

На правах рукописи

Залётов Сергей Владиславович

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ НОРМАЛЬНОЙ
НАГРУЗКИ НА ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО
С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2017

Работа выполнена на кафедре фундаментальной и прикладной математики
Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Илюхин Александр Алексеевич,
Таганрогский институт им. А.П.Чехова (филиал)
РГЭУ (РИНХ)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Даль Юрий Михайлович

доктор технических наук, профессор
Сторожев Валерий Иванович,
Донецкий национальный университет

Ведущая организация: Институт горного дела им. Н.А. Чинакала
Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится « ____ » _____ 2017 г. в ____ час. на заседании диссертационного совета Д 212.232.30 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, аудитория 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/ZYrhWV37qJ.pdf>.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Е.В.Кустова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Анализ напряженно-деформированного состояния полубесконечных упругих тел на основе аналитических решений пространственных смешанных задач теории упругости является фундаментальной проблемой механики деформируемого твердого тела. Известно, что исследование ряда научно-технических проблем горной и строительной механики приводит к постановке смешанной задачи для полупространства, в точках поверхности которого вне области приложения распределенной нагрузки выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений (условие упругого закрепления границы). Решение этой пространственной задачи представляет большой практический интерес, так как её приложения связаны с разработкой методов расчета напряженно-деформированного состояния массива горных пород при подземной добыче полезных ископаемых, с оценкой прочности деталей, включающих тонкие перфорированные прослойки, с исследованием проблем теории многослойных оснований.

В последние десятилетия опубликован ряд работ, посвященных построению в прямоугольной декартовой системе координат решений трехмерных задач о распределении напряжений и перемещений в полупространстве (полуплоскости), при действии на него нормальной нагрузки, распределенной по многосвязной конечной области, вне которой граничная поверхность упруго закреплена. Из обзора литературы следует, что класс пространственных осесимметричных задач о действии распределенной нагрузки на полупространство с упруго закрепленной границей в настоящее время остается практически не изученным. Аналитическое решение осесимметричной задачи о напряженно-деформированном состоянии изотропного полупространства при смешанных граничных условиях исследуемого типа отсутствует, а необходимые для практики численные расчеты, как правило, базируются на трудоёмкой реализации принципа суперпозиции решений задач о сосредоточенной силе. Поэтому разработка аналитических методов решения осесимметричных задач о деформации полупространства под действием нормальных усилий при упругом закреплении граничной поверхности является **актуальной** задачей классической теории упругости, имеющей практические приложения во многих областях современной промышленности и техники.

Цель работы – построение аналитических решений осесимметричных задач о действии распределенных и сосредоточенных усилий на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей и исследование на их основе закономерностей распределения напряжений и перемещений в упругом теле.

Для достижения цели ставились следующие **задачи**:

- получить аналитическое решение осесимметричной задачи для упругого полупространства в случае, когда в круговой области V , принадлежащей граничной плоскости, приложена распределенная нагрузка, вне области V выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений, касательные напряжения на всей границе обращаются в нуль;
- построить интегральное уравнение для определения неизвестной функции, входящей в аналитическое решение осесимметричной задачи о действии на изотропное полупространство нагрузки, распределенной по круговой области, вне которой граничная поверхность упруго закреплена;
- исследовать аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство, на границе которого отсутствуют касательные напряжения и выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений;
- на основе построенных аналитических решений осесимметричных смешанных задач разработать алгоритмы расчёта на ПК перемещений и напряжений внутри и на границе упругого полупространства;

- установить влияние упругого закрепления границы на распределение напряжений и перемещений в изотропном полупространстве при действии на него равномерно распределенной нагрузки либо сосредоточенной силы.

Объект исследования – осесимметричная деформация изотропного полупространства с упруго закрепленной границей под действием распределенных и сосредоточенных внешних усилий.

Предмет исследования – закономерности изменения напряженно - деформированного состояния изотропного полупространства с упруго закрепленной границей при варьировании параметров, входящих в граничные условия и аналитические решения осесимметричных задач.

Методы исследования. При построении аналитических решений осесимметричных смешанных задач для полупространства использованы отдельные положения теории интегрального преобразования Ханкеля, интегральных уравнений Фредгольма второго рода, рядов Неймана, специальных функций Бесселя, Неймана, Струве, гамма-функции, эллиптических интегралов первого и второго рода, полных эллиптических интегралов.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что в работе

- впервые с помощью метода интегрального преобразования Ханкеля получено аналитическое решение смешанной задачи об осесимметричной деформации изотропного полупространства в случае, когда на границе касательные напряжения обращаются в нуль, в круговой области, принадлежащей граничной плоскости, действует распределённая нагрузка, зависящая от радиальной координаты, вне круга – нормальные напряжения и перемещения пропорциональны;

- впервые в результате аналитического решения осесимметричной задачи теории упругости получены известные формулы С.П.Тимошенко, Дж.Гудьера для напряжений и перемещений на границе полупространства при действии на него нагрузки, равномерно распределенной по круговой области;

- в случае распределенной нагрузки постоянной интенсивности, приложенной к полупространству с незакрепленной границей, входящие в аналитическое решение осесимметричной задачи несобственные интегралы вычислены через специальные и элементарные функции;

- получена компактная форма точного решения осесимметричной задачи о деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной поверхностью под действием сосредоточенной силы;

- предложен алгоритм аналитического преобразования несобственных интегралов, содержащихся в решениях осесимметричных задач, его реализация существенно уменьшает время компьютерных расчетов компонент тензора напряжений;

- разработаны и обоснованы методы численной реализации аналитических решений осесимметричных смешанных задач исследуемого класса;

- на основе численных исследований установлены новые закономерности, характеризующие влияние внешней нагрузки, физико-механических свойств материала и упругого закрепления поверхности полупространства на его напряженное состояние в случае осесимметричной деформации.

Достоверность научных результатов и выводов обеспечивается корректностью постановок исследуемых осесимметричных задач, использованием апробированных методов решения сформулированных задач, проверкой выполнения граничных условий, построением решений отдельных задач двумя способами, получением из аналитических решений в частных случаях формул, опубликованных в научной литературе, подтверждением результатов расчётов известными качественными закономерностями и данными других авторов.

Научное значение полученных результатов заключается в развитии аналитических методов решения осесимметричных смешанных задач о напряженно-

деформированном состоянии полупространства с упруго закрепленной поверхностью при действии на него нормальной нагрузки.

Научные положения, которые выносятся на защиту.

1. Аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости о деформации изотропного полупространства при следующих граничных условиях: к упругому телу приложена нагрузка, распределенная по круговой области V , вне области V - нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения на всей граничной плоскости отсутствуют, напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

2. Вторая форма аналитического решения исследуемой осесимметричной задачи, построенная путем перехода от трансформанты к оригиналу введенной функции, характеризующей нагрузку на граничной поверхности полупространства.

