

*На правах рукописи*

**Павлов Владимир Александрович**

**Автоматический логический вывод в интуиционистских  
логических исчислениях обратным методом Маслова**

Специальность 05.13.11 —

«Математическое и программное обеспечение вычислительных машин,  
комплексов и компьютерных сетей»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2017

Работа выполнена на кафедре «Компьютерные интеллектуальные технологии» Института компьютерных наук и технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Научный руководитель:

**Щукин Александр Валентинович,**

кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Компьютерные интеллектуальные технологии» Института компьютерных наук и технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Официальные оппоненты:

**Бельтюков Анатолий Петрович,**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ информатики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

**Соловьев Игорь Павлович,**

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики математико-механического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Ведущая организация:

федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_ г. в \_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9 и на сайте <https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/LKfkdgQnht.pdf>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_ г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.232.51

доктор физико-математических наук, профессор



Демьянович Юрий Казимирович

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы исследования

Диссертационная работа посвящена применению обратного метода С. Ю. Маслова для автоматизации поиска логического вывода в интуиционистской логике первого порядка.

Вопросы автоматизации доказательств изучаются в ведущих научно-исследовательских институтах мира. Данная область исследований на стыке математической логики и искусственного интеллекта называется *автоматическим логическим выводом (АЛВ)*. Программные средства для автоматического поиска логического вывода, называемые *программами АЛВ («пруверами»)*, активно применяются в математике, в системах искусственного интеллекта, при решении задач формальной верификации и синтеза ПО<sup>1</sup>.

Интуиционистские логические исчисления широко используются в математической логике и в различных разделах информатики. Одной из наиболее востребованных особенностей этих исчислений является возможность из доказательства существования некоторого объекта извлечь способ его построения. В работе под *интуиционистской логикой первого порядка* понимается исчисление предикатов А. Гейтинга и равнообъемные ему исчисления. В отличие от классического исчисления предикатов, в интуиционистском исчислении неприменимы классические законы исключенного третьего  $A \vee \neg A$  и снятия двойного отрицания  $(\neg\neg A) \supset A$ .

Программы АЛВ для интуиционистской логики первого порядка находят применение в интерактивных программах АЛВ (для логик высшего порядка), таких как *Coq* и *Nuprl*, где они используются в качестве тактик поиска вывода и позволяют частично автоматизировать решение сложных задач. Однако эксперименты показывают, что эти тактики пока обладают недостаточно высокой результативностью. Поэтому поставленная задача важна для повышения степени автоматизации интерактивных программ АЛВ, в том числе при их использовании для верификации и синтеза ПО.

### Степень разработанности темы

Среди методов логического вывода для классической логики первого порядка наибольшее распространение и развитие получил метод резолюций, позволяющий устанавливать выводимость формул, приведенных к сколемовской стандартной форме. Однако к интуиционистской логике метод резолюций неприменим, так как в ней не все формулы могут быть приведены к указанному виду эквивалентными преобразованиями.

В программах АЛВ для интуиционистской логики обычно используются табличные методы логического вывода. Однако существующие программные реализации пока не

---

<sup>1</sup> Программное обеспечение.

справляются с достаточно сложными задачами, что подтверждается опубликованными в сети Интернет результатами их тестирования на библиотеке ИЛТР. Эта библиотека содержит множество актуальных задач, включающих задачи из областей формальной верификации, синтеза ПО и различных направлений искусственного интеллекта.

В связи с приведенной выше проблемой, особый научный и практический интерес представляют исследования обратного метода логического вывода, который был предложен С. Ю. Масловым еще в 1964 году, но начал активно применяться на практике лишь в последнее время. Общая схема обратного метода может быть конкретизирована для каждого секвенциального исчисления, обладающего *свойством подформульности* (в вывод формулы могут входить лишь ее подформулы). Метод хорошо приспособлен для автоматизации поиска вывода в неклассических логиках, использует свойство подформульности для организации поиска вывода, направленного на целевую формулу. В отличие от ряда табличных методов, обратный метод не требует использования глобальных переменных, выполнения поиска с возвратом и отслеживания циклов.

В литературе описано несколько программных реализаций обратного метода для интуиционистской логики первого порядка, из которых выделяются программы Gandalf и Imogen. При этом корректность первой программы подвергается сомнению. Вторая программа является достаточно эффективной, но ее авторы не используют ряд стратегий поиска вывода, предложенных в работах С. Ю. Маслова, В. П. Оревкова, Г. Е. Минца, А. Воронкова, А. Дегтярева, Т. Таммета. В то же время стратегии из приведенных работ могут помочь устранить множество избыточных ветвей дерева поиска вывода.

Все вышеизложенное раскрывает актуальную потребность ликвидации указанного пробела между теорией и практикой за счет применения существующих результатов из теории обратного метода при разработке алгоритмов и программ поиска вывода в интуиционистских исчислениях. Кроме того, в литературе отсутствуют экспериментальные сравнения стратегий, предложенных разными авторами. Но такое сравнение полезно для построения экономной с точки зрения используемых ресурсов (процессорного времени, оперативной памяти и т. д.) программной реализации обратного метода.

