

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАШТАНОВА Станислава Викторовна

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК
НАНОРАЗМЕРНОЙ ТОЛЩИНЫ

Специальность: 01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2017

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:

академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор
МОРОЗОВ Никита Федорович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор МИХАСЕВ Геннадий Иванович
(Белорусский государственный университет,
заведующий кафедрой био- и наномеханики)

кандидат физико-математических наук,
доцент ЛОБОДА Ольга Сергеевна
(Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, доцент
кафедры теоретическая механика)

Ведущая организация:

Петербургский государственный
университет путей сообщения
императора Александра I (ПГУПС)

Защита состоится «__» _____ 2017 г. в __:__ часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д.28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте: <https://dissser.spbu.ru/dissser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dislist/details/14/1273.html>.

Автореферат разослан «__» _____ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

доктор физико-математических наук

2



Кустова Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы обусловлена современным развитием наномеханики и необходимостью качественного описания и аналитического предсказания результатов, получаемых экспериментально.

Сложность развития нанотехнологий, играющих большую роль в области медицины, биомеханики, электрофизики и других областях, в том, что нет общих и единых принципов построения аналитических моделей, а полученные экспериментальные данные требуют серьезного анализа, т.к. любое вмешательство приборов, проводящих измерения, вносит свой вклад в получаемые результаты. К некоторым задачам можно применить методы классической континуальной теории упругости. Этому вопросу и посвящена диссертационная работа. Также для оценки аналитических решений использовался пакет прикладных программ ANSYS, основанный на методе конечных элементов.

В рамках теории упругости разработаны модели механики деформируемого твердого тела для определения модуля упругости асбестовых нанотрубок по данным экспериментов, построены модели, оценивающие влияние поверхностных эффектов на критическую нагрузку тонкой пластины с круговым отверстием, растягиваемую в одном направлении, а также решена задача о локальной устойчивости пластины с круговой вставкой из другого материала, находящаяся при одноосном растяжении.

Целью диссертационной работы является анализ применения методов классической континуальной механики к объектам наноразмерной толщины, получение аналитических решений, сравнение с численными методами и экспериментальными данными в случаях, где эксперименты проводились.

Основные методы исследований. Для построения моделей пластин и оболочек использовалась классическая механика деформируемого твердого тела. В пакете Maple созданы программы для построения численных

решений задач, при помощи конечно-элементного анализа в пакете ANSYS также получен ряд результатов.

Результаты, выносимые на защиту:

- Построена теоретическая модель для нахождения модуля Юнга асбестовых нанотрубок, полученного экспериментальным путем, а именно рассмотрена балка по теории Тимошенко-Рейсснера.
- Построена модель, использующая неклассические теории многослойных оболочек (теории Палия-Спиро и Родионовой-Титаева-Черныха), проведен сравнительный анализ с данными, полученными при решении в пакете ANSYS.
- Решена задача об устойчивости плоской формы равновесия при одноосном растяжении бесконечной тонкой пластины с круговым отверстием, с учетом поверхностных эффектов на границе отверстия, и с учетом поверхностных эффектов, усредненных вдоль всей поверхности пластины. Проведен сравнительный анализ.
- Решена задача о локальной устойчивости при одноосном растяжении бесконечной пластины с круговой вставкой, проведен анализ влияния модулей упругости вставки на величину критической нагрузки. Проведено сравнение с результатами решения задачи в пакете ANSYS.

Достоверность полученных результатов основывается на сравнении с экспериментальными данными, представленными в научной литературе, и с результатами, полученными при конечно-элементном моделировании в пакете ANSYS, а также корректной постановкой задач и использованием строгих математических методов.

Научная и практическая ценность. Теоретический анализ и качественные оценки помогают экспериментаторам, работающим с АСМ (атомным силовым микроскопом), проверить достоверность своих измерений. Решение задачи об устойчивости растягиваемой бесконечной пластины наноразмерной толщины с отверстием показало, что учет влияния

поверхностных эффектов вдоль всей поверхности играет несколько большую роль, чем учет эффектов на границе отверстия. Решение задачи об устойчивости пластины со вставкой позволяет оценить влияние модуля упругости вставки на величину критической нагрузки.