3. Математическое доказательство утверждений о том, что формулы С.П.Тимошенко, Дж.Гудьера для компонент тензора напряжений и вектора перемещения на границе полупространства в случае приложенной к нему нагрузки, равномерно распределенной по круговой области, являются частным случаем полученного аналитического решения осесимметричной задачи; в случае распределенной нагрузки, зависящей от радиальной координаты, интегральная форма построенного аналитического решения при отсутствии закрепления поверхности полупространства совпадает с решением Тередзавы.

4. Преобразование формул для компонент вектора перемещений в точках изотропного полупространства с незакрепленной границей путем вычисления несобственных интегралов и их записи через специальные функции в случае осесимметричной деформации упругого тела под действием равномерно распределенной нагрузки.

5. Компактная форма точного решения осесимметричной задачи о деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной границей под действием сосредоточенной силы.

6. Разработанные алгоритмы и компьютерные программы для расчёта компонент тензора напряжений и вектора перемещений внутри и на границе изотропного полупространства. Численный анализ решений осесимметричной задачи о напряженно-деформированном состоянии изотропного полупространства с упруго закрепленной границей при действии сосредоточенной силы либо равномерно распределенной нагрузки.

7. Задача об опорном давлении горных пород на угольный пласт в окрестности цилиндрической выработки.

Практическое значение полученных результатов. Алгоритмы расчётов и программы для численной реализации аналитических решений осесимметричных задач на ПК позволяют исследовать пространственное напряженно-деформированное состояние горного массива с полостями при разработке пластовых месторождений полезных ископаемых, а также деталей с перфорированными прослойками при обосновании рабочих параметров элементов конструкций в машиностроении.

Результаты могут быть использованы конструкторскими бюро, научно-исследовательскими институтами, а также при изложении специальных курсов по механике деформируемых твердых тел в вузах.

Личный вклад соискателя. Следующие результаты, изложенные в диссертации и публикациях, принадлежат лично автору:

- аналитическое решение осесимметричной задачи о действии распределенной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей вне области приложения внешних усилий;

- математическое обоснование перехода от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе в аналитическом решении осесимметричной задачи для изотропного полупространства с упруго закрепленной границей;

- подтверждение достоверности аналитических решений осесим-метричных задач путем получения из них в частных случаях решений Тередзавы, Буссинеска, формул С.П.Тимошенко;

- преобразование аналитических решений осесимметричных смешанных задач теории упругости о деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной поверхностью под действием сосредоточенной силы либо равномерно распределенной нагрузки к компактному виду путем вычисления несобственных интегралов через специальные функции;

- разработка алгоритмов и компьютерных программ для численной реализации аналитических решений;

- анализ закономерностей распределения напряжений и перемещений в изотропном полупространстве на основе аналитических и численных исследований решений смешанных задач;

- аналитическое решение и численное исследование задачи о давлении горных пород на угольный пласт в окрестности цилиндрической выработки.

Основные результаты получены автором самостоятельно. По результатам исследований опубликованы три работы без соавторов [3,10,11]. В статьях [1-2,4-9,12-17] соискателю принадлежит получение аналитических решений осесимметричных задач, разработка алгоритмов численной реализации их решений, выполнение расчетов, установление и анализ закономерностей, научному руководителю и соавторам принадлежат постановки задач, участие в выборе методов решения и обсуждении результатов исследований.

Апробация результатов диссертации. Основные положения и результаты диссертации докладывались на XV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, Россия, 2011г.); на Международной конференции «Современные проблемы механики и математики» (Львов, Украина, 2013); на VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (Ростов- на- Дону, Россия, 2013); на 6th International Conference of Young Scientists CSE-2013 (Lviv, Ukraine, 2013); на XXII Международном научном симпозиуме «Неделя горняка 2014» (Москва, Россия, 2014); на XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, Россия, 2014).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 6 статей в журналах, входящих в перечень ВАК, 8 статей в научных журналах и в сборниках трудов международных конференций, 3 публикации в сборниках тезисов докладов на международных научных конференциях.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Работа содержит 32 рисунка, 1 таблицу. Общий объём диссертации составляет 157 страниц, из них 17 страниц занимает список литературы, 21 страницу – приложение.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы задачи исследования, охарактеризована новизна и достоверность результатов, их научное и практическое значение.

В первой главе приведен обзор научных работ, посвященных исследованию пространственных смешанных задач теории упругости. Отмечено, что при изучении равновесия трёхмерного упругого тела ученые широко используют общие решения системы уравнений теории упругости, впервые полученные Ж.Буссинеском, П.Ф.Папковичем, Г.Нейбером, Б.Г.Галёркиным, а также современные методы исследования задач теории упругости, изложенные в работах В.М.Александрова, И.И.Воровича, Л.Я.Галина, Дж.Гудьера, А.А.Илюхина, С.Г.Лехницкого, А.И.Лурье,

С.Г.Михлина, Н.Ф.Морозова, В.И.Моссаковского, В.В.Новожилова, Ю.Н.Работнова, С.П.Тимошенко, П.Е.Товстика, Я.С.Уфлянда, Т.С.Уфе, S.K.Datta, M.R.Gecit, A.E.Green, H.Hasegawa, F.Erdogan, K.Johnson, W.Koiter, J.Lachat, J.Li, K.Mao, A.P.S.Selvadurai, Y.Sneddon, E.Sternberg, F.Szelagowki, A.Teong, X.Tian.

В настоящее время интенсивное развитие методов решения смешанных задач для упругого полупространства связано с решением контактных задач и, прежде всего, с математическим моделированием функциональных характеристик тонких плёнок и покрытий контактирующих деталей различных механизмов. Задачи этого класса исследуются в работах С.М.Айзиковича, И.Г.Горячевой, А.В.Наседкина, S.F.Ahmadi, M.Eskandary.

Изучению смешанной задачи для полупространства, в точках поверхности которого вне области приложения распределенной нагрузки выполняется условие упругого закрепления границы, в трехмерной и плоской постановках посвящены работы М.В.Кавлакана, В.Е.Миренкова, А.М.Михайлова, Ю.В.Немировского. Вместе с тем, методы решения пространственных осесимметричных задач о деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной границей в настоящее время не разработаны. Необходимость исследования указанного класса смешанных задач, связанных с решением актуальных прикладных проблем горной и строительной механики, а также машиностроения, обусловила выбор темы диссертационной работы.