### **Цель и задачи диссертационной работы**

Целью работы является построение математического аппарата и алгоритма поиска логического вывода в интуиционистских исчислениях на основе обратного метода С. Ю. Маслова с последующей разработкой программного обеспечения, позволяющего расширить спектр решаемых задач в сравнении с существующими программами АЛВ для интуиционистской логики.

Для оценки возможности достижения поставленной цели следует разработать программу АЛВ, провести ее тестирование и сравнить с существующими программами АЛВ на задачах из библиотеки ILTP, руководствуясь признанными мировыми практиками.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Выполнить исследование области АЛВ и научных работ по обратному методу.
2. Построить интуиционистское исчисление обратного метода, дополнить его стратегиями поиска вывода для уменьшения размера пространства поиска вывода.
3. Сформулировать алгоритм поиска вывода в полученном логическом исчислении. Реализовать алгоритм в виде программы АЛВ с возможностью комбинирования предложенных стратегий. В целях повышения гибкости программы предусмотреть интерактивный режим взаимодействия с пользователем.
4. Выполнить экспериментальное сравнение стратегий, выявить оптимальный набор стратегий. Провести тестирование программы и сравнить ее с другими программами на задачах из ILTP, включая задачи из области верификации ПО.

Цель и задачи диссертационной работы соответствуют специальности 05.13.11 «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей», в частности, пунктам 1<sup>1</sup> и 7<sup>2</sup> из паспорта этой специальности.

### **Объект и предмет исследования**

Объектом исследования являются методы, алгоритмы и программные средства автоматического логического вывода. Предметом исследования являются обоснование и разработка математического и программного обеспечения для решения задачи автоматического поиска вывода в интуиционистских логических исчислениях.

### **Методология и методы исследования**

В работе используется признанная **методология** исследований в области программной инженерии: идентификация и анализ проблемы, обзор существующей литературы, постановка задачи и выбор подходящих средств ее решения, реализация найденного решения в виде программного инструмента, апробация и анализ результатов.

Для решения поставленных задач использованы теория и **методы** математической логики, теории доказательств, объектно-ориентированного программирования, планирования инженерных экспериментов.

---

<sup>1</sup> П. 1 «Модели, методы и алгоритмы проектирования и анализа программ и программных систем, их эквивалентных преобразований, верификации и тестирования».

<sup>2</sup> П. 7 «Человеко-машинные интерфейсы...».

## **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Построено новое интуиционистское исчисление обратного метода для вывода формул логики первого порядка, доказана его равнообъемность исчислению ГНРС А. Г. Драгалина. Выводы в построенном исчислении могут содержать секвенции более общего вида по сравнению с выводами в существующих интуиционистских исчислениях обратного метода. Предложены стратегии поиска вывода для этого исчисления (включая новые стратегии для обратного метода), позволяющие уменьшить размер пространства поиска вывода. Доказана полнота каждой стратегии и любой их комбинации.
2. Разработан алгоритм поиска вывода, применимый к разным исчислениям обратного метода. На его основе создана программа АЛВ, позволяющая за счет комбинирования предложенных в работе стратегий решить новые задачи, которые не могут решить существующие программы АЛВ для интуиционистской логики.
3. Проведено экспериментальное сравнение используемых стратегий по ряду критериев на задачах различной сложности.

## **Научная новизна**

Научная новизна диссертационной работы обусловлена:

1. Разработанным математическим аппаратом, включающим новое интуиционистское исчисление обратного метода, выводы в котором могут содержать секвенции более общего вида по сравнению с выводами в существующих интуиционистских исчислениях обратного метода, а также адаптированные для этого исчисления и новые стратегии поиска вывода.
2. Сформулированным алгоритмом поиска вывода в полученном исчислении и его реализацией в виде программы АЛВ с возможностью комбинирования стратегий.
3. Результатами экспериментов по многокритериальному сравнению всех внедренных стратегий на актуальных задачах различной сложности.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

Основная теоретическая ценность работы заключается в новых результатах, касающихся исследования свойств интуиционистских исчислений обратного метода и стратегий поиска вывода в этих исчислениях.

Практическую ценность несут в себе предложенный алгоритм поиска вывода, разработанная на его основе программа АЛВ, результаты проведенных экспериментов, а также примеры доказательства теорем обратным методом, приведенные в тексте диссертации.

### **Достоверность основных положений**

Достоверность основных положений диссертационной работы подтверждается:

- всесторонним анализом существующих научно-исследовательских работ по обратному методу и другим методам логического вывода;
- доказательством равнообъемности построенного исчисления и исчисления ГНРС, доказательствами полноты стратегий;
- проведением исследований и анализом их результатов в соответствии с признанными мировыми практиками;
- тестированием программы АЛВ на обширной выборке задач из библиотеки ПТР и сравнением с существующими программами.