Апробация работы. Постановка задачи, методы решений и результаты обсуждались на следующих конференциях и семинарах: II Всероссийская конференция, ММПСН-2009; XVIII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках», Пермь 2009 г.; семинар «Компьютерные методы в механике сплошной среды», ПГУПС, Санкт-Петербург, 10 ноября 2009; Международная конференция по механике «VI Поляховские чтения», Санкт-Петербург 2012 г.; 8th European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria, 2012; 19th European Conference on Fracture, Kazan 2012; 28th Nordic Seminar on Computational Mechanics, Tallinn, Estonia 2015; на семинарах кафедры Теории упругости СПбГУ; семинар «Компьютерные методы в механике сплошной среды», ПГУПС, Санкт-Петербург, 20 декабря 2016.

Список публикаций. По теме диссертации опубликованы 7 статей и 9 тезисов в сборниках тезисов конференций, в том числе четыре работы [1]-[4] в журналах, рекомендуемых ВАК, и изданиях, входящих в базу данных Scopus. Большинство работ выполнены с соавторами, где Морозову Н.Ф. и Бауэр С.М. принадлежит постановка задач, консультации, а также анализ результатов, Ермакову А.М. и Семенову Б.Н. построение моделей методом конечных элементов в пакете ANSYS, Анкудинову А.В. и Няпшаеву И.А. постановка эксперимента, описанного в I главе, Грекову М.А. решение задачи о влиянии поверхностных эффектов на границе отверстия на устойчивость растягиваемой пластины. Обработка экспериментов, построение моделей, аналитические выкладки, построение графиков, реализация программ в пакете Maple, сравнение полученных результатов сделано Каштановой С.В.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, приложения и списка литературы, насчитывающего 60 наименований. Число иллюстраций равно 31. Общий объем равен 92 стр.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, кратко описаны проблемы нанотехнологий и важность развития этой области.

Первая глава посвящена построению и усовершенствованию теоретических моделей для оценки модуля Юнга асбестовых нанотрубок, полученного на основе экспериментальных данных. Работа проводилась в сотрудничестве с учеными Физико-Технического института имени Йоффе под руководством д.ф.-м.н. Анкундинова А.В. Все экспериментальные данные, полное описание экспериментов и способов их проведения описаны в кандидатской диссертации Щедрина Б.О. и докторской диссертации Анкундинова А.В.

Исследовались механические свойства отдельных нанообъектов из природного хризотилового асбеста, формирующегося в виде нанотрубок с внешним диаметром около 30 нм и с внутренним около 5 нм. Эксперимент проводился следующим образом: на пористую лавсановую мембрану «накидывались» нанотрубки, образуя таким образом консоль или мостик. При помощи СЗМ измерений (сканирующая зондовая микроскопия) измерялись жесткости нановолокн, как отношение приложенной в точке силы к прогибу. В ходе выполнения экспериментов оказалось, что механические характеристики, такие как модуль Юнга, асбестовых нанотрубок имеют очень сильный разброс значений (даже для трубок одинакового диаметра). Поэтому для уточнения результатов был использован метод «перетаскивания» нанотрубки по мембране, для проведения различных по геометрической конфигурации экспериментов на одной и той же нанотрубке.

В эксперименте получены также жесткости нанотрубки при трехточечном (мостик) и консольном изгибе в присутствии некоторых

наполнителей внутри нанотрубки, например воды, ртути, теллура и пр. Отмечалось, что трубка, наполненная водой, мягче, чем сухая трубка. Это объясняется тем, что вода является гидрофильным наполнителем. Вода хорошо смачивает асбест и сжимает внутренний диаметр трубки. Ртуть, в свою очередь, не смачивает его и распирает трубку, за счет чего трубка становится жестче. Целью теоретической работы является попытка описать эти эффекты.

Классическая теория Бернулли-Кирхгофа-Лява (БКЛ) хорошо работает для балок сплошного поперечного сечения из однородного материала, но может давать существенные погрешности для многослойных балок. В рассматриваемой нанотрубке в радиальном направлении наблюдается сильная анизотропия механических свойств. Поэтому для аналитической оценки прогибов нанотрубок как балок использовалась теория Тимошенко – Рейсснера (ТР). По этой теории прогиб трансверсально-изотропной балки

$$\text{имеет вид } w(x_0) = \frac{F x_0^2 (l - x_0)^2}{3lEJ} \left(1 + \frac{5\mu^2}{2g}\right), \quad g = \frac{G'}{E}, \quad \mu^2 \ll g \ll 1.$$

Для балки $\mu^2 = \frac{J}{S \cdot a^2} = \frac{i^2}{a^2}$, где a – расстояние от точки опоры до точки прижима, J – момент инерции поперечного сечения стержня, а S – его площадь, $i = \sqrt{\frac{J}{S}}$ – радиус инерции поперечного сечения, $g = G'/E$, где E – модуль Юнга в тангенциальном направлении, G' – модуль упругости при поперечном сдвиге. Предполагается, что выполняется соотношение $\mu^2 \ll g \ll 1$.