Во второй главе получено аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи о деформации изотропного полупространства при упругом закреплении его границы вне области приложения распределенной нагрузки, заданной функцией, зависящей от радиальной координаты.

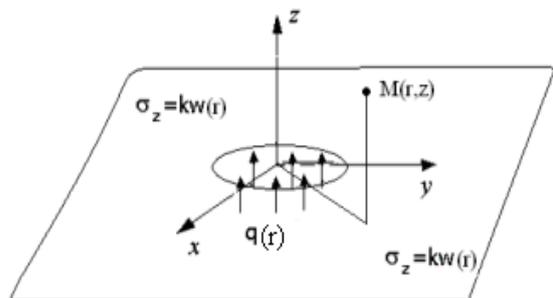


Рис.1. Упругое полупространство

Известно, что в случае осесимметричной деформации изотропного тела основная система уравнений теории упругости, записанная в цилиндрической системе координат r, θ, z (рис.1), сводится к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где $\Phi(r, z)$ – функция напряжения Лява, через которую компоненты тензора напряжений и вектора перемещений выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), & \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right), \\ u &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, & w &= \frac{1}{2G} \left(2(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, G – модуль сдвига.

Математическая постановка осесимметричной задачи для изотропного полупространства такова: найти в области $\{0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z < \infty\}$ неизвестные компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r, z), \sigma_\theta(r, z), \sigma_z(r, z), \tau_{rz}(r, z)$ и вектора перемещений $u(r, z), w(r, z)$, удовлетворяющие уравнениям (1) – (2) и смешанным условиям

$$\sigma_z(r, 0) = -q(r), \quad r < a; \quad \sigma_z(r, 0) = kw(r, 0), \quad r > a; \quad \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad r < \infty \quad (3)$$

на граничной плоскости $z = 0$. В формулах (3) $q(r)$ – распределенная по кругу радиуса a нормальная нагрузка, k – постоянный коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений.

В результате решения методом интегрального преобразования Ханкеля уравнений (1) с граничными условиями (3) найдены компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в упругом полупространстве

$$\begin{aligned} u(r, z) &= -\frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty \bar{\beta}(t)(1-2\nu-zt)e^{-tz} J_1(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, \\ w(r, z) &= -\frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty \bar{\beta}(t)(2\nu-2-zt)e^{-tz} J_0(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, \\ \sigma_z(r, z) &= -\int_0^\infty \bar{\beta}(t)t^2(1+zt)e^{-tz} J_0(rt) \frac{dt}{t+\chi}, \\ \sigma_r(r, z) &= -\int_0^\infty \bar{\beta}(t)(1-zt)e^{-tz} J_0(rt) \frac{t^2 dt}{t+\chi} + \frac{1}{r} \int_0^\infty \bar{\beta}(t)(1-2\nu-zt)e^{-tz} J_1(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, \\ \sigma_\theta(r, z) &= -2\nu \int_0^\infty \bar{\beta}(t)e^{-tz} J_0(rt) \frac{t^2 dt}{t+\chi} - \frac{1}{r} \int_0^\infty \bar{\beta}(t)(1-2\nu-zt)e^{-tz} J_1(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, \\ \tau_{rz}(r, z) &= -z \int_0^\infty \bar{\beta}(t)t^3 e^{-tz} J_1(rt) \frac{dt}{t+\chi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\chi = 2k(1-\nu^2)/E$, $J_0(rt), J_1(rt)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, $\bar{\beta}(t)$ – трансформанта введенной функции

$$\beta(r) = \begin{cases} q(r) + kw(r, 0), & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (5)$$

В случае, когда $k=0$, формулы (4) совпадают с известным решением Тередзавы. Путем перехода в соотношениях (4) от трансформанты к оригиналу функции β , характеризующей нагрузку на поверхности полупространства, построена вторая форма аналитического решения осесимметричной задачи (3) в виде

$$u(r, z) = \int_0^a \beta(\xi) G_u(r, z, \xi) d\xi, \quad w(r, z) = \int_0^a \beta(\xi) G_w(r, z, \xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, z) &= \int_0^a \beta(\xi) G_r(r, z, \xi) d\xi, & \sigma_\theta(r, z) &= \int_0^a \beta(\xi) G_\theta(r, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_z(r, z) &= \int_0^a \beta(\xi) G_z(r, z, \xi) d\xi, & \tau_{rz}(r, z) &= \int_0^a \beta(\xi) G_{rz}(r, z, \xi) d\xi\end{aligned}\quad (6)$$

в точках упругого полупространства и

$$\begin{aligned}u(r, 0) &= \int_0^a \beta(\xi) g_u(r, \xi) d\xi, & w(r, 0) &= \int_0^a \beta(\xi) g_w(r, \xi) d\xi, \\ \sigma_r(r, 0) &= \int_0^a \beta(\xi) g_r(r, \xi) d\xi, & \sigma_\theta(r, 0) &= \int_0^a \beta(\xi) g_\theta(r, \xi) d\xi, \\ \sigma_z(r, 0) &= \int_0^a \beta(\xi) g_z(r, \xi) d\xi, & \tau_{rz}(r, 0) &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

в точках граничной плоскости $z = 0$. В соотношениях (6) введены обозначения

$$\begin{aligned}G_u(r, z, \xi) &= -\frac{(1+\nu)\xi}{E} \int_0^\infty (1-2\nu-zt)e^{-zt} J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, \\ G_w(r, z, \xi) &= -\frac{(1+\nu)\xi}{E} \int_0^\infty (2\nu-2-zt)e^{-zt} J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, \\ G_r(r, z, \xi) &= -\xi \int_0^\infty t^2 (1-zt)e^{-zt} J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{dt}{t+\chi} + \frac{\xi}{r} \int_0^\infty t(1-2\nu-zt)e^{-zt} J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{dt}{t+\chi}, \\ G_\theta(r, z, \xi) &= -2\nu\xi \int_0^\infty t^2 e^{-zt} J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{dt}{t+\chi} - \frac{\xi}{r} \int_0^\infty t(1-2\nu-zt)e^{-zt} J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{dt}{t+\chi}, \\ G_z(r, z, \xi) &= -\xi \int_0^\infty t^2 (1+zt)e^{-zt} J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{dt}{t+\chi}, \\ G_{rz}(r, z, \xi) &= -z\xi \int_0^\infty t^3 e^{-zt} J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{dt}{t+\chi}.\end{aligned}\quad (8)$$

Приравнивая в формулах (8) координату z нулю, получаем соответствующие выражения для функций $g_u, g_w, g_r, g_\theta, g_z$. Неизвестная функция $\beta(r)$, входящая в решение (6),(7), определяется из интегрального уравнения

$$\beta(r) = q(r) + \int_0^a \beta(\xi) g_{1w}(r, \xi) d\xi, \quad r < a, \quad (9)$$

ядро которого имеет вид

$$g_{1w}(r, \xi) = k g_w(r, \xi) = \chi \xi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{tdt}{t+\chi}. \quad (10)$$

Исследован частный случай решения (6)-(10), когда параметр k обращается в нуль. В случае нагрузки, равномерно распределенной по круговой области, из аналитического решения (7) при $\chi=0$ получены известные формулы С.П.Тимошенко, Дж. Гудьера для компонент тензора напряжений и вектора перемещений на границе полупространства. В результате вычисления входящих в соотношения (6),(8) несобственных интегралов выражения для перемещений в точках упругого полупространства при $q=const$ записаны через специальные функции.

