтекании шероховатой поверхности проводящей жидкостью, находящейся в однородном магнитном поле, создаются условия для появления индуцированного магнитного поля.

Каждая глава диссертации завершается перечнем основных результатов.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Маламанов С.Ю., Павловский В.А. Численное моделирование турбулентного течения ртути в однородном магнитном поле // Морские интеллектуальные технологии. № 4, 2016. С. 105–108.
2. Маламанов С.Ю., Павловский В.А. Расчет течения проводящей жидкости в щелевом зазоре с помощью ANSYS.CFX // Морские интеллектуальные технологии. № 4, том 2, 2015. С. 56–69.
3. Маламанов С.Ю., Павловский В.А. Расчет течения проводящей жидкости в прямолинейном канале квадратного сечения // Морские интеллектуальные технологии. № 2(32) том 1, 2016. С. 48–51.
4. Маламанов С.Ю., Павловский В.А. Моделирование турбулентности в струйном течении с помощью гидродинамического модуля ANSYS.CFX // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10. Выпуск 1, 2013. С. 42–49.
5. Маламанов С.Ю. Численное моделирование задач о силовом взаимодействии гидродинамического и электромагнитного полей // Математическое моделирование. 2015 год. Том 27. №11. С. 56-62.
6. Маламанов С.Ю. Численное моделирование всплеска электромагнитного поля, вызванного круговым движением проводящей жидкости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 2, 2016. С.121-134.
7. Маламанов С.Ю. Расчет течения в МГД – насосе // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10. Выпуск 1, 2015. С. 94–99.
8. Маламанов С.Ю. Поиск фактор-системы уравнений магнитной гидродинамики // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 3, 2016. С.42-51.
9. Маламанов С.Ю. Поиск группы преобразований, допускаемой системой уравнений, описывающей движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 4, 2016. С. 145–155.
10. Маламанов С.Ю. Об изменении характеристик электромагнитного поля, вызванных движением находящейся в нем проводящей жидкости // Математическое моделирование. 2016 год. Том 28. №9. С. 64-72.
11. Маламанов С.Ю. Зарождение индуцированного магнитного поля при течении проводящей жидкости вдоль шероховатой поверхности во внешнем однородном магнитном поле // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 3, 2016. С.52–56.

12. Маламанов С.Ю. Факторизация уравнений морской электродинамики // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 3, 2017. – С. 38–45.
13. Маламанов С.Ю. Асимптотическая модель турбулентного течения вблизи шероховатой поверхности // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10. Выпуск 4, 2013. С. 42–48.
14. Malamanov S.Y., Pavlovsky V.A., Khitrykh D.P. // Numerical simulation of variations in the geomagnetic field of the Earth. 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization BDO IVESC–ICEE–ICCTPEA–BDO–2014.
15. Malamanov S.Y., Pavlovsky V.A., Khitrykh D.P. // Numerical modeling of magnetohydrodynamic flow in the channel. 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization BDO IVESC–ICEE–ICCTPEA–BDO–2014.

Другие публикации

16. Маламанов С.Ю., Павловский В.А., Хитрых Д.П. Некоторые аспекты моделирования МГД-течений в ANSYS.CFX // CADFEM REVIEW Выпуск 2, 2015. С. 43-45.
17. Маламанов С.Ю., Павловский В.А., Скрынников Р.Г. Возможность создания подводных антенн, использующих вынужденные колебания твердого тела в проводящей среде. «Изобретатели в инновационном процессе России»: материалы Всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции. СПбГПУ, 2013 г.
18. Маламанов С.Ю., Павловский В.А. О расчете турбулентной струи. Проблемы экономии топливно-энергетических ресурсов на промпредприятиях и ТЭС. Межвузовский сборник научных трудов, 2007 г.
19. Маламанов С.Ю. Моделирование индуцированного магнитного поля в движущейся проводящей жидкости. LXVIII Международная конференция «Герценовские чтения – 2015».
20. Маламанов С.Ю. Численное моделирование влияния внешнего магнитного поля на течение проводящей жидкости в канале. 11-я Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях, 2016 г.
21. Маламанов С.Ю. Расчет турбулентного течения жидкого металла. 59-я Всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием проводится в честь 65-летия образования МФТИ и 70-летия образования Физико-технического факультета МГУ, 2016 г.

22. Маламанов С.Ю. Моделирование колебаний твердого тела при его всплытии в стратифицированной несжимаемой жидкости. Международная конференция «8-е Окуневские чтения». Материалы докладов, 2013 г.
23. Маламанов С.Ю. Моделирование вынужденных колебаний шара в проводящей среде. «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики» 57-я научная конференция МФТИ с международным участием, посвященную 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы, 2014 г.
24. Маламанов С.Ю. Физические процессы, сопровождающие вынужденные колебания заряженного тела в проводящей стратифицированной жидкости. «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Труды 56-й научной конференции МФТИ, 2013 г.
25. Маламанов С.Ю. Расчет движения проводящей жидкости, вызванного всплеском электромагнитного поля. «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики» 58-я научная конференция МФТИ, 2015 г.
26. Маламанов С.Ю. О «поляризации» вращающейся проводящей жидкости, находящейся в магнитном поле. «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики» 58-я научная конференция МФТИ, 2015 г.
27. Маламанов С.Ю. Об аналогии между процессами, происходящими при круговом и прямолинейном движении проводящей жидкости в магнитном поле. Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам «ВМСППС 2017». С. 505-508.

В работах, опубликованных в соавторстве, В.А. Павловский принимал участие в анализе полученных результатов, Д.П. Хитрых принимал участие в проведении расчетов и обсуждении полученных результатов, Р.Г. Скрынников принимал участие в анализе полученных результатов.