Для тонких тел из изотропного материала теории типа БКЛ являются первым асимптотическим приближением трехмерной теории при $\mu \rightarrow 0$, где μ – безразмерный малый параметр. В изотропном случае теория Тимошенко – Рейсснера (ТР), учитывающая сдвиг, несущественно уточняет классическую теорию. Но, как показано в работе Товстика П.Е. (Вестник СПбГУ, 2007), для тел из трансверсально-изотропного материала «при умеренно малой

поперечной жесткости на сдвиг» теория ТР существенно уточняет теорию БКЛ и дает следующее асимптотическое приближение трехмерной теории.

В качестве примера ниже приведены результаты моделирования изгиба нанотрубки из хризотилового асбеста, заполненного теллуром. В эксперименте трубка опиралась двумя концами на лавсановую мембрану, образуя «мостик» над порой в мембране. Нанотрубка нагружалась поперечными усилиями различной величины в различных точках и измерялся прогиб. Значения модуля Юнга брались из расчета «сухой» нанотрубки из этой партии (по теории БКЛ), т.к. известное значение для «макро» образцов материала нельзя считать достоверными в нашем случае. Диаметр нанотрубки -32 ± 2 нм, длина провисающей части около 490 нм, модуль Юнга $E = 7.72 \cdot 10^{10}$ Н/М², а рассчитанное значение модуля сдвига $G' = 2.3 \cdot 10^7$ Н/М². На графике (рис. 1) представлены результаты сравнения экспериментальных данных, данных полученных по теории БКЛ и данных, полученных по теории ТР.

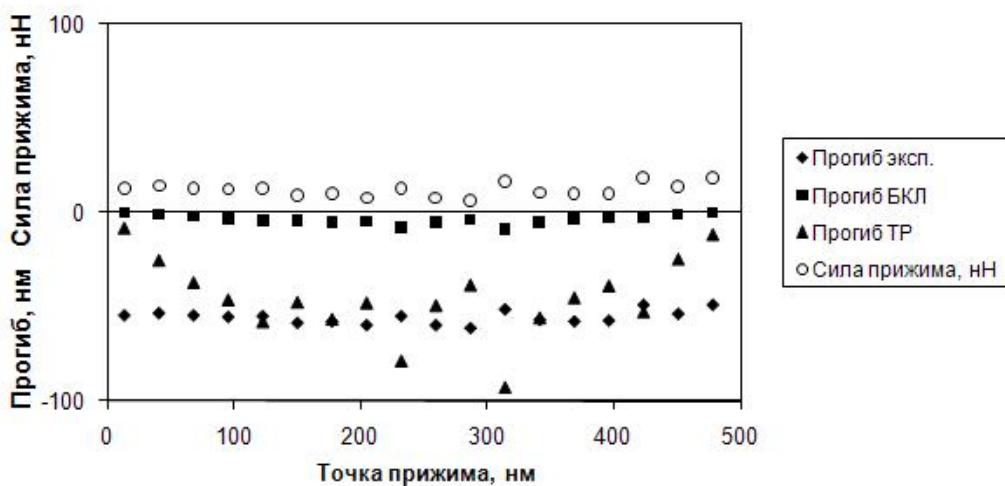


Рис. 1. Сравнение прогибов, полученных из эксперимента и в результате расчетов по теориям БКЛ и ТР.

Каждый слой трубки не меняет свои механические свойства, но модуль сдвига в поперечном сечении G' может существенно меняться в зависимости от наполнителя. Обработаны данные ряда экспериментов, на основании которых сделан вывод о том, что теория ТР в среднем в 5 раз поправляет

теорию БКЛ. Далее рассмотрены неклассические теории многослойных оболочек, учитывающие модули сдвига.

Представлены результаты, полученные с использованием теорий оболочек Родионовой-Титаева-Черныха (РТЧ) и Паляя-Спиро (ПС). Теория РТЧ – это линейная теория однородных анизотропных оболочек постоянной толщины с учетом малой податливости поперечным сдвигам и деформированию в направлении нормали к срединной поверхности, а также поперечных нормальных напряжений и нелинейного распределения компонент вектора перемещения по толщине оболочки. Теория ПС – это теория оболочек средней толщины, в которой приняты следующие гипотезы:

1. Прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными.
2. Косинус угла наклона таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига.

