На правах рукописи

Фоминых Александр Владимирович

Применение теории точных штрафных функций к задачам управления

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт–Петербург
2017

Работа выполнена в Санкт–Петербургском государственном университете.

Научный руководитель:	кандидат физ.–мат. наук, доцент Карелин Владимир Витальевич
Официальные оппоненты:	Антипин Анатолий Сергеевич, доктор физ.–мат. наук, профессор, Вычислительный центр Российской академии наук, главный научный сотрудник
	Проурзин Владимир Афанасьевич, кандидат физ.–мат. наук, Институт проблем машиноведения Российской академии наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Защита состоится “14” июня 2017 г. в 18 00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 на базе Санкт–Петербургского государственного университета по адресу: 199178, Санкт–Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт–Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт–Петербург, Университетская наб., д. 7/9 и на сайте https://disser.spbu.ru/disser/soiskatelyu-uchjonoj-stepeni/dis-list/form/14/1319.html

Автореферат разослан “ ” ____________ 2017 года.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физ.–мат. наук, профессор Нежинский В. М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Одной из актуальных задач, исследуемых в данной диссертации, является построение метода решения задачи оптимального управления в форме Лагранжа с интегральным ограничением на управление. Отметим, что при фиксированной начальной точке к данной задаче может быть сведена и более общая задача оптимального управления в форме Больца. Изначальный оптимизационный подход позволяет считать предложенный в диссертации метод в достаточной степени универсальным. Общая схема этого метода может быть описана следующим образом. При помощи аппарата точных штрафных функций исходная задача минимизации интегрального функционала качества при наличии ограничений в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений, начального и конечного положения объекта и при интегральном ограничении на управление сводится к задаче безусловной минимизации некоторого функционала. Далее формулируются необходимые условия минимума данного функционала. Заметим, что известный интегральный принцип максимума Л. С. Понтрягина получается из этого условия как следствие. Для поиска стационарных точек этого функционала используются методы недифференцируемой оптимизации, в частности, метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска.

В данной работе отдельно исследуется задача нахождения программного управления, целью которого является перевод объекта из заданного начального положения в заданное конечное состояние за фиксированное время. В силу более простой постановки задачи по сравнению с задачей Лагранжа удаётся упростить и применяемый алгоритм решения задачи. В диссертации также были рассмотрены полиномы произвольной конечной степени от различных интегральных функционалов, построены методы их минимизации для задачи как со свободным, так и закреплённым правым концом, показаны некоторые приложения данных конструкций. Задача Коши как вариационная рассмотрена с помощью описанного подхода отдельно в силу её важности. Наконец, с помощью аппарата точных штрафных функций и опорных функций при некоторых дополнительных предположениях выведен принцип максимума для дифференциальных включений, впервые полученный В. И. Благодатских.

Таким образом, настоящая работа продолжает исследование методов негладкой оптимизации в вариационных задачах, развиваемых в научной школе В. Ф. Демьянова. Более конкретно, идея применения точных штрафов в оптимальном управлении развивается и используется в данной диссертации для построения конструктивных методов решения задач оптимального управления и исследования дифференциальных включений.

Целью диссертации является разработка единого оптимизационного подхода к решению задач оптимального управления на основе теории точных штрафных функций и методов негладкого анализа, построение прямых методов решения данных задач, изучение задачи нахождения оптимального решения дифференциального включения с применением точных штрафов.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней развивается общий подход применения аппарата точных штрафных функций и методов негладкой оптимизации к задачам управления, а также задачам, содержащим дифференциальные включения. В диссертации показано, как с помощью данного аппарата можно получить некоторые фундаментальные результаты, такие как линеаризованный интегральный принцип максимума Понтрягина для задач управления, принцип максимума для дифференциальных включений, полученный Благодатских, а также новые конструктивные условия оптимальности для данных задач. Заметим, что использование гладкой штрафной функции не позволило бы получить данные фундаментальные результаты, поскольку задача безусловной минимизации этой штрафной функции не была бы эквивалентна исходной задаче ни при каком конечном значении штрафного параметра. Эти факторы оправдывают использованный в диссертации негладкий подход.