### **Апробация работы**

Основные положения работы докладывались, обсуждались и получили одобрение научной общественности на семинарах кафедры системного программирования Математико-механического факультета СПбГУ, на семинарах «Информатика и компьютерные технологии» в СПИИРАН и «Городской семинар по математической логике» в ПОМИ РАН, а также на 10 международных и всероссийских конференциях и семинарах:

- XXXIX, XL и XLI международные конференции «Неделя науки СПбГПУ»;
- 4-я международная конференция «Knowledge Engineering and Semantic Web» (2013);
- XXI и XXII международные семинары «Nonlinear Phenomena in Complex Systems» (NPSC'2014 и NPSC'2015);
- XVII международная конференция «Foundations & Advances in Nonlinear Science» (2014);
- международный симпозиум «Mathematics of XXI Century & Natural Science» (2015);
- XXIII международная научная конференция «Ломоносов-2016»;
- 11-я международная Ершовская конференция по информатике (PSI-2017).

Актуальность исследований и результатов диссертационной работы подтверждается победой на конкурсе грантов 2013 года для студентов и аспирантов вузов Санкт-Петербурга.

### **Публикации по теме работы**

Результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, нашли отражение в 10 научных работах, из которых 5 [1-5] содержат основные результаты работы:

- статьи [1] и [2] опубликованы в издании из перечня российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций;
- работы [3] и [4] опубликованы в зарубежных изданиях, входящих в реферативную базу данных Scopus, т. е. приравниваемых к изданиям, входящим в вышеуказанный перечень;

- имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [5].

Статьи [2, 4] и публикации в трудах конференций [3, 7–10] написаны в соавторстве. В этих работах В. Г. Паку, А. В. Щукину и Т. Х. Черкасовой принадлежит постановка задач. В. Г. Паку также принадлежит обзор литературы по обратному методу в статье [4]. Остальные результаты в указанных работах принадлежат диссертанту. В частности, соискателю принадлежат: новое интуиционистское исчисление обратного метода, адаптированные и новые стратегии поиска вывода, формулировки теорем и идеи доказательств, алгоритм поиска вывода и программная реализация, эксперименты с программой, примеры вывода формул.

**Личный вклад автора.** Результаты работы получены соискателем самостоятельно.

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 162 наименований и четырех приложений. Общий объем работы составляет 223 страницы, включая 64 страницы приложений.

## **Содержание работы**

Во введении к диссертационной работе обосновывается актуальность поставленной задачи, формулируются цели и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость, а также сведения об апробации работы.

Первая глава работы содержит обзор предметной области: программы АЛВ и их применение, методы поиска вывода для логики предикатов (метод резолюций, табличные методы, обратный метод). Приводится подробный обзор публикаций по обратному методу.

Вторая глава посвящена построению нового интуиционистского исчисления обратного метода  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$  для вывода формул логики первого порядка. Аксиомы и правила вывода полученного исчисления  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$  зависят от доказываемой формулы  $\xi$ .

**Соглашение.** В названии логического исчисления и в дальнейшем изложении  $\xi$  обозначает *замкнутую очищенную* предикатную формулу, т. е. формулу без свободных переменных, в которой все кванторы связывают разные переменные. Кроме того, формула  $\xi$  не должна содержать вырожденных кванторов и может содержать только пропозициональные связки  $\neg, \wedge, \vee, \supset$  и символы кванторов  $\forall, \exists$ .

Запись вида  $var(F)$  обозначает множество всех переменных формулы  $F$ , а  $free(F)$  — множество всех ее свободных переменных.

Пусть  $\theta$  — подстановка вида  $\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ . Тогда  $dom(\theta) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $ran(\theta) = \{t_1, \dots, t_n\}$ , а  $vran(\theta)$  — множество всех переменных, входящих в термы из  $ran(\theta)$ .



Запись  $\theta|_{\Omega}$  обозначает подстановку, содержащую те и только те пары  $x_i/t_i$  из  $\theta$ , для которых  $x_i \in \Omega$ . Запись  $\theta_{-x}$  обозначает подстановку  $\theta|_{dom(\theta)\setminus\{x\}}$ .

Понятия *подформулы* и их *вхождений* определяются стандартным образом. Так, под *вхождением подформулы*  $\psi$  в формулу  $\xi$  будем понимать фиксированную связную часть формулы  $\xi$ , совпадающую с  $\psi$ . Вхождение подформулы является *положительным*, если оно расположено в области действия четного числа отрицаний и посылок импликаций. В противном случае вхождение является *отрицательным*. Например, формула  $P(x) \supset (P(y) \supset P(x))$  содержит одно (отрицательное) вхождение подформулы  $P(y)$  и два вхождения подформулы  $P(x)$ , первое из которых — отрицательное, а второе — положительное.

$\xi$ -*атом* — это вхождение атомарной подформулы в  $\xi$ .

$\xi$ -*секвенция* — это секвенция специального вида:

$$A_1 \cdot \sigma_1, \dots, A_n \cdot \sigma_n \vdash B_1 \cdot \delta_1, \dots, B_m \cdot \delta_m,$$

где  $A_i, i \in \{1, \dots, n\}$  — отрицательные вхождения подформул в  $\xi$ ;  $B_j, j \in \{1, \dots, m\}$  — положительные вхождения подформул в  $\xi$ ;  $\sigma_i, i \in \{1, \dots, n\}$  и  $\delta_j, j \in \{1, \dots, m\}$  — подстановки произвольных термов вместо переменных (термы могут содержать предметные константы и функциональные символы); выражения вида  $F \cdot \theta$  называются  $\xi$ -*формулами* и содержательно соответствуют формулам вида  $F(\theta|_{free(F)})$ .