В третьей главе приведена компактная форма точного решения осесимметричной смешанной задачи теории упругости о деформации изотропного полупространства под действием **сосредоточенной силы** в случае, когда в точках граничной поверхности нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения отсутствуют, на бесконечности напряжения обращаются в нуль.

Для перехода в решении (4) от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе P рассмотрен случай, когда к упругому полупространству приложена нагрузка постоянной интенсивности $q(r) = q_0$ в круговой области радиуса ε . Тогда $q_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P}{\pi\varepsilon^2}$, и для трансформанты $\bar{\beta}(t)$, согласно (5), (4), имеем

$$\bar{\beta}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P}{\pi\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon r J_0(rt) dr + \chi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \bar{\beta}(t_1) \frac{t_1}{t_1 + \chi} \left[\int_0^\varepsilon r J_0(rt) J_0(rt_1) dr \right] dt_1. \quad (11)$$

Решив уравнение (11), найдем $\bar{\beta}(t) = \frac{P}{2\pi}$. Подставляя выражение для трансформанты в формулы (4), получаем аналитическое решение задачи о сосредоточенной силе, приложенной к изотропному полупространству с упруго закрепленной границей. В работе показано, что в случае незакрепленной поверхности ($\chi=0$) полученные формулы для компонент тензора напряжений и вектора перемещения совпадают с известным решением задачи Буссинеска.

Решение задачи о сосредоточенной силе в случае $\chi \neq 0$ преобразовано к компактному виду путем вычисления входящих в него несобственных интегралов через специальные функции. В результате получены формулы для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в точках граничной плоскости $z=0$:

$$u(r,0) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)P\chi}{2\pi E} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} [H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)] \right\},$$

$$w(r,0) = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2} [H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)] \right\},$$

$$\sigma_z(r,0) = \frac{P\chi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2} [H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)] \right\},$$

$$\sigma_r(r,0) = \frac{P\chi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2} [H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)] \right\} - \frac{(1-2\nu)P\chi}{2\pi r} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} [H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)] \right\},$$

$$\sigma_{\theta}(r,0) = \frac{\nu P \chi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\pi \chi}{2} [H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)] \right\} + \frac{(1-2\nu)P\chi}{2\pi r} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} [H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)] \right\},$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0. \quad (12)$$

Здесь $H_m(r\chi)$ – функции Струве, $Y_m(r\chi)$ – функции Неймана, $m = 0;1$.

Для подтверждения правильности соотношений (12) из них при $\chi \rightarrow 0$ получено решение задачи Буссинеска в точках граничной плоскости.

Для представления в компактной форме решения задачи о сосредоточенной силе в точках (r,z) введены обозначения для сходящихся несобственных интегралов

$$R_m(r,z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} J_m(rt) \frac{dt}{t+\chi}, m = 0,1 \quad (13)$$

и далее вычислены интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} J_0(rt) \frac{tdt}{t+\chi} = \frac{1}{\rho} - \chi R_0(r,z); \quad \int_0^{\infty} e^{-tz} J_0(rt) \frac{t^2 dt}{t+\chi} = \frac{z}{\rho^3} - \frac{\chi}{\rho} + \chi^2 R_0(r,z);$$

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} J_1(rt) \frac{tdt}{t+\chi} = \frac{\rho-z}{r\rho} - \chi R_1(r,z); \quad \int_0^{\infty} e^{-tz} J_1(rt) \frac{t^2 dt}{t+\chi} = \frac{z}{\rho^3} - \frac{\chi(\rho-z)}{r\rho} + \chi^2 R_1(r,z). \quad (14)$$

Здесь $\rho = (r^2 + z^2)^{1/2}$. С учетом равенств (4), (13), (14) формулы для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в произвольных точках изотропного полупространства с упруго закрепленной границей принимают вид

$$u(r,z) = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E} \left\{ \frac{rz}{\rho^3} - (1-2\nu + \chi z) \left[\frac{\rho-z}{r\rho} - \chi R_1(r,z) \right] \right\},$$

$$w(r,z) = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E \rho} \left\{ \frac{z^2}{\rho^2} - z\chi + 2(1-\nu) + \chi\rho(\chi z + 2\nu - 2)R_0(r,z) \right\},$$

$$\sigma_z(r,z) = -\frac{P}{2\pi\rho^3} \left\{ \frac{3z^3}{\rho^2} - \chi \left[z^2 + \rho^2(1-\chi z)(1-\chi\rho R_0(r,z)) \right] \right\},$$

$$\sigma_r(r,z) = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) - \frac{3zr^2}{\rho^5} \right\} + \frac{P\chi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\rho^3} (r^2 + \chi z\rho^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{z(\rho-z)}{r^2\rho} - \chi(\chi z + 1)R_0(r,z) - \frac{1}{r}(1-2\nu + \chi z)R_1(r,z) \right\},$$

$$\sigma_{\theta}(r, z) = \frac{P(1-2\nu)}{2\pi} \left\{ \frac{z}{\rho^3} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \right\} + \frac{P\chi}{2\pi} \left\{ \frac{\nu}{\rho} - \frac{z(\rho-z)}{\rho r^2} - \chi \nu R_0(r, z) + \frac{1}{r} (1-2\nu + \chi z) R_1(r, z) \right\},$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{Pz}{2\pi} \left\{ -\frac{3rz}{\rho^5} + \chi \left[\frac{r}{\rho^3} - \frac{\chi(\rho-z)}{r\rho} + \chi^2 R_1(r, z) \right] \right\}. \quad (15)$$

Для подтверждения достоверности решения (15) оно было получено двумя способами. Точное аналитическое решение задачи в форме (15) по сравнению с формулами (4) обладает рядом преимуществ, а именно: объем предварительных исследований перед его численной реализацией значительно меньше, так как оно содержит только два интеграла. Причем оба интеграла $R_0(r, z), R_1(r, z)$ достаточно быстро сходятся, что существенно уменьшает время компьютерных расчетов и позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругого полупространства при значительном удалении от точки приложения сосредоточенной силы и практически в любом диапазоне изменения параметра χ .