Практическая значимость работы определяется тем, что в ней разработан общий оптимизационный подход к решению задач оптимального управления. Кроме того, в диссертации строятся прямые методы решения данных задач, получены некоторые конструктивные условия оптимальности в задаче с дифференциальными включениями. Также в диссертации реализация построенных методов демонстрируется на конкретных примерах, многие из которых возникают в реальных задачах. К практическим преимуществам предложенного в диссертации метода гиподифференциального спуска стоит также отнести отсутствие необходимости поиска множителей Лагранжа, а также обеспечение точного соблюдения ограничений (в данном случае краевых условий), которое принципиально важно в прикладных задачах.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В диссертации применяются современные методы теории экстремальных задач, выпуклого анализа и недифференцируемой оптимизации.

Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту:

- получены необходимые условия минимума полинома от интегральных функционалов;
- построен прямой метод минимизации полинома от интегральных функционалов, опирающийся на метод наискорейшего спуска;
- на основе теории точных штрафных функций получены необходимые (а в случае линейности системы и выпуклости минимизируемого функционала и достаточные) условия

минимума в задаче оптимального управления;

- построен прямой метод решения задачи оптимального управления, опирающийся на метод гиподифференциального спуска;
- с помощью теории точных штрафных функций и опорных функций получен принцип максимума для дифференциальных включений;
- построен прямой метод решения задачи Коши, опирающийся на метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений;

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на XV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (г. Екатеринбург, 2–6 марта, 2015 г.), XVI Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (г. Иркутск, 30 июня – 6 июля, 2014 г.), III Международной конференции «Устойчивость и процессы управления», посвящённой 85-ти летию со дня рождения В. И. Зубова (г. Санкт–Петербург, 5–9 октября, 2015 г.), XLVI международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (г. Санкт–Петербург, 6–9 апреля, 2015 г.) и семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации (факультет прикладной математики–процессов управления, СПбГУ).

Публикации. По результатам исследований опубликовано 11 печатных работ, из которых 2 в соавторстве и 5 в изданиях, рекомендуемых ВАК.

Работы [3, 10] написаны в соавторстве. В них соавторам принадлежат постановки задач, автору диссертации — формулировки и доказательство результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Леммы, теоремы, следствия, замечания, примеры и таблицы нумеруются в соответствии с главой, параграфом, в которых они находятся. Формулы нумеруются в соответствии с главой, в которой они находятся. Объём работы составляет 103 страницы. Список литературы включает 125 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении приводится обзор литературы по теме работы, обсуждаются актуальность исследования, его теоретическая и практическая ценность, научная новизна.

В Главе 1 приведены основные понятия из функционального анализа, выпуклого анализа, теории многозначных отображений и негладкого анализа, используемые в следующих главах.

В частности, приводятся определения дифференцируемости по Гато, субдифференцируемости, гиподифференцируемости.

Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство.

Функция f называется *дифференцируемой по Гато* в точке x, если она дифференцируема по направлениям в данной точке и отображение $g \to f'(x, g)$ есть линейный непрерывный функционал, где g есть некоторое направление.

Субдифференциалом выпуклой функции $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке x называется множество, состоящее из всех субградиентов функции f в точке x, т.е.

$$\partial f(x) = \{p \in X^* \mid f(y) - f(x) \geqslant p(y) - p(x) \quad \forall y \in X\},$$

где X^* — пространство, сопряжённое к пространству X.

Отображение $x \to \partial f(x)$ называется субдифференциальным.

Пусть $\Omega \in X$ — непустое множество. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *гиподифференцируемой* на множестве Ω, если для любого $x \in \Omega$ существует выпуклый компакт $df(x) \in \mathbb{R} \times X^*$ такой, что для любого допустимого приращения $\Delta x \in X$ (т. е. $\mathrm{co}\{x, x + \Delta x\} \in \Omega$) соответствующее приращение функции представимо в виде

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \max_{[a,\varphi] \in df(x)} (a + \varphi(\Delta x)) + o(\Delta x, x),$$

$$o(\alpha \Delta x, x)/\alpha \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

Отображение $x \to df(x)$ называется гиподифференциальным.