Часть  $\xi$ -секвенции слева от символа выводимости « $\vdash$ » называется ее *антецедентом*, а правая часть — ее *сукцедентом*. Антецедент и сукцедент  $\xi$ -секвенции являются конечными *мультимножествами*  $\xi$ -формул, т. е. определяются однозначно с точностью до порядка следования  $\xi$ -формул и могут содержать повторяющиеся  $\xi$ -формулы.

В дальнейшем вместо термина « $\xi$ -секвенция» может использоваться термин «секвенция», если из контекста понятно, о секвенциях какого типа идет речь.

Запись  $norm(S)$  обозначает *нормальную форму*  $\xi$ -секвенции  $S$ , которая получается из  $S$  заменой каждой  $\xi$ -формулы  $(\psi \cdot \sigma)$   $\xi$ -формулой  $(\psi \cdot \sigma|_{free(\psi)})$ .

Пусть  $S$  и  $S'$  —  $\xi$ -секвенции,  $norm(S) = (\Gamma \vdash \Delta)$  и  $norm(S') = (\Gamma' \vdash \Delta')$ . Тогда  $S$  называется *подсеквенцией*  $S'$  (пишется  $S \subseteq S'$ ), если  $\Gamma \subseteq \Gamma'$  и  $\Delta \subseteq \Delta'$ .

$\xi$ -формула  $\psi \cdot \sigma$  является *правильной*, если  $dom(\sigma) = free(\psi)$  и  $vran(\sigma) \cap var(\xi) = \emptyset$ .

$\xi$ -секвенция  $S$  называется *правильной*, если все  $\xi$ -формулы в  $S$  являются правильными.

В таблице 1 представлены правила вывода и аксиомы исчисления  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$ . Во всех правилах, кроме  $(Rn)$  и  $(Nrm)$ , посылки являются правильными  $\xi$ -секвенциями и не имеют общих переменных друг с другом;  $A_1, A_2$  и  $A$  обозначают *вхождения* подформул в  $\xi$  (в том

числе в записях вида  $A_1 \wedge A_2$ ,  $\neg A$  и т. д.). В схеме аксиом  $(Ax)$  каждый из символов  $P_1$  и  $P_2$  обозначает  $\xi$ -атом;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — такие переименования, что  $free(P_1\rho_1) \cap free(P_2\rho_2) = \emptyset$ ;  $\tau$  — наиболее общий унификатор формул  $P_1\rho_1$  и  $P_2\rho_2$ . Подстановка  $\theta$  — наиболее общий унификатор подстановок  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В правиле  $(Rn)$   $S$  — это  $\xi$ -секвенция, а  $\rho$  — переименование. В правиле  $(Nrm)$   $S$  —  $\xi$ -секвенция. В правилах  $(L\exists)$  и  $(R\forall)$  должно выполняться ограничение на собственную переменную:  $x\sigma$  — это переменная, которая не входит свободно в заключение.

Таблица 1. Исчисление  $\mathbf{IM}_{inv}^\xi$

$P_1 \cdot \rho_1 \tau \vdash P_2 \cdot \rho_2 \tau \quad (Ax)$	
$\frac{\Gamma, A_1 \cdot \sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \cdot \sigma \vdash \Delta} \quad (L \wedge_1)$	$\frac{\Gamma, A_2 \cdot \sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \cdot \sigma \vdash \Delta} \quad (L \wedge_2)$
$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A_1 \cdot \sigma_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, A_2 \cdot \sigma_2}{\Gamma_1 \theta, \Gamma_2 \theta \vdash \Delta_1 \theta, \Delta_2 \theta, A_1 \wedge A_2 \cdot \sigma_1 \theta} \quad (R \wedge)$	$\frac{\Gamma_1, A_1 \cdot \sigma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, A_2 \cdot \sigma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1 \theta, \Gamma_2 \theta, A_1 \vee A_2 \cdot \sigma_1 \theta \vdash \Delta_1 \theta, \Delta_2 \theta} \quad (L \vee)$
$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \cdot \sigma}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \vee A_2 \cdot \sigma} \quad (R \vee_1)$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_2 \cdot \sigma}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \vee A_2 \cdot \sigma} \quad (R \vee_2)$
$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A_1 \cdot \sigma_1 \quad \Gamma_2, A_2 \cdot \sigma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1 \theta, \Gamma_2 \theta, A_1 \supset A_2 \cdot \sigma_1 \theta \vdash \Delta_1 \theta, \Delta_2 \theta} \quad (L \supset)$	$\frac{\Gamma, A_1 \cdot \sigma \vdash}{\Gamma \vdash A_1 \supset A_2 \cdot \sigma} \quad (R \supset_1)$
$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_2 \cdot \sigma}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \supset A_2 \cdot \sigma} \quad (R \supset_2)$	$\frac{\Gamma, A_1 \cdot \sigma_1 \vdash A_1 \supset A_2 \cdot \sigma_2}{\Gamma \theta \vdash A_1 \supset A_2 \cdot \sigma_2 \theta} \quad (R \supset_3)$
$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \cdot \sigma}{\Gamma, \neg A \cdot \sigma \vdash \Delta} \quad (L \neg)$	$\frac{\Gamma, A \cdot \sigma \vdash}{\Gamma \vdash \neg A \cdot \sigma} \quad (R \neg)$
$\frac{\Gamma, A \cdot \sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \cdot \sigma_{-x} \vdash \Delta} \quad (L \forall)$	$\frac{\Gamma \vdash A \cdot \sigma}{\Gamma \vdash \forall x A \cdot \sigma_{-x}} \quad (R \forall)$
$\frac{\Gamma, A \cdot \sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \cdot \sigma_{-x} \vdash \Delta} \quad (L \exists)$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \cdot \sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A \cdot \sigma_{-x}} \quad (R \exists)$
$\frac{\Gamma, A \cdot \sigma_1, A \cdot \sigma_2 \vdash \Delta}{\Gamma \theta, A \cdot \sigma_1 \theta \vdash \Delta \theta} \quad (LC)$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \cdot \sigma_1, A \cdot \sigma_2}{\Gamma \theta \vdash \Delta \theta, A \cdot \sigma_1 \theta} \quad (RC)$
$\frac{S}{S\rho} \quad (Rn)$	$\frac{S}{norm(S)} \quad (Nrm)$