В таблице 1 проводится сравнение результатов, полученных по теории ТР, РТЧ, ПС с результатами, получающимися при тех же параметрах МКЭ в пакете ANSYS. Строки “TR1” и “Ansys1” соответствуют значениям прогиба трубки с отверстием; строки “TR2” и “Ansys2” соответствуют прогибу сплошной трубки. Параметры нанотрубки следующие: внутренний радиус трубки $R_{in}=2.5$ нм, внешний $R_{out}=16$ нм, длина трубки $L=500$ нм, значения модуля упругости оболочки $E_{1,2,3}=1.75*10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_{ij} = 0.3$ и модуль сдвига $G_{ij} = 2.3 * 10^7$ Па. Сила внешнего воздействия $F_v = 10$ нН, площадь области приложения нагрузки $[40*40]$ нм², L_v – координата приложения силы на внешней поверхности оболочки.

Все теории дают близкие результаты. Однако результаты, полученные с использованием неклассических теорий оболочек, ближе к результатам трехмерной теории, что может быть объяснено более точным учетом

цилиндрической формы трубки, цилиндрической анизотропией, а так же более точным учетом области приложения внешней нагрузки.

L_v	250	220	200	170	150	120	100	70	40
TR1	60,61	59,7	58,07	54,14	50,52	43,65	38,12	28,47	17,24
TR2	59,2	58,31	56,72	52,87	49,34	42,62	37,22	27,79	16,82
RTCH	57,79	56,86	55,21	51,22	47,56	40,62	35,07	25,45	14,4
PS	57,54	56,62	54,97	51	47,35	40,45	34,29	25,34	14,34
Ansys1	54,11	53,26	51,7	48,3	45,1	39,02	34,07	25,37	15,37
Ansys2	52,39	52,38	50,12	46,77	43,71	37,81	33,02	24,6	14,91

Таблица 1. Сравнение величин прогибов многослойной нанотрубки

Во второй главе рассматривается влияние поверхностных эффектов (на границе отверстия и вдоль всей пластины) на устойчивость бесконечной растянутой пластины с круговым отверстием и проводится сравнение с классическим решением.

Напряжения, учитывающие поверхностные эффекты на границе отверстия, предложены Грековым М.А. и Морозовым Н.Ф (Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 2011)

Для определения критического напряжения использовался энергетический метод С.П. Тимошенко:

$$\Delta V = U + \Lambda \mathcal{W}.$$

Здесь U – потенциальная энергия изгиба пластины, а \mathcal{W} – работа усилий в срединной плоскости пластинки, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных потерей плоской формы деформирования:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)\mathcal{L}(w, w)] r dr d\varphi,$$

$$\mathcal{W} = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left[\sigma_{rr} r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] dr d\varphi,$$

где w – прогиб пластины после потери устойчивости, ν – коэффициент

Пуассона, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины,

$$\mathcal{L}(w, w) = 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

Прогиб пластины w определялся в виде двойного ряда

$$w(\rho, \vartheta) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} \frac{\cos l\vartheta}{\rho^k},$$

удовлетворяющего условию затухания прогиба на бесконечности. Для функционала ΔV условия свободных кромок отверстия являются естественными.

Из принципа возможных перемещений следует, что в состоянии равновесия механической системы потенциальная энергия деформации достигает минимума. В этом состоянии обобщенные силы, т.е. частные производные приращения потенциальной энергии по обобщенным координатам, равны нулю:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial A_{ml}} = \frac{\partial}{\partial A_{ml}} (U + \Lambda W) = 0,$$

Искомая первая критическая нагрузка P^* , соответствующая выходу пластины из плоской формы равновесия, равна минимальному положительному значению собственного числа Λ .

Далее помимо поверхностных эффектов на границе отверстия учитывался дополнительный вклад поверхностных напряжений, учет которых меняет изгибную жесткость пластины, как это показано в статье Еремеева В.А., Альтенбаха Х., Морозова Н.Ф. (Известия РАН, 2010):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu_s h^2 + \frac{\lambda_s h^2}{2}.$$

Здесь λ_s, μ_s - модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ, μ для объемной изотропной упругости. При помощи подстановки выражения прогиба в соотношения для U и W , и реализации метода Ритца в программе Maple, рассчитаны критические нагрузки для классического случая, с учетом поверхностных эффектов на границе круга и с учетом случая учета поверхностных напряжений вдоль поверхности пластины.