На рис. 2-4 представлены графики распределения нормальных напряжений σ_z в плоскостях, параллельных граничной поверхности. Сосредоточенная сила полагалась равной $P = 1 \text{ MN}$, все величины, имеющие размерность длины, задавались в метрах.

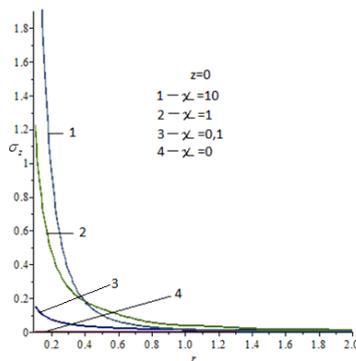
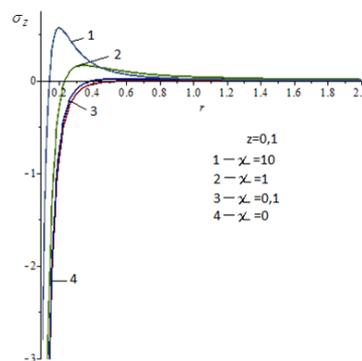
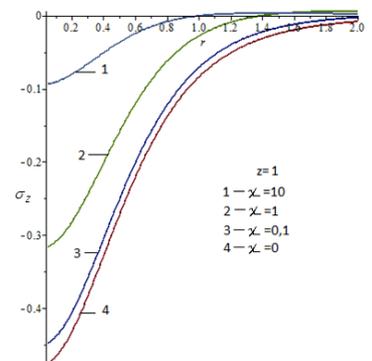
Рис.2. $\sigma_z, z=0$ Рис.3. $\sigma_z, z=0.1$ Рис.4. $\sigma_z, z=1$

Рис.3-4 показывают, что при увеличении r монотонно убывающие кривые $\sigma_z = \sigma_z(r)$ пересекают ось r и напряжения становятся растягивающими. При приближении плоскости $z = const$ к границе полупространства координаты точек пересечения уменьшаются, а максимум растягивающих напряжений увеличивается, перемещаясь к оси z . Из рис.2 видно, что в граничной плоскости $z=0$ напряжения σ_z положительны и монотонно уменьшаются с ростом r .

На рис. 5-12 приведены изолинии напряжений в упругом полупространстве при $\chi = 0.1; 1(\text{M}^{-1}), \nu = 0.25$. Рис.7-8 показывают, что область сжимающих напряжений σ_r располагается между областями растягивающих напряжений, прилегающими к осям r, z . Из анализа рисунков 5-12 следует, что в упругом полупространстве с ростом χ размеры

областей растягивающих напряжений увеличиваются. Расчеты показывают также, что в окрестности сосредоточенной силы максимальные значения нормального