Правила  $(LC)$  и  $(RC)$  называются **правилами сокращения**. Правила  $(Rn)$  и  $(Nrm)$  называются **правилом переименования** и **правилом нормализации** соответственно.

Следующая теорема утверждает равнообъемность исчисления  $\mathbf{IM}_{inv}^\xi$  исчислению ГНРС А. Г. Драгалина. Равнообъемность исчислений ГНРС и НРС (исчисление предикатов Гейтинга) была установлена А. Г. Драгалиным.

**Теорема 1.** Секвенция  $\vdash \xi \cdot \varepsilon$  выводима в исчислении  $\mathbf{IM}_{inv}^\xi$  тогда и только тогда, когда в исчислении ГНРС выводима секвенция  $\vdash \xi'$ , где  $\xi'$  получается из  $\xi$  заменой каждого вхождения подформулы вида  $\neg A$  формулой  $A \supset \perp$ .

Логическое исчисление  $\mathbf{IM}_{\text{inv}}^{\xi}$  является *многосукцедентным* (т. е. правая часть выводимых секвенций может содержать более одной формулы), в отличие от существующих интуиционистских исчислений обратного метода. Поэтому исчисление  $\mathbf{IM}_{\text{inv}}^{\xi}$  ближе к классическим исчислениям и позволяет выводить секвенции более общего вида. В частности, это дает возможность обобщить некоторые стратегии, применимые к односукцедентным исчислениям обратного метода, на более широкий класс интуиционистских исчислений.

Во второй главе также рассматриваются модификации исчисления  $\mathbf{IM}_{\text{inv}}^{\xi}$  для интуиционистской логики первого порядка и интуиционистской логики высказываний. Например, модификация, в которой вместо отрицания используется логическая константа  $\perp$ .

Третья глава работы посвящена рассмотрению стратегий поиска вывода для исчисления  $\mathbf{IM}_{\text{inv}}^{\xi}$ , позволяющих уменьшить размер пространства поиска вывода.

*Стратегия поглощения* определяется стандартным образом (но при этом используется специфическое отношение  $\dot{\subseteq}$  на множестве  $\xi$ -секвенций).  $\xi$ -секвенция  $S'$  поглощает  $\xi$ -секвенцию  $S$  (пишется  $S < S'$ ), если  $S'\delta \dot{\subseteq} S$  для некоторой подстановки  $\delta$ . Если в процессе поиска вывода получены такие секвенции  $S$  и  $S'$ , что  $S < S'$ , то  $S$  разрешается удалить.

Пусть *список*  $\mathcal{R}^{\xi}$  состоит из следующих правил вывода:  $(L \wedge_1)$ ,  $(L \wedge_2)$ ,  $(R \vee_1)$ ,  $(R \vee_2)$ ,  $(L \neg)$ ,  $(R \supset_2)$ ,  $(L \vee)$ ,  $(R \exists)$  и  $(L \exists)$ , а также  $(R \forall)$  в случае, если формула  $\xi$  не содержит отрицательных вхождений символа  $\forall$ .

*Стратегия упрощения секвенций* для исчисления  $\mathbf{IM}_{\text{inv}}^{\xi}$  позволяет применять к секвенциям правила из списка  $\mathcal{R}^{\xi}$ , как только эти правила становятся применимы (за исключением нескольких частных случаев, указанных в диссертации). При этом исходные секвенции удаляются.