Расчеты выполнены для пластин из алюминия, основные константы которого $\lambda = 58.17 \text{ ГПа}, \mu = 26.13 \text{ Гпа}$. Данные для поверхности взяты из статьи Miller R.E., Shenoy V.B. (Nanotechnology, 2000)

$$\lambda_s = 6.8511 \frac{H}{m}, \quad \mu_s = -0.376 \frac{H}{m}, \quad \gamma_s^0 = 0,9108 \frac{H}{m} \text{ для Al [111].}$$

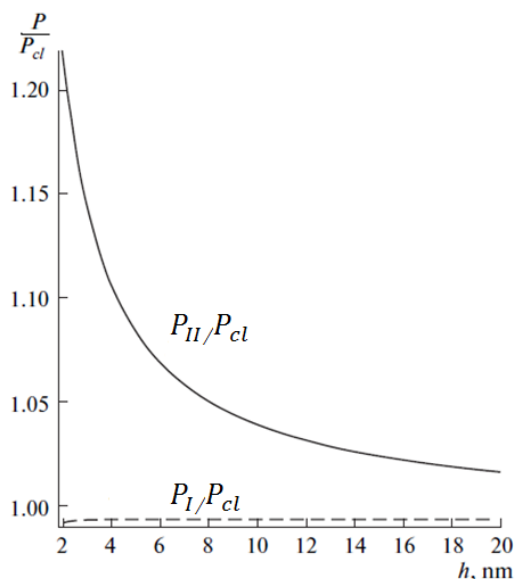


Рис.2. Пунктирная линия – отношение критической нагрузки, учитывающей поверхностные эффекты на границе круга к классической нагрузке, сплошная линия – отношение критической нагрузки, учитывающей вдобавок поверхностные напряжения вдоль всей пластины к классической нагрузке.

Из рис. 2 видно, что учет поверхностных эффектов на лицевых сторонах пластины увеличивает критическую нагрузку при выбранных упругих и поверхностных модулях, и учет изменения изгибной жесткости пластины играет большую роль, чем учет поверхностных эффектов на границе круга. График (рис. 2) представлен для случая $R=20$ нм и h от 2 нм до 20 нм. При увеличении толщины пластины поверхностные эффекты становятся, естественно, пренебрежимо малы.

В третьей главе изучается влияние модулей упругости круговой вставки на устойчивость плоской формы равновесия бесконечной тонкой пластины при одноосном растяжении σ .

Решение задачи о деформации в декартовой системе координат представлено в работе Deryugin Ye.Ye., Lasko G.V. (Engineering, 2012), где поле напряжений внутри вставки введено как $\sigma_y = k_y \sigma$, $\sigma_x = k_x \sigma$ и $\sigma_{xy} = 0$.

Ниже представлены графики для напряжений σ_x/σ в зависимости от отношений модуля Юнга вставки к модулю Юнгу пластины.

Графики для напряжений σ_x/σ от более «мягкой» вставки к более «жесткой» при $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$.

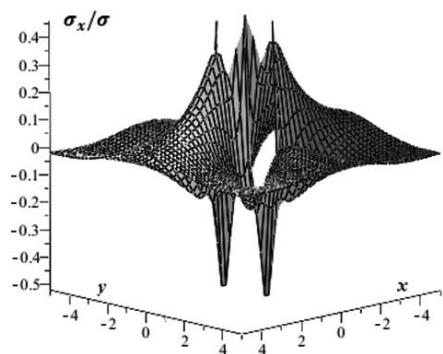


Рис. 3(а). Отсутствие вставки ($E_2 = 0$)
 $\sigma_x^{max}/\sigma = 0.56, \quad \sigma_x^{min}/\sigma = -1$

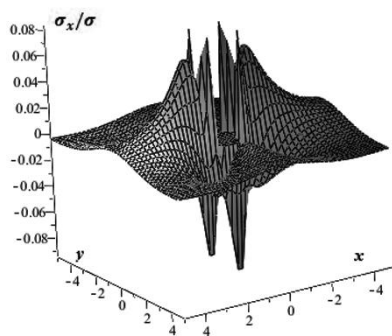


Рис. 3(б). $E_2 = \frac{3}{5}E_1$
 $\sigma_x^{max}/\sigma = 0.1, \quad \sigma_x^{min}/\sigma = -0.18$