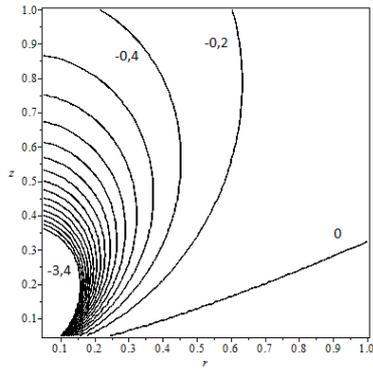


Рис. 5. Изолинии
 $\sigma_z(r, z) = const, \chi = 0.1$

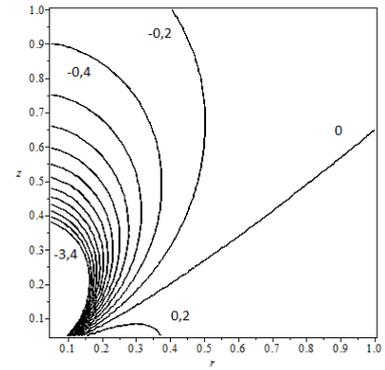


Рис. 6. Изолинии
 $\sigma_z(r, z) = const, \chi = 1$

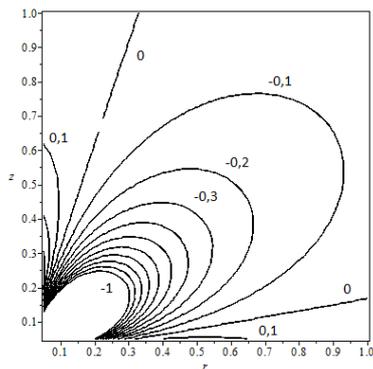


Рис. 7. Изолинии
 $\sigma_r(r, z) = const, \chi = 0.1$

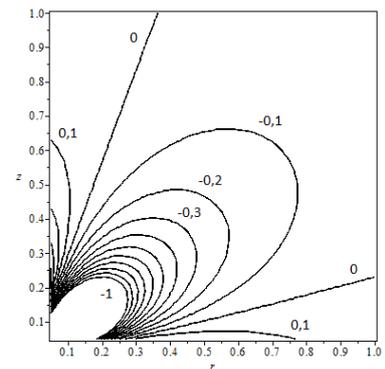


Рис. 8. Изолинии
 $\sigma_r(r, z) = const, \chi = 1$

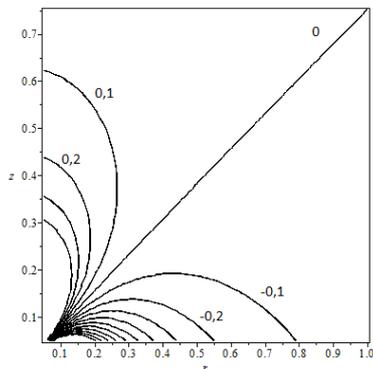


Рис. 9. Изолинии
 $\sigma_\theta(r, z) = const, \chi = 0.1$

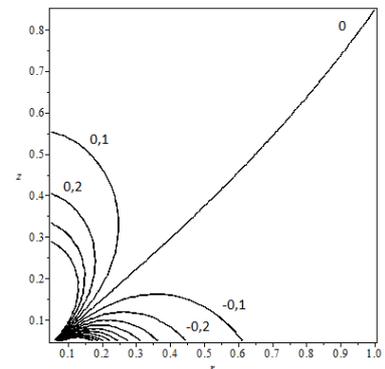


Рис. 10. Изолинии
 $\sigma_\theta(r, z) = const, \chi = 1$

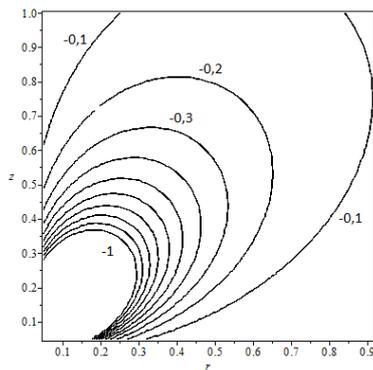


Рис.11. Изолинии
 $\tau_{rz}(r, z) = const, \chi = 0.1$

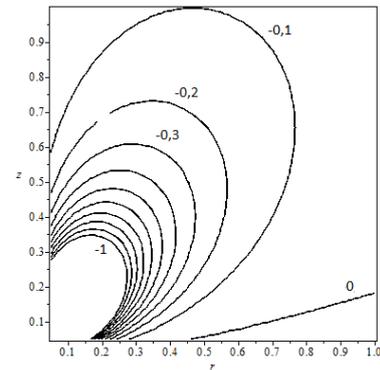


Рис.12. Изолинии
 $\tau_{rz}(r, z) = const, \chi = 1$

напряжения σ_z в несколько раз больше, чем касательного τ_{rz} , и на порядок больше абсолютных значений напряжений σ_θ, σ_r .

С ростом координаты r и параметра χ время расчета компонент напряжений увеличивается. Уравнения (15) позволили впервые построить изолинии напряжений в области $\{r > 0.3, z > 0.3\}$ в диапазоне изменения параметра χ от нуля до $10m^{-1}$.

В четвертой главе исследована осесимметричная задача о действии **равномерно распределенной** нагрузки на изотропное полупространство при упругом закреплении границы вне области приложения внешних усилий.

Численная реализация аналитического решения задачи с граничными условиями (3) начинается с исследования интегрального уравнения (9), которое представляет собой неоднородное уравнение Фредгольма второго рода. Его решение может быть осуществлено методом последовательных приближений

$$\beta^{[0]}(r) = q(r), \beta^{[j+1]}(r) = q(r) + \int_0^a \beta^{[j]}(\xi) g_{1w}(r, \xi) d\xi, j \geq 0 \quad (16)$$

Показано, что в случае равномерно распределенной нагрузки интегральный оператор уравнения (9) сжимающий.

Распределение напряжения $\sigma_z(r)$ на границе упругого полупространства. При решении задач строительной и горной механики большой практический интерес представляет расчет нормального напряжения $\sigma_z(r, 0)$ на границе полупространства. Для идентификации варианта $q(r) = q_0, k \neq 0$ функции $\beta(r), \sigma_z(r, 0), u(r, 0), w(r, 0)$ отмечены верхним индексом «e». Формула (7) для $\sigma_z(r, 0)$ и интегральное уравнение (9) преобразованы к виду

$$\sigma_z^e(r, 0) = \chi \int_0^1 \beta^e(\xi_1) \xi_1 \varphi(\xi_1, r) d\xi_1, r > 1, \quad (17)$$

$$\beta^e(\xi_1) = 1 + \int_0^1 \beta^e(\xi) g_{1w}(\xi_1, \xi) d\xi, \xi_1 < 1, \quad (18)$$

где «волна» над безразмерными величинами $\tilde{r} = r/a, \tilde{\beta}^e(r) = \beta^e(r)/q_0, \tilde{\sigma}_z^e(r, 0) = \sigma_z^e/q_0$ опущена, функция $\varphi(\xi_1, r)$ определяется равенством

$$\varphi(\xi_1, r) = \frac{2}{\pi^2} K\left(\frac{\xi_1}{r}\right) - \chi \int_0^\infty J_0(\xi_1 t) J_0(rt) \frac{dt}{t + \chi}. \quad (19)$$

Здесь $K\left(\frac{\xi_1}{r}\right)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Из рис. 13 видно, что при упругом закреплении границы ($\chi \neq 0$) максимум напряжения достигается на контуре круговой области приложения нагрузки $r=1$. С ростом параметра χ от 0.2 до 1.8 максимум σ_z увеличивается. При удалении от области приложения нагрузки абсолютные значения функции $\sigma_z(r,0)$ монотонно убывают.

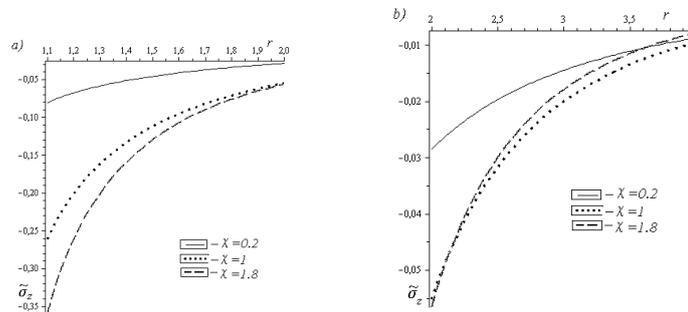


Рис.13. Распределение напряжения σ_z в области упругого закрепления границы

Как показывает рис.13, при меньших значениях параметра χ убывание кривых происходит медленнее. Поэтому при увеличении r график σ_z , соответствующий значению $\chi=1.8$, пересекает кривые, построенные для $\chi=1$ (в точке $r_1 \approx 2.1$) и для $\chi=0.2$ (в точке $r_2 \approx 3.6$). Из рисунка видно, что при $r < r_1$ напряжения σ_z увеличиваются с ростом параметра χ . Если же $r > r_1$, то закономерность о зависимости напряжения от параметра χ усложняется.

Распределение перемещений на границе упругого полупространства. Расчёт перемещений по формулам (7) связан с преодолением значительных вычислительных трудностей, так как выражения для $g_u(\xi, r)$, $g_w(\xi, r)$ содержат несобственные интегралы от знакопеременных подынтегральных функций. При численных исследованиях формулы для перемещений на границе преобразовывались к виду

$$u^e(r,0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \int_0^a \beta^e(\xi) \xi \varphi_1(\xi, r) d\xi, \quad (20)$$

$$w^e(r,0) = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \beta^e(\xi) \xi \varphi_2(\xi, r) d\xi, \quad (21)$$

где функции $\varphi_1(\xi, r)$, $\varphi_2(\xi, r)$ определяются соотношениями

$$\varphi_1(\xi, r) = -\chi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{dt}{t + \chi} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} \xi < r \\ \xi > r \end{cases},$$

$$\varphi_2(\xi, r) = -\chi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{dt}{t + \chi} + \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} K\left(\frac{\xi}{r}\right) \\ \frac{1}{\xi} K\left(\frac{r}{\xi}\right) \end{pmatrix}, \begin{cases} \xi < r \\ \xi > r \end{cases},$$

функция $\beta^e(r)$ находится из решения интегрального уравнения

$$\beta^e(r) = q_0 + \int_0^a \beta^e(\xi) g_{1w}(\xi, r) d\xi, \quad r < a.$$

На рис. 14 представлены графики распределения радиальных перемещений для $\nu = 0.25$; $E = 10^4$ МПа; $q_0 = 1$ МПа.