Стратегия упрощения является адаптированным вариантом стратегий А. Воронкова для классической логики и Т. Таммета для односукцедентного интуиционистского исчисления («reduction strategy»), при этом используется специфический список «упрощающих» правил.

*Стратегия удаления секвенций с недопустимыми подстановками (УСНП)* является ограниченным вариантом тактики удаления наборов с недопустимыми системами зависимостей, в общем виде сформулированной С. Ю. Масловым. В диссертационной работе адаптация тактики заключается в выделении частных случаев недопустимых подстановок в секвенциях, проверку которых можно выполнить достаточно быстро.

Новая *стратегия удаления секвенций с недопустимыми формулами (УСНФ)* позволяет обнаруживать секвенции, которые не могут участвовать в выводе формулы  $\xi$  из-за существующих для правил  $(R \supset_1)$ ,  $(R \supset_2)$ ,  $(R \supset_3)$ ,  $(R \neg)$  и  $(R \forall)$  ограничений на число формул

в сукцеденте посылки. В ряде случаев такие секвенции могут быть выявлены на ранних стадиях поиска вывода (в диссертации приведены формальные условия недопустимости секвенций).

**Стратегия тривиального сокращения** позволяет сокращать формулы в секвенции  $S$  (без порождения новой секвенции), если полученная в результате такого сокращения секвенция поглощает  $S$ . Эту стратегию можно считать аналогом тактики перехода к тривиальным спецификациям, предложенной С. Ю. Масловым для случая классической логики.

В работе отмечается, что все вышеприведенные стратегии также применимы к исчислению  $\mathbf{I}_{inv}^{\xi}$  А. Дегтярева и А. Воронкова.

**Сингулярная стратегия:** поиск вывода формулы  $\xi$  выполняется в исчислении  $\mathbf{I}_{inv}^{\xi}$  А. Дегтярева и А. Воронкова, полученный вывод преобразуется к выводу в исчислении  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$ .

Сингулярная стратегия ранее не была представлена в литературе по обратному методу (в существующих работах используются односукцедентные исчисления).

Следующая теорема верна при некоторых естественных ограничениях на применяемый алгоритм поиска вывода.

**Теорема 2. Совместимость стратегий.** *Любая комбинация перечисленных выше стратегий является полной для исчисления  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$ .*

Третья глава также содержит примеры доказательства формул в исчислении  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$ , демонстрирующие применение стратегий поиска вывода.

Четвертая глава содержит описание алгоритма поиска вывода в исчислении  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$ , позволяющего комбинировать стратегии поиска вывода, а также описание программной реализации этого алгоритма. Алгоритм применим не только к исчислению  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$ , но и к другим секвенциальным исчислениям обратного метода.

Предложенный алгоритм представляет собой вариант «given clause algorithm». Основная идея заключается в разделении всех участвующих в доказательстве секвенций на два списка: активные и использованные секвенции. При этом алгоритм работает так, что список использованных секвенций, как правило, имеет относительно небольшой размер, а список активных секвенций может разрастаться достаточно сильно. В проверках поглощения участвуют только использованные секвенции, что позволяет сократить накладные расходы на такие проверки. Используется два частных случая стратегии поглощения: стратегии *прямого* и *обратного поглощения*. При прямом поглощении удаляется новая секвенция, если она поглощается одной из использованных секвенций, а при обратном поглощении удаляется использованная секвенция, которая поглощается новой секвенцией.

На основе предложенного алгоритма разработана программа АЛВ WhaleProver, которая может выполнять поиск вывода в исчислении  $\mathbf{IM}_{inv}^\xi$ , в оптимизированном варианте исчисления  $\mathbf{I}_{inv}^\xi$ , а также в их модификациях. Программа разработана на языке С++. Выбор языка обусловлен следующими факторами: гибкость и универсальность языка, возможность управления деталями реализации алгоритма, объектно-ориентированный подход.

В диссертации приведены результаты ряда экспериментов с программой WhaleProver на задачах из библиотеки ILTP версии 1.1.2. Все эксперименты проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core i5 3.40 ГГц, ОС Windows 7 и 16 Гб ОЗУ с лимитом времени 100 секунд на каждую задачу.

В частности, на выборке из 362 задач различной сложности был проведен ряд экспериментов по сравнению стратегий поиска вывода. Основные результаты для исчисления  $\mathbf{IM}_{inv}^\xi$  представлены в таблице 2. Первый столбец таблицы содержит номера экспериментов, в следующих шести столбцах знаком «+» отмечены включенные в экспериментах стратегии, в последующих столбцах указаны результаты экспериментов. В таблице стратегиям назначены сокращенные наименования: СИ — сингулярная стратегия, ТС — стратегия тривиального сокращения, УП — стратегия упрощения, УСНП и УСНФ — как раньше, ОП — обратное поглощение. В каждом эксперименте использовалось прямое поглощение, чтобы при любой комбинации других стратегий программа могла решить все задачи.