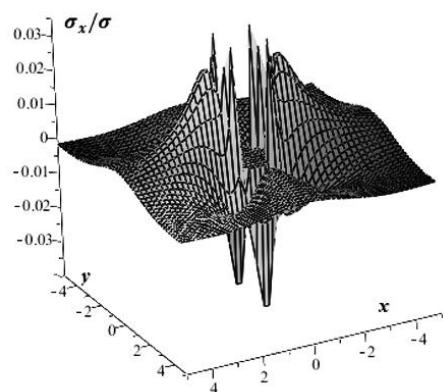


Рис. 3(с). $E_2 = \frac{4}{5}E_1$
 $\sigma_x^{max}/\sigma = 0.04, \quad \sigma_x^{min}/\sigma = -0.07$

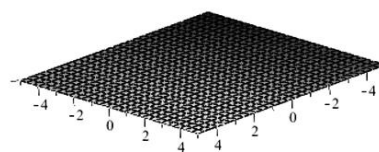


Рис. 3(д). $E_2 = E_1$
 $\sigma_x/\sigma = 0$

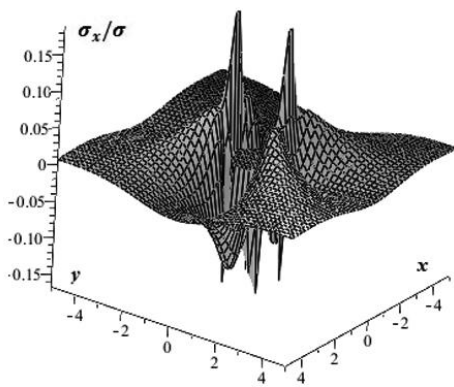


Рис. 3(е). $E_2 = 5E_1$
 $\sigma_x^{max}/\sigma = 0.36, \quad \sigma_x^{min}/\sigma = -0.20$

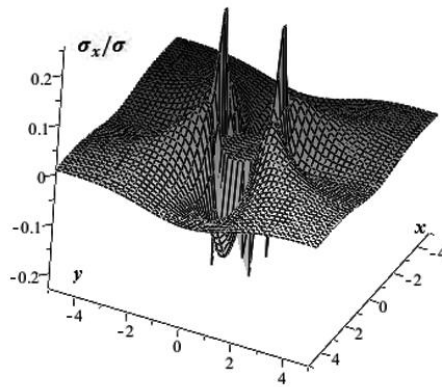


Рис. 3(ф). Случай абсолютно «жесткой» вставки ($E_2 \rightarrow \infty$)
 $\sigma_x^{max}/\sigma = 0.5, \quad \sigma_x^{min}/\sigma = -0.28$

В случае, если модули упругости пластины и вставки не равны, то напряжения σ_x / σ всегда в некоторой области имеют отрицательные значения, а это означает, что может произойти потеря устойчивости плоской формы деформирования пластины. В случае вставки из того же материала, что и пластина, отсутствие отрицательных напряжений означает невозможность потери устойчивости.

Задача решается энергетическим методом. Энергия системы определяется как сумма энергии вставки и самой пластины. Прогиб на пластине ищется в следующем виде:

$$w_1(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{k,2l-2} \frac{\cos([2l-2]\varphi)}{\rho^k},$$

а на вставке

$$w_2(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{k,2l-2} \cos([2l-2]\varphi) \cdot \rho^{k+1}.$$

Неразрывность функции прогиба и ее производной дает следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2(\rho, \varphi)|_{\rho=1} = w_1(\rho, \varphi)|_{\rho=1} \\ \frac{\partial w_2(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{\partial w_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} \end{array} \right.,$$

откуда коэффициенты $B_{k,2l-2}$ можно выразить через $A_{k,2l-2}$.

В полярных координатах безразмерные напряжения на пластине задаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{1,\rho\rho}^0 &= \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1-k_y-k_x}{\rho^2} + \left(1 - 4 \cdot \frac{1-k_y+k_x}{\rho^2} + 3 \cdot \frac{1-k_y+k_x}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right] \\ \sigma_{1,\varphi\varphi}^0 &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1-k_y-k_x}{\rho^2} - \left(1 + 3 \cdot \frac{1-k_y+k_x}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right] \\ \tau_{1,\rho\varphi}^0 &= \frac{\tau_{\rho\varphi}}{\sigma} = -\frac{1}{2} \left(1 + 2 \cdot \frac{1-k_y+k_x}{\rho^2} - 3 \cdot \frac{1-k_y+k_x}{\rho^4} \right) \sin(2\varphi), \end{aligned}$$