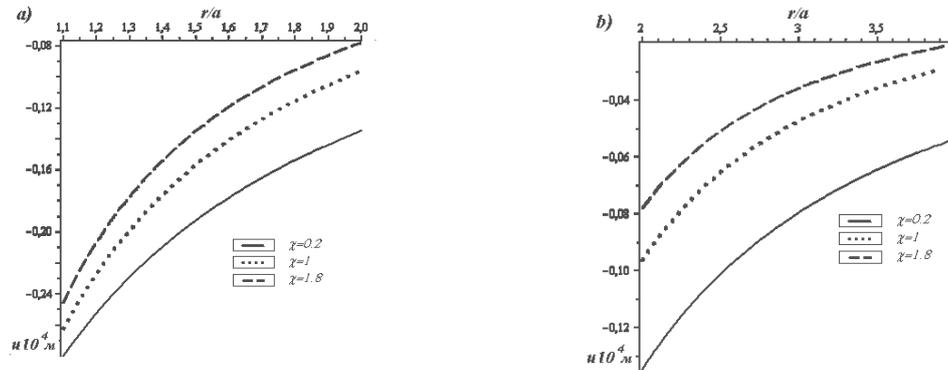


Рис. 14. Радиальные перемещения на границе полупространства

Из расчетов по формулам (20), (21) следует, что с ростом r радиальные и вертикальные перемещения на отрезке $r/a \in [1; 4]$ монотонно уменьшаются. В исследуемой области упругого закрепления границы имеет место закономерность: чем больше χ , тем меньше перемещения $u(r), w(r)$. Влияние параметра χ на распределение радиальных и вертикальных перемещений возрастает при удалении от области приложения нагрузки. Так, при изменении параметра χ от 0.2 до 1.8 вертикальные перемещения уменьшаются в точке $r/a = 1$ приблизительно в 2 раза, в точке $r/a = 4$ – в 30 раз.

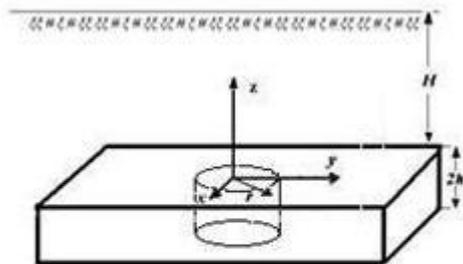


Рис. 15. Схема угольного пласта с цилиндрической выработкой

Задача об опорном давлении. Полученные аналитические решения смешанных задач и методы их численной реализации имеют непосредственное применение при исследовании задач механики горных пород о разработке угольных пластов. Схема цилиндрической выработки показана на рис.15. Полные напряжения в горном массиве могут быть представлены в виде суммы исходных напряжений, обусловленных весом пород, и дополнительных, появление которых связано с образованием выработки. В точках кровли выработки дополнительное напряжение постоянно. Оно равно $\sigma_z(r, 0) = \rho_n g H$, $r \in (0, a)$, где ρ_n – средняя плотность пород, g – ускорение силы тяжести, H – глубина залегания пласта, a – радиус сечения выработки. Из рис. 16 следует, что максимум опорного давления на угольный пласт достигается при $r/a = 1$. С ростом параметра χ от 0.2 до 1.8 максимум увеличивается. При удалении от выработки кривые могут пересекаться, а закономерности о влиянии параметра χ на опорное давление изменяться. Из рис. 16 видно, что с ростом глубины H от 600м до 1000м максимум опорного давления увеличивается на 56% при $\chi = 0.2 \cdot m^{-1}$ и на 67% при $\chi = 1.8 \cdot m^{-1}$. Графики показывают

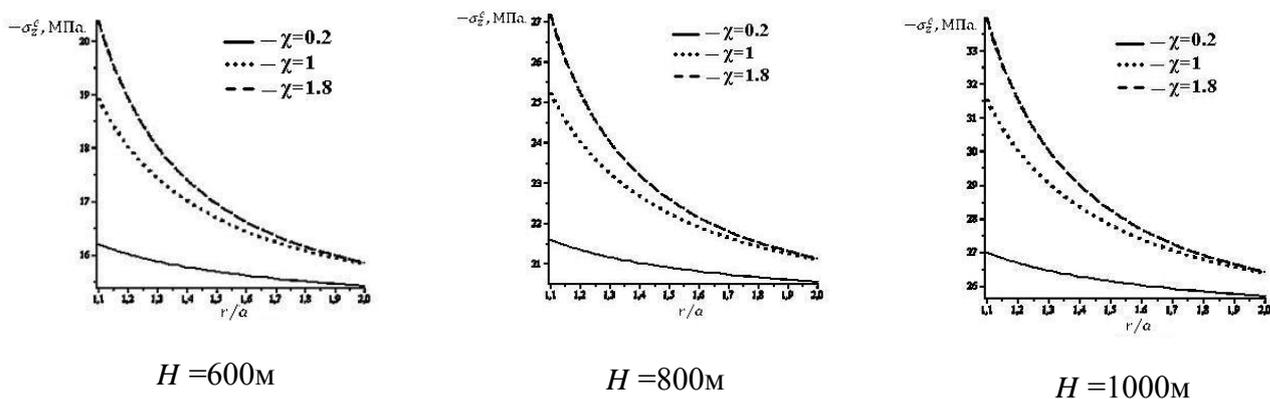


Рис. 16. Распределение опорного давления на угольный пласт

также, что с ростом глубины опорное давление вблизи выработки увеличивается. Этот вывод подтверждает общеизвестную закономерность.

Заключение

Диссертация посвящена построению аналитических решений осесимметричных смешанных задач о действии нормальных усилий на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей и исследованию на их основе напряженно-деформированного состояния упругого тела при варьировании его физико-механических свойств и типа приложенной нагрузки.

Основные результаты, приведенные в работе, состоят в следующем:

1. Впервые с помощью метода интегрального преобразования Ханкеля получено аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи о деформации изотропного полупространства при упругом закреплении его границы вне области приложения распределенной нагрузки, заданной функцией, зависящей от радиальной координаты. Построена вторая форма аналитического решения исследуемой задачи путем перехода от трансформанты к оригиналу введенной функции, характеризующей нагрузку на граничной поверхности полупространства.