Функция f называется *непрерывно гиподифференцируемой* в точке $x \in \Omega$, если она гиподифференцируема в некоторой окрестности этой точки и существует непрерывное (по Хаусдорфу) гиподифференциальное отображение df в этой точке.

Также приводится определение точной штрафной функции.

Рассмотрим экстремальную задачу вида $f \to \inf\limits_{x \in \Omega}$, где Ω — некоторое непустое подмножество пространства X, а вещественная функция f определена на X. Предположим, что решение этой задачи существует.

Пусть множество Ω задано в виде

$$\Omega = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\},$$

где $\varphi\colon X \to [0, +\infty)$ — некоторая неотрицательная функция.

Для любого неотрицательного λ введём функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda \varphi(x),$$

которая называется *штрафной функцией* для заданных f и φ, а число λ называется *штрафным параметром.*

Штрафная функция называется *точной штрафной*, если существует число $\lambda^* \geqslant 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda^*$ множество точек глобального минимума функции F_λ совпадает с множеством точек глобального минимума в задаче $f \to \inf\limits_{x\in\Omega}$. В этом случае λ^* называется *константой точного штрафа.*

Важным понятием выпуклого анализа является опорная функция.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ определим *опорную функцию* вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ соотношением

$$c(F,\psi) = \sup_{f\in F}(f,\psi).$$

В Главе 2 выводятся необходимые условия минимума полинома от интегральных функционалов

$$P_k\big[I_1(x),\ldots,I_n(x)\big], \tag{1}$$

$$I_j(x) = \int_0^T f_j\big(x(t),\dot{x}(t),t\big)dt,\ j=\overline{1,n},$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В выражении (1) P_k — полином заданной конечной степени $k \in \mathbb{N}$:

$$P_k = \sum_{i=1}^{\ell} a_i F_i,$$

где

$$F_i = \Big(\int_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \ldots \times \Big(\int_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i}.$$

Здесь

$$f_j = f_j(x,\dot{x},t),\ j=\overline{1,n},$$

$$k = \max_{i=\overline{1,\ell}}(m_1^i+\ldots+m_n^i),\ m_j^i \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,\ell}.$$

Здесь $T > 0$ — некоторый фиксированный момент времени, f_j — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по всем трём аргументам и непрерывно дифференцируемая по x и $\dot{x}$, x — n-мерная вектор-функция координат, непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0,T]$.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n^1[0,T]$, удовлетворяющую ограничению (2), которая доставляет минимум функционалу (1).

Положим $z(t) = \dot{x}(t), z \in C_n[0,T]$.

Обозначим

$$\begin{cases} f_j^i = \Big(\displaystyle\int_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \ldots \times \Big(\displaystyle\int_0^T f_{j-1} dt\Big)^{m_{j-1}^i} \times \Big(\displaystyle\int_0^T f_j dt\Big)^{m_j^i - 1} \times \\ \qquad \times \Big(\displaystyle\int_0^T f_{j+1} dt\Big)^{m_{j+1}^i} \times \cdots \times \Big(\displaystyle\int_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i}, \text{ если } m_j^i \geqslant 1, \\ \qquad\qquad f_j^i = 0, \text{ если } m_j^i = 0, \end{cases}$$

где $f_j^i = f_j^i\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z, t\big)$, $i = \overline{1, \ell}$, $j = \overline{1, n}$.

Лемма 1. *Для того, чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала P_k, необходимо выполнение соотношений*

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i = 0_n \ \forall t \in [0, T],$$
$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x^*, z^*, T)}{\partial z} m_j^i f_j^i = 0_n.$$

На основании полученных условий минимума к задаче минимизации полинома от интегральных функционалов применяет метод наискорейшего спуска.

Дополнительно исследуется исходная задача с ограничением на правом конце. С помощью теории точных штрафов эта задача сводится к безусловной минимизации некоторого негладкого функционала. На основании полученных условий минимума данного функционала к задаче применяется метод гиподифференциального спуска. Результаты работы метода иллюстрируются на примерах.