Таблица 2. Основные результаты сравнения стратегий поиска вывода для  $\mathbf{IM}_{inv}^\xi$

№ эксп.	СИ	ТС	УП	УСНП	УСНФ	ОП	Средняя высота вывода	Средняя длина вывода	Средний размер пространства поиска вывода	Суммарное время, сек
1							19,9	85,8	1242,9	170,4
2	+						19,4	85,8	1248,0	136,5
3	+	+					17,3	37,0	1042,5	106,5
4	+		+				6,9	38,4	189,6	5,6
5	+			+			19,5	86,0	998,6	73,9
6	+				+		19,5	85,8	1004,8	93,5
7		+	+	+	+		5,2	13,3	106,2	2,7
8	+	+	+	+	+		5,2	14,0	104,4	2,3
9		+	+	+	+	+	5,2	13,3	105,2	3,1
10	+	+	+	+	+	+	5,3	14,0	103,2	2,8

Стратегия упрощения существенно опережает другие стратегии по времени и размеру пространства поиска вывода. Стратегия УСНФ по тем же показателям эффективнее тривиального сокращения. Сингулярная стратегия позволяет уменьшить время решения задач, но эффект от ее использования снижается при включении всех остальных стратегий.

Максимальная эффективность программы достигается при включении всех стратегий (эксперимент 10) или всех, кроме обратного поглощения (эксперимент 8). Во втором случае время решения задач меньше (проверка поглощения является достаточно затратной операцией).

Оптимальная конфигурация из эксперимента 8 использовалась при экспериментальном сравнении программы WhaleProver с существующими программами АЛВ для интуиционистской логики на задачах из ILTP. Результаты программы WhaleProver получены в соответствии с руководством по использованию библиотеки ILTP. Результаты других программ взяты с сайта ILTP и из публикаций авторов. На рисунке 1 для всех программ представлена зависимость числа решенных задач от лимита времени на каждую задачу.

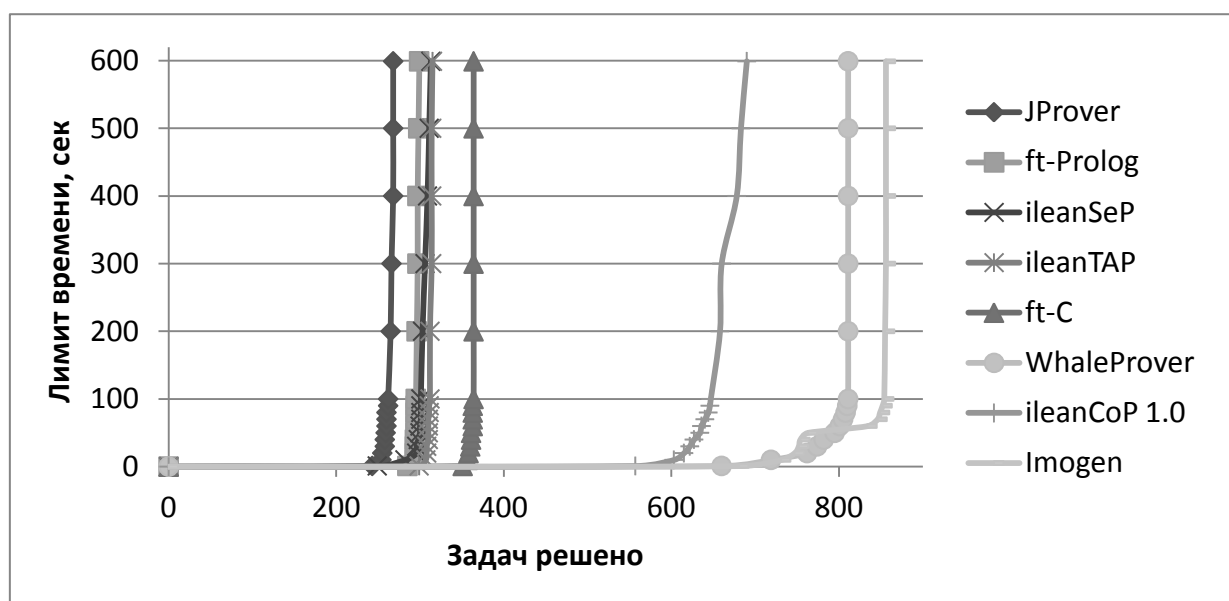


Рисунок 1. Количество решенных задач при увеличении лимита времени

Результаты программ получены на разных вычислительных машинах. Несмотря на это, сравнение является корректным в соответствии с методикой, рекомендуемой признанными экспертами в области АЛВ. А именно, начиная с некоторой точки, прирост числа решенных задач практически прекращается, поэтому результаты программ существенно не изменятся при линейном увеличении частоты процессора или объема ОЗУ. Дополнительно в диссертации приводятся результаты программ, для которых нет данных о времени решения каждой задачи.

Всего программа WhaleProver решила 811 задач из ILTP (доказала 621 и опровергла 190 утверждений). Из них для 650 задач известен их статус в интуиционистской логике, при этом результат программы соответствует этому статусу. В число этих задач входят 88 задач, которые не были решены ни одной из шести программ, официальные результаты которых представлены на сайте ILTP: JProver, ft-C, ft-Prolog, ileanSeP, ileanTAP, ileanCoP (1.0). По сравнению со всеми семью программами, включая Imogen, программа WhaleProver решила 16 новых задач с

известным статусом. Кроме того, программа позволяет решить ряд задач значительно быстрее других программ. Подробные результаты сравнения приведены в тексте диссертации.