2. Показано, что в частном случае, когда $k = 0$, при действии на полупространство распределенной нагрузки, зависящей от радиальной координаты, интегральная форма построенного аналитического решения совпадает с решением Тередзавы. В случае нагрузки, равномерно распределенной по круговой области, из аналитического решения осесимметричной смешанной задачи при $k = 0$ получены формулы С.П.Тимошенко, Дж.Гудьера для компонент тензора напряжений и вектора перемещений на границе полупространства.

3. Для компонент вектора перемещения в точках упругого полупространства с незакрепленной граничной поверхностью из аналитического решения осесимметричной задачи в случае равномерно распределенной нагрузки в результате вычисления несобственных интегралов впервые получены компактные выражения через специальные функции.

4. Математически обоснован переход от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе в аналитическом решении задачи о деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной границей. Предложена новая компактная форма точного решения задачи о сосредоточенной силе в случае, когда поверхность полупространства упруго закреплена. Показано, что при $\chi = 0$ полученные формулы совпадают с решением задачи Буссинеска. Численно проанализированы закономерности о влиянии параметра χ на распределение напряжений в полупространстве, деформируемом сосредоточенной силой.

5. Построено интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\beta(r)$, входящей в решение задачи о действии распределенной нагрузки на полупространство с упруго закрепленной границей. Численно исследована зависимость β от радиальной координаты r и параметра χ в случае равномерно распределенной нагрузки.

6. Предложен алгоритм аналитических преобразований несобственных интегралов, содержащихся в решениях исследуемых смешанных задач. Его реализация существенно уменьшает время вычисления интегралов на ПК.

7. Проанализированы закономерности распределения нормального напряжения $\sigma_z(r,0)$, а также радиальных и вертикальных перемещений на упруго закрепленной части поверхности полупространства ($r/a > 1$) в случае, когда в круговой области приложена нагрузка постоянной интенсивности. Из расчетов следует, что: -максимум нормальных напряжений $\sigma_z(r,0)$ достигается на контуре области приложения нагрузки $r/a = 1$; -с ростом χ максимум нормальных напряжений $\sigma_z(r,0)$ увеличивается; - в области $r \in [1;4]$ с ростом параметра χ напряжения $\sigma_z(r,0)$ увеличиваются либо уменьшаются в зависимости от значения координаты r ; -на отрезке $r \in [1;4]$ с ростом r вертикальные и радиальные перемещения монотонно уменьшаются; -чем больше χ , тем меньше перемещения $u(r)$ и $w(r)$; -влияние параметра χ на распределение перемещений увеличивается при удалении от области приложения нагрузки.

8. На основе аналитического решения осесимметричной смешанной задачи разработан метод расчёта опорного давления (нормального напряжения на контакте пород с пластом полезного ископаемого) в окрестности цилиндрической выработки. Численно исследована зависимость опорного давления на угольный пласт от глубины его залегания и упругих свойств горных пород.

Список публикаций автора по теме диссертации

В рецензируемых журналах, включенных в список ВАК

1. Залётов С.В., Хапилова Н.С. Аналитическое решение осесимметричной задачи о деформации изотропного полупространства с упруго закрепленной границей под действием распределённой нагрузки // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2016. №5. С.67- 71.

2. Хапилова Н.С., Залётов С.В. Точное решение задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей// Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2015. №3(225). С. 107-114.

3. Залётов С.В. Осесимметричная задача об опорном давлении на деформируемый угольный пласт// Горный информационно-аналитический бюллетень. Научно-технический журнал. 2015. №3. С.135–139.

4. Хапилова Н.С., Залётов В.В., Залётов С.В. Влияние деформируемости угольного пласта на пространственное напряженно-деформируемое состояние массива горных пород в окрестности полости // Горный информационно-аналитический бюллетень. Научно-технический журнал. 2015. №3. С.140–145.

5. Хапилова Н.С., Залетов В.В., Залетов С.В. Осесимметричная задача о распределении напряжений на упруго закрепленной границе изотропного полупространства при действии нормальной нагрузки //Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. № 4. С.31 – 34.

6. Хапилова Н.С., Залетов В.В., Залетов С.В. Осесимметричная задача о действии распределенной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной

границей // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Т.25. С. 251 – 259. (реферируется в zbMATH)

Статьи, опубликованные в научных журналах и в трудах международных конференций

7. Хапилова Н.С., Залётов С.В. Осесимметричная деформация изотропного полупространства при упругом закреплении границы вне области приложения нормальной нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XV Междунар. конф. Т.2. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2011. С. 246 – 250.

8. Хапилова Н., Зальотов В., Зальотов С. Осесимметричне деформування ізотропного півпростору з пружно закріпленою границею під дією нормальних зусиль / Современные проблемы механики и математики: В 3-х т. Под общ. ред. Р.М.Кушнера, Б.И.Пташника. Т.1. Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2013. С. 176 – 178.

9. Залётов В.В., Залётов С.В., Хапилова Н.С. Распределение перемещений на границе изотропного полупространства при упругом закреплении его поверхности вне круговой области приложения нормальной нагрузки// Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону, 15 – 18 октября 2013г. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013. Т.1. С. 208 – 212.

10. Zaletov S. Mathematical modeling of the process of the deformation of an isotropic half-space under the action of distributed load at elastic fixing of the boundary// Proceedings of 6th International Conference of Young Scientists CSE- 2013, November 21-23, 2013. Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic Publishing House, Electronic edition, 2013. P. 132 – 133.

11. Залётов С.В. Осесимметричная задача об опорном давлении на деформируемый угольный пласт// Научный вестник Московского государственного горного университета. №1(46), 01.2014. С.37–43.

12. Залётов С.В., Залётов В.В., Хапилова Н.С. Влияние деформируемости угольного пласта на пространственное напряженно-деформируемое состояние массива горных пород в окрестности полости // Научный вестник Московского государственного горного университета. №1(46), 01.2014. С.100–107.

13. Залётов В.В., Залётов С.В., Илюхин А.А. Численное исследование аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XVII Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2014. Т.1. С. 206 – 210.

14. Khapilova N.S., Zaletov S.V. The exact solution of the problem on a concentrated-force action on the isotropic half-space with the boundary fixed elastically//Journal of St. Petesburg state polytechnical university. Physics and Mathematics. 2015. 1-3 (128). P. 287-292.

Тезисы докладов на международных конференциях

15. Хапилова Н.С., Залётов С.В. Осесимметричная деформация изотропного полупространства при упругом закреплении границы вне области приложения нормальной нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы XV Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2011. С.48.

16. Залётов В.В., Залётов С.В., Хапилова Н.С. Распределение перемещений на границе изотропного полупространства при упругом закреплении его поверхности вне круговой области приложения нормальной нагрузки// Тезисы докладов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2013. С.66.

17. Залётов В.В., Залётов С.В., Илюхин А.А. Численное исследование аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы XVII Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2014. С. 59.