Отмечено приложение полиномов от интегральных функционалов к задачам управления, некоторым интегральным уравнениям и некоторым задачам аэродинамики.

В Главе 3 иллюстрируется применение метода субдифференциального спуска и метода гиподифференциального спуска к задаче нахождения программного управления динамикой объекта, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ t \in [0, T], \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \tag{4}$$

$$x(T) = x_T, \tag{5}$$

где x_0, $x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы. Считаем систему (3) управляемой из начального положения (4) в конечное состояние (5). Здесь $T > 0$ — заданный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n-мерная вектор-функция, x — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно-непрерывной на $[0,T]$ производной. Предполагаем $f(x,u,t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной по всем трём аргументам. Пусть m-мерное управление u принадлежит следующему множеству допустимых управлений

$$U = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt \leqslant C\big\}, \tag{6}$$

где C — заданная константа.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется подобрать такое управление, которое принадлежит множеству допустимых управлений (6) и переводит систему (3) из начального положения (4) в конечное состояние (5) за время T.

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$.

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(\varphi(z,u,t), \varphi(z,u,t)\big)dt +$$

$$+ \max\Big\{0, \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C\Big\} + \sum_{i=1}^n \psi_i(z),$$

где

$$\varphi(z,u,t) = z(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, u, t\big),$$

$$\psi_i(z) = |\overline{\psi}_i(z)|,\ \overline{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti},\ i = \overline{1,n},$$

а x_{0i} — i-ая компонента вектора x_0, x_{Ti} — i-ая компонента вектора x_T, $i = \overline{1,n}$.

Введём множество

$$\Omega = \big\{z \in P_n[0,T] \;\big|\; x_0 + \int_0^T z(t)dt = x_T\big\}.$$

Лемма 2. *Функционал I субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) = \Big\{\Big[z(t) - f(x,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z(\tau) - f(x,u,\tau)\big)d\tau + \sum_{i \in I_0}\omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j,$$

$$-\Big(\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\Big)'\big(z(t) - f(x,u,t)\big) + 2\nu u\Big] \;\Big|\; \omega_i \in [-1,1],\ i \in I_0,$$

$$\mu_j = 0,\ j \in I_0,\ \mu_j = 1,\ j \in I_+,\ \mu_j = -1,\ j \in I_-,$$

$$\nu \in [0,1],\ u \in U_0,\ \nu = 1,\ u \in U_+,\ \nu = 0,\ u \in U_-\Big\},$$

где I_+, I_-, I_0 и U_+, U_-, U_0 — некоторые индексные множества и множества управлений соответственно, которые определены для каждой точки $[z,u]$, e_i — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $(\cdot)'$ означает операцию транспонирования.

Следствие 1. *Если $z \in \Omega$, $u \in U$, то функционал I субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) = \Big\{ \Big[z(t) - f(x,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(x,u,\tau)\big) d\tau + \sum_{i=1}^n \omega_i e_i, \\ - \Big(\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\Big)' \big(z(t) - f(x,u,t)\big) + 2\nu u \Big] \ \Big| \ \omega_i \in [-1,1], \ i = \overline{1,n}, \\ \nu \in [0,1], \ u \in U_0, \ \nu = 0, \ u \in U_- \Big\}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы управление $u^* \in U$ переводило систему* (3) *из начального положения* (4) *в конечное состояние* (5) *за время T, необходимо, а в случае линейности системы* (3) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T] \times P_m[0,T]$, а выражение для субдифференциала $\partial I(z,u)$ выписано в формуле (7). *Здесь вектор-функция $x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$ является программным движением, соответствующим искомому программному управлению u^*.*

Аналогично для функционала I вычисляется гиподифференциал в точке $[z,u]$ и в его терминах формулируются условия минимума.

На основании полученных условий минимума к исходной задаче применяются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска. Применение описанных методов иллюстрируется на численных примерах.