а внутри вставки

$$\sigma_{2,\rho\rho}^0 = \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\sigma} = \frac{1}{2}(k_y + k_x + (k_y - k_x)\cos(2\varphi))$$

$$\sigma_{2,\varphi\varphi}^0 = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma} = \frac{1}{2}(k_y + k_x - (k_y - k_x)\cos(2\varphi))$$

$$\tau_{2,\rho\varphi}^0 = \frac{\tau_{\rho\varphi}}{\sigma} = -\frac{1}{2}(k_y - k_x)\sin(2\varphi).$$

Коэффициенты k_y и k_x выведены из равенства деформаций на границе вставки и пластины и равны

$$k_y = \frac{E_2[(3 - \nu_2)E_1 + (5 + \nu_1)E_2]}{(E_1 + 2E_2)^2 - [\nu_2 E_1 + (1 - \nu_1)E_2]^2}, \quad k_x = \frac{E_2[(3\nu_2 - 1)E_1 + (1 - 3\nu_1)E_2]}{(E_1 + 2E_2)^2 - [\nu_2 E_1 + (1 - \nu_1)E_2]^2}.$$

Функционал ΔV выражается как

$$\Delta V = U_2 + U_1 + \Lambda(W_2 + W_1).$$

Выражения для U_1 и W_1 отличаются от выражений U_2 и W_2 пределами интегрирования по ρ : от 1 до бесконечности в первом случае, и от 0 до 1 во втором (единица в безразмерном виде представляет собой границу раздела вставки и пластины, т.е. отношение $\rho = \frac{r}{R} = 1$).

Для $i = 1, 2$

$$U_i = \frac{D_i}{2}(U_{i1} - 2(1 - \nu_i)U_{i2}),$$

где

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_i^2)},$$

$$U_{i1} = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \right) \right]^2 \rho \, d\rho d\varphi$$

$$U_{i2} = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} \frac{\partial w_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\rho d\varphi$$

$$W_i = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int \left[\sigma_{i,rr}^0 \rho \left(\frac{\partial w_i}{\partial \rho} \right)^2 + \sigma_{i,\varphi\varphi}^0 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{i,r\varphi}^0 \frac{\partial w_i}{\partial \rho} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right] d\rho d\varphi.$$

Решение задачи об определении собственного числа методом Ритца представлено в табл.2 и на рис. 4.

E_2/E_1		0	1/5	1	10
K	L				
5	3	2,9673	<0	--	<0
7	4	1,9879	<0	--	64,1885
9	5	1,8627	19,8423	--	31,9927
11	6	1,8319	13,1289	--	25,8331
13	7	1,8195	11,8354	--	23,5583
17	9	1,8194	11,0629	--	22,7894

Табл. 2. Значение минимального положительного собственного числа Λ , соответствующее критической нагрузке.

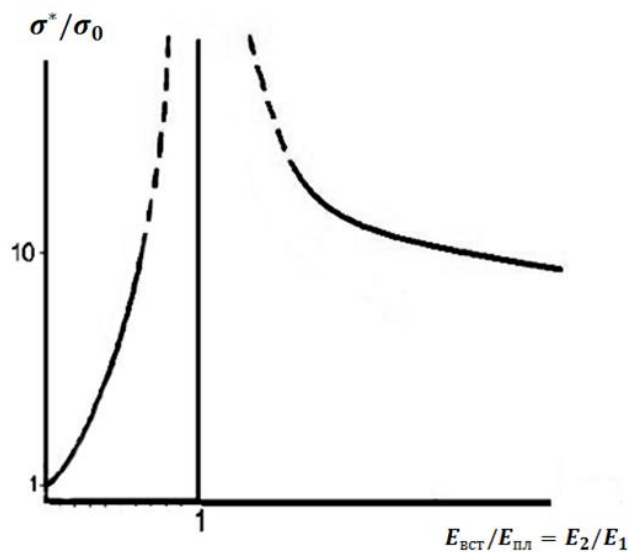


Рис.4. Зависимость критической нагрузки от отношения модуля вставки к модулю пластины (построено в ANSYS).

Критическая нагрузка, которая с учетом собственного числа (Λ) определяется соотношением $\sigma^* = \Lambda E_1 \left(\frac{h}{R}\right)^2$ качественно хорошо согласуются с результатами, полученными в Пакете ANSYS.

