

На правах рукописи

Ковачев Александр Светославович

Динамика неуравновешенных роторов,
оснащенных неидеальными
автобалансирующими устройствами

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая Механика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Быков Владимир Григорьевич

Официальные оппоненты: **Солтаханов Шервани Хусаинович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Чеченский государственный университет,
заведующий кафедрой прикладной математики и
механики

Диевский Виктор Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Военный институт (инженерно-технический) Во-
енной академии материально-технического обес-
печения,
доцент кафедры военной архитектуры, автоматизи-
рованных систем проектирования и естествен-
нонаучных дисциплин

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учре-
ждение науки Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

Защита состоится 23 июня 2016 г. в 14 часов на заседании диссертационного
совета Д 212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государственного универ-
ситета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университет-
ский пр., 28.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М.
Горького Санкт-Петербургского государственного университета по ад-
ресу: 199304, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте
<https://dissert.spbu.ru/dissert/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite>.

Автореферат разослан “ ____ ” _____ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.232.30, д.ф.-м.н., профессор



Кустова
Елена Владимировна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современном мире огромную роль играют быстроходные роторные машины, используемые в энергетике, промышленности, на транспорте и в бытовой технике. Во многих случаях угловые скорости роторов таких машин в рабочих режимах превосходят критические значения. Это налагает повышенные требования к балансировке роторов, а в некоторых случаях, когда дисбаланс ротора может меняться во время движения, требует применения специальных автобалансирующих устройств

Необходимо отметить, что в большинстве работ, посвященных исследованию автоматической балансировки роторов при помощи шарового автобалансирующего устройства, предполагается, как правило, что центр АБУ лежит точно на оси симметрии ротора. На практике таким моделям с большой точностью соответствуют АБУ жестко насаженные на роторы. Однако в ряде устройств нашли применение сменные АБУ, которые крепятся к ротору при помощи резьбового соединения. Для адекватного математического моделирования подобных устройств необходимо учитывать наличие возможного эксцентриситета между осями симметрии АБУ и ротора.

Проблемы автобалансировки роторов, оснащенных неидеальными шаровыми АБУ рассматривались Ю. В. Агафоновым. На основе методов, используемых при исследовании синхронизации динамических объектов, им был констатирован факт о невозможности полной балансировки статически неуравновешенного ротора при наличии эксцентриситета беговой дорожки АБУ. В. П. Нестеренко и А. П. Соколов при помощи геометрических соображений показали, что неидеальный автобалансир в случае моментно неуравновешенного ротора при определенных условиях приводит к стационарному режиму с постоянным остаточным дисбалансом. Аналогичный вывод был получен К. О. Олссоном для случая автобалансира с эллиптической беговой дорожкой.

Целью данной работы является исследование влияния эксцентриситета АБУ на процессы автобалансировки статически и динамически неуравновешенных роторов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для статически неуравновешенного, симметрично закрепленного ротора, оснащенного одноплоскостным, эксцентрически насаженным шаровым автобалансирующим устройством показана практическая неосуществимость полностью сбалансированного стационарного режима. Доказана возможность существования в закритической области асимптотически устойчивого полусбалансированного стационарного режима, при

котором амплитуда прецессионного движения ротора не зависит от угловой скорости его собственного вращения и в точности равна эксцентриситету АБУ.

2. Показана возможность существования трех типов несбалансированных стационарных режимов, зависящих от положения балансировочных шариков в АБУ, и доказано, что только один из них может быть асимптотически устойчив при определенных значениях параметров системы.
3. Для динамически неуравновешенного ротора, оснащенного двухплоскостным шаровым автобалансировочным устройством, обоймы которого насажены на вал ротора с некоторым эксцентриситетом, доказана возможность существования и устойчивости полусбалансированного стационарного режима с постоянной остаточной амплитудой прецессионного движения, не зависящей от угловой скорости. Получена аналитическая формула для амплитуды прецессионного движения в зависимости от эксцентриситетов обойм АБУ и их положения относительно ротора.
4. При помощи численного исследования нестационарных режимов прецессионного движения динамически неуравновешенного ротора обнаружен ступенчатый характер изменения амплитуды прецессии и углов отклонения балансировочных шариков при переходе к полусбалансированному режиму в случае вращения ротора с постоянной угловой скоростью, а также в случае движения ротора под действием постоянного вращательного момента.

Научная новизна:

1. Построены точная, приближенная и упрощенная системы уравнений, описывающие динамику статически неуравновешенного ротора, оснащенного одноплоскостным, эксцентрически насаженным шаровым автобалансировочным устройством.
2. В рамках точной модели статически неуравновешенного