В Главе 4 рассматривается задача оптимального управления с интегральным ограничением на управление и интегральным критерием качества. Для решениях этих задач применяются метод субдифференциального спуска и гиподифференциального спуска.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t), \ t \in [0,T]. \tag{8}$$

Требуется подобрать такое управление $u^* \in P_m[0,T]$, удовлетворяющее интегральному ограничению

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant 1,$$

которое переводит систему (8) из заданного начального положения

$$x(0) = x_0 \tag{9}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T) = x_T \tag{10}$$

и доставляет минимум функционалу

$$I(x,u) = \int_0^T f_0(x,\dot{x},u,t)dt. \tag{11}$$

Считаем, что оптимальное управление u^* существует. В системе (8) $T>0$ — заданный момент времени, $f(x,u,t)$ — вещественная n-мерная вектор-функция, x — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно-непрерывной на интервале $[0,T]$ производной, u — m-мерная вектор-функция управлений, которую считаем кусочно-непрерывной на промежутке $[0,T]$. Предполагаем $f(x,u,t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной по всем трём аргументам.

В функционале (11) $f_0(x,\dot{x},u,t)$ — вещественная скалярная функция, которую будем считать непрерывно дифференцируемой по x, $\dot{x}$ и u и непрерывной по всем четырём аргументам.

Положим $z(t)=\dot{x}(t)$, $z\in P_n[0,T]$. Введём в рассмотрение функционал

$$F_\lambda(z,u) = I(z,u)+\lambda\Phi(z,u) = I(z,u)+\lambda\Big[\varphi(z,u)+\sum_{i=1}^n \psi_i(z)+\max\Big\{0, \int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt-1\Big\}\Big], \tag{12}$$

где

$$\varphi(z,u) = \sqrt{\int_0^T \Big(z(t)-f\big(x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau,u,t\big), z(t)-f\big(x_0+\int_0^t z(\tau)d\tau,u,t\big)\Big)dt},$$

$$\psi_i(z) = \big|\overline{\psi}_i(z)\big|,\ \overline{\psi}_i(z) = x_{0i}+\int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti},\ i=\overline{1,n},$$

а x_{0i} — i-ая компонента вектора x_0, x_{Ti} — i-ая компонента вектора x_T, $i=\overline{1,n}$, $\lambda>0$ — некоторая константа.

Введём множества

$$\Omega = \big\{[z,u]\in P_n[0,T]\times P_m[0,T] \ \big|\ \Phi(z,u)=0\big\},$$

$$\Omega_\delta = \big\{[z,u]\in P_n[0,T]\times P_m[0,T] \ \big|\ \Phi(z,u)<\delta\big\}.$$

Теорема 2. *Пусть найдётся такое положительное число $\lambda_0<\infty$, что $\forall\lambda>\lambda_0$ существует точка $[z(\lambda),u(\lambda)]\in P_n[0,T]\times P_m[0,T]$, для которой $F_\lambda\big(z(\lambda),u(\lambda)\big)=\inf\limits_{[z,u]} F_\lambda(z,u)$. Пусть также функционал I является липшицевым на множестве $\Omega_\delta\setminus\Omega$. Тогда функционал (12) будет точной штрафной функцией.*

Введём множества

$$\Omega_1 = \Big\{z\in P_n[0,T] \ \Big|\ x_0+\int_0^T z(t)dt = x_T\Big\},$$

$$\Omega_2 = \Big\{u\in P_m[0,T] \ \Big|\ \int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt \leqslant 1\Big\},$$

$$\Omega_3 = \big\{[z,u]\in P_n[0,T]\times P_m[0,T] \ \big|\ \varphi(z,u)=0\big\}.$$

Лемма 3. *Если $[z,u] \in \Omega_3$, $z \in \Omega_1$, $u \in \Omega_2$, то функционал F_λ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле*

$$\partial F_\lambda(z,u) = \Big\{ \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i \big],$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + 2\nu u(t) \big] \Big] \ \Big| \ \omega_i \in [-1,1],\ i = \overline{1,n}, \tag{13}$$
$$\nu \in [0,1],\ u \in U_0,\ \nu = 0,\ u \in U_-,\ v \in P_n[0,T],\ \int_0^T \big(v(t), v(t)\big) dt \leqslant 1 \Big\},$$

где U_-, U_0 — некоторые множества управлений, которые определены для каждой точки $[z,u]$, e_i — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $(\cdot)'$ означает операцию транспонирования.