В программе предусмотрен интерактивный режим, позволяющий решить некоторые задачи, которые программа WhaleProver и другие программы не могут решить в автоматическом режиме. В диссертации рассматривается пример решения задачи из области верификации ПО.

В заключении сформулированы основные выводы, итоги выполненного исследования, рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.

В приложения вынесены доказательства промежуточных утверждений, результаты программы на задачах из ILTP и сведения о задачах, использованных при сравнении стратегий.

## Заключение

**Итоги** диссертационной работы таковы:

1. Выполнено исследование современного состояния предметной области.
2. Построено новое интуиционистское исчисление обратного метода  $\mathbf{IM}_{inv}^{\xi}$  для вывода формул логики первого порядка, доказана его равнообъемность исчислению GHPС А. Г. Драгалина. Исчисление дополнено стратегиями поиска вывода, включая новые стратегии. Доказана полнота любой комбинации предложенных стратегий.
3. Предложен алгоритм поиска вывода, применимый к разным исчислениям обратного метода. На его основе разработана программа АЛВ, за счет комбинирования стратегий позволяющая решить новые задачи, которые не могут решить существующие программы. В программе предусмотрен интерактивный режим, дающий возможность решать больше сложных задач, в том числе из области верификации ПО.
4. Проведено тестирование программы на задачах из библиотеки ILTP, получены результаты экспериментального сравнения стратегий по ряду критериев.

Сформулированы следующие **рекомендации** по применению полученных результатов:

1. Разработанную программу рекомендуется применять для решения математических и технических задач, формализуемых на языке логики первого порядка.
2. Результаты экспериментального сравнения стратегий желательно учитывать при разработке программ АЛВ на основе обратного метода.

Определены **перспективы** дальнейшей разработки темы:

1. Использование разработанной программы в качестве экспериментальной платформы для испытания исчислений обратного метода и стратегий поиска вывода.
2. Использование программы в рамках учебного курса «Математическая логика».
3. Интеграция разработанной программы в интерактивные программы АЛВ (Coq, Nuprl).

## **Список опубликованных работ по теме диссертации**

**В изданиях из перечня российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук**

1. Павлов, В. Эффективная программная реализация обратного метода Маслова для интуиционистской логики // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2017. — № 1. — С. 49–62.
2. Павлов, В. Экспериментальная программа для доказательства теорем интуиционистской логики обратным методом Маслова / В. Павлов, В. Пак // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2015. — № 6. — С. 70–80.

**В изданиях, индексируемых в реферативных базах Scopus и Web Of Science**

3. Pavlov, V. Exploring Automated Reasoning in First-Order Logic: Tools, Techniques and Application Areas / V. Pavlov, A. Schukin, T. Cherkasova // 4th International Conference Knowledge Engineering and the Semantic Web (KESW 2013). Communications in Computer and Information Science (CCIS). — Springer Berlin Heidelberg, 2013. — Vol. 394. — P. 102–116.
4. Pavlov, V. The Inverse Method Application for Non-Classical Logics / V. Pavlov, V. Pak // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2015. — 18 (2). — P. 181–190.

**Свидетельства о регистрации программных продуктов**

5. Свидетельство № 2016615547. Программа для автоматического доказательства теорем в интуиционистских логических исчислениях обратным методом Маслова «WhaleProver» (WhaleProver) / автор и правообладатель Павлов В. А. — № 2016612689 ; заявл. 28.03.2016 ; зарегистр. 26.05.2016.

**В других изданиях**

6. Павлов, В. А. Алгоритм и программное средство автоматического логического вывода формул интуиционистской логики // Ломоносов-2016: Материалы XXIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика». — М. : Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2016. — С. 44–47.
7. Pavlov, V. The Inverse Method and First-Order Logic Theorem Proving / V. Pavlov, V. Pak // Nonlinear Dynamics and Applications. — 2014. — Vol. 20. — P. 127–135.



8. Павлов, В. А. Сравнение эффективности методов автоматического доказательства теорем / В. А. Павлов, В. Г. Пак // Материалы XXXIX международной научно-практической конференции «Неделя науки СПбГПУ». — СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2011. — С. 62–65.
9. Павлов, В. А. Сравнительное исследование методов автоматического логического вывода для логики предикатов / В. А. Павлов, В. Г. Пак // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Часть XVIII. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. — С. 10–12.
10. Павлов, В. А. Сравнение эффективности методов автоматического доказательства теорем / В. А. Павлов, В. Г. Пак // XXXIX Неделя науки СПбГПУ. Материалы международной научно-практической конференции. Часть XVIII. Факультет управления и информационных технологий. — СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2010. — С. 13–15.

---

Подписано в печать 10.32.2017. Формат 60x84/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100. Заказ 15; 65b.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,  
в Издательско-полиграфическом центре  
Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14