Расчеты показывают, что потеря устойчивости пластины с круговой жесткозакрепленной вставкой случается при меньших нагрузках в случае, когда модуль упругости вставки либо много меньше пластины (т.е. вставка очень «мягкая») либо, наоборот, много больше (т.е. вставка очень «жесткая»). Отметим, что формы потери устойчивости при $E_2/E_1 < 1$ и $E_2/E_1 > 1$ – разные. В случае «жесткой» вставки области зоны сжимающих напряжений, как уже отмечалось, расположены вдоль оси X (на 90 градусов смещены по сравнению со случаем, когда вставка мягче пластины).

По мере приближения модуля Юнга вставки к модулю Юнга пластины потеря устойчивости происходит либо при очень больших нагрузках, (в этих случаях, вероятно, скорее может произойти разрушение пластины), либо не происходит вовсе (в случае одинаковых материалов).

Список публикаций в журналах, рекомендуемых ВАК, и изданиях, входящих в базу данных Scopus:

1. **Бауэр С.М., Ермаков А.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф.** Применение неклассических моделей теории оболочек к исследованию механических параметров многослойных нанотрубок. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.1. вып.1, 2011. с. 22-30.
2. **S.M. Bauer, A.M. Ermakov, S.V. Kashtanova, N.F. Morozov.** Evaluation of the Mechanical Parameters of Nanotubes by Means of Nonclassical Theories of Shells. Springer, 2011 Advanced Structured Materials, Volume 15, pp.519-530.
3. **Бауэр С.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н.** Об устойчивости пластины наноразмерной толщины, ослабленной круговым отверстием. ДАН 458, 2, 158 (2014). (**Bauer, S. M., Kashtanova, S. V., Morozov, N. F., Semenov, B. N.** Stability of a Nanoscale-Thickness Plate Weakened by a Circular Hole // Doklady Physics, 2014, V.59,9, pp. 416-418)
4. **Бауэр С.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н.** Потеря устойчивости пластины с круговой вставкой при одноосном растяжении // Вестн. С.-Петербург. ун-та, вып.2, 2017 (принята к публикации 20 декабря 2016 г.)

Список публикаций в других изданиях и тезисах конференций:

1. Анкудинов А.В., **Каштанова С.В.**, Кумзеров Ю.А., Морозов Н.Ф. Исследование механических свойств асбестовых нанотрубок // Сб. тезисов, II Всероссийская конференция, ММПСН-2009, Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях, Москва: МИФИ, 2009, стр. 195
2. Анкудинов А.В., Бауэр С.М., **Каштанова С.В.**, Морозов Н.Ф., Няпшаев И.А. Исследование механической жесткости уединенных асбестовых нанотрубок // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2009, стр. 7-9.
3. **Каштанова С.В.** Механические свойства асбестовых нанотрубок // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды», 2009-2010, стр.75-79
4. Анкудинов А.В., Бауэр С.М., Ермаков А.М., **Каштанова С.В.**, Морозов Н.Ф. О механических параметрах асбестовых нанотрубок // XIV Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 19-24 июня 2010 г., тезисы докладов
5. Ankudinov A.V., Nyapshaev I.A., Bauer S.M., **Kashtanova S.V.**, Morozov N.F. Mechanical testing of individual asbestos nanotubes //18th ECF
6. Греков М., Еремеев В. **Каштанова С.**, Морозов Н., Язовская А. Прикладные задачи наномеханики. // XV Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 4-7 декабря 2011 г., тезисы докладов
7. **Каштанова С.В.**, Морозов Н.Ф. О потере плоской формы устойчивости нанопластин. // Международная научная конференция «VI Поляховские чтения». Тезисы докладов. Изд-во СПбГУ. 2012. С.230
8. **Kashtanova S.V.**, Morozov N.F. Influence of Surface Stress on Stability of Nanoscale Plate with a Circular Hole // Thesis on 8th European Solid Mechanics Conference in Graz, Austria, 2012
9. Grekov M.A., Morozov N.F., **Kashtanova S.V.**, Yazovskaya A.A. Effect of a Surface Stress on Strength and Stability of a Plate with a Circular Hole // Book Abstr. XIX Europe Conference on Fracture. Kazan, 2012
10. Бауэр С.М., **Каштанова С.В.**, Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. Устойчивость пластины с наноразмерным отверстием при учете полной системы поверхностных сил. Сборник трудов 2-ой Всероссийской научной конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем», Москва, 17-19 декабря 2013
11. **Kashtanova S.V.** Stability of Infinite Plate With Circular Elastic Inclusion // Book of Abstracts at 28th Nordic Seminar on Computational Mechanics, 2015.