Теорема 3. *Для того, чтобы управление $u^* \in \Omega_2$ переводило систему* (8) *из начального положения* (9) *в конечное состояние* (10) *и доставляло минимум функционалу* (11), *необходимо, а в случае линейности системы* (8) *и выпуклости функционала* (11) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial F_\lambda(z^*, u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T] \times P_m[0,T]$, а выражение для субдифференциала $\partial F_\lambda(z,u)$ выписано в формуле (13).

Аналогично для функционала F вычисляется гиподифференциал в точке $[z,u]$ и в его терминах формулируются условия минимума.

На основании полученных условий минимума к исходной задаче применяются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска. Применение описанных методов иллюстрируется на численных примерах.

В Главе 5 рассматривается дифференциальное включение с заданными многозначным отображением и начальной точкой. Для этого дифференциального включения требуется найти решение, доставляющее минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата точных штрафных функций в случае непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным получены некоторые классические результаты принципа максимума для дифференциальных включений.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x,t) \tag{14}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{15}$$

В формуле (14) $F(x,t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0,T]$, x — n-мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной на $[0,T]$

производной, $T > 0$ — заданный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция $F(x,t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0,T]$, являющуюся решением включения (14) и удовлетворяющую начальному условию (15), которая доставляет минимум функционалу

$$I(x) = \int_0^T f_0(x,t)dt, \tag{16}$$

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по обоим аргументам и непрерывно дифференцируемая по x.

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$. Введём функции

$$l(\psi, z, t) = (z, \psi) - c(F, \psi),$$

$$h(z,t) = \max_{\psi \in S} \max \left\{0, l(\psi, z, t)\right\},$$

$$\varphi(z) = \sqrt{\int_0^T h^2(z,t)dt}$$

и составим функционал

$$\Phi_\lambda(z) = I(z) + \lambda \varphi(z),$$

где λ — некоторое положительное число, S — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$. Введём множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\},$$

Лемма 4. *Если опорная функция $c(F, \psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x, то:*

- *при $z \notin \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле*
$$\nabla \varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)} \psi^*(t) - \int_t^T \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)} \frac{\partial c(F(x,\tau), \psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau,$$
- *при $z \in \Omega$ функционал φ субдифференцируем и его субдифференциал в точке z находится по формуле*

$$\partial \varphi(z) = \left\{ w(t)\psi(t) - \int_t^T w(\tau) \frac{\partial c(F(x,\tau), \psi(\tau))}{\partial x} d\tau \;\middle|\; w \in W,\ \psi(t) \in \overline{\overline{R}}(t) \right\},$$

$$\overline{\overline{R}}(t) = \left\{ \overline{\psi}(t) \in B(0,1) \;\middle|\; \max\{0, l(\overline{\psi}, z, t)\} = \max_{\psi(t) \in B(0,1)} \max\{0, l(\psi, z, t)\} \right\},$$

$$W = \{w \in P[0,T] \mid \int_0^T \big(w(t), w(t)\big)dt \leqslant 1;\ w(t) \geqslant 0\ \forall t \in T_0,\ w(t) = 0\ \forall t \in T_-\},$$

где T_0, T_- — некоторые множества точек t из отрезка $[0,T]$, которые определены для каждой фиксированной точки z, $B(0,1)$ — единичный шар с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\psi^*(t) \in S$ — определённая вектор-функция.

Теорема 4. *Пусть точка $z_0 \in \Omega$ является локальным минимумом функционала I на множестве Ω в метрике ρ. Предположим, что в некоторой окрестности*

$$\overline{\Omega}_\delta = \{z \in P_n[0,T] \mid \rho(z, z_0) < \delta\}$$

точки z_0 выполнено соотношение

$$\varphi^{\downarrow}(z) \leqslant -a < 0 \ \forall z \in \overline{\Omega}_\delta \setminus \Omega.$$

Пусть также функционал I является липшицевым на множестве $\overline{\Omega}_\delta$. Тогда существует такое число λ^*, что для любого $\lambda > \lambda^*$ точка z_0 будет локальным минимумом функционала Φ_λ в метрике ρ.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия Теоремы 4. Пусть также опорная функция многозначного отображения $F(x,t)$ из (14) непрерывно дифференцируема по x. Для того, чтобы точка $x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$ удовлетворяла включению (14) и условию (15) и доставляла минимум функционалу (16), необходимо, чтобы нашлась такая вектор-функция $\Psi(t)$, что для почти всех $t \in [0,T]$ выполняются соотношения*

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*,t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}, \tag{17}$$

$$(\dot{x}^*, \Psi(t)) - c(F(x^*,t), \Psi(t)) = 0, \tag{18}$$

$$\Psi(T) = \mathbf{0}. \tag{19}$$

Теорема 5 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношения (17), (18) будут иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако концевое значение $\Psi(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, то есть здесь (19) уже не будет иметь места.

Применение принципа максимума демонстрируется на примерах.

В Главе 6 рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ. Эта задача сводится к вариационной задаче безусловной минимизации некоторого функционала.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x,t), \ \ t \in [0,T], \tag{20}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{21}$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, x — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0,T]$, $f(x,t)$ — заданная вещественная n-мерная вектор-функция, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (20), которое удовлетворяет начальному условию (21). Будем считать, что для (20), (21) выполнены условия теоремы Пикара. Тогда решение задачи Коши (20), (21) существует и единственно.

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0,T]$ и введём функционал

$$I(z) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(\varphi(z,t), \varphi(z,t)\big)dt, \tag{22}$$

где

$$\varphi(z,t) = z(t) - f\Big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, t\Big).$$

Лемма 5. *Функционал I дифференцируем по Гато, и его градиент в точке z выражается по формуле*

$$\nabla I(z) = z(t) - f(x,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(x,\tau)\big)d\tau.$$

Для того, чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (22), необходимо, а в случае линейности исходной системы и достаточно выполнение соотношения

$$z^*(t) - f(x^*,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x^*,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z^*(\tau) - f(x^*,\tau)\big)d\tau = 0_n \ \forall t \in [0,T],$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0,T]$, $x^*(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t z^*(\tau)d\tau$.

На основании полученных условий минимума к исходной задаче применяются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений. Приводятся численные примеры реализации этих методов. Дополнительно исследуется задача Коши, когда система ОДУ не разрешена относительно производных.

В Заключении даётся краткий обзор всей работы с перечислением полученных результатов и обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов:

1. **Фоминых А. В. Градиентные методы решения задачи Коши для нелинейной системы ОДУ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. 2014. Вып. 3. С. 311–316.**

2. **Фоминых А. В. Необходимые условия минимума полинома от интегральных функционалов // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 2. С. 93–107.**

3. **Фоминых А. В., Карелин В. В. Точные штрафы в задаче построения оптимального решения дифференциального включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 153–163.**

4. **Фоминых А. В. Метод гиподифференциального спуска в задаче построения программного управления // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 1. С. 117–124.**

5. **Фоминых А. В. Метод гиподифференциального спуска в задаче построения оптимального управления // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 106–125.**

Публикации в других изданиях:

6. **Fominyh A. V.** The subdifferential descent method in the optimal control problem // The XLVI annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'15). Abstracts — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V. 2015, vol. 2(18), pp. 90-95.

7. **Фоминых А. В.** Применение метода гиподифференциального спуска к задаче построения оптимального управления // Устойчивость и процессы управления. Материалы международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова, 2015. С. 557–558.

8. **Фоминых А. В.** Точные штрафы в задаче построения оптимального решения дифференциального включения / Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». 2014. С. 136.

9. **Фоминых А. В.** Метод гиподифференциального спуска в задаче построения оптимального управления / XV Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения». 2015. С. 228–229.

10. **Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N. Exact Penalties and Differential Inclusions // Electron. J. Diff. Equ., vol. 2015 (2015), no. 309, pp. 1–13.**

11. **Fominyh A. V. Application of the Hypodifferential Descent Method to the Problem of Constructing an Optimal Control // IEEE 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP), pp. 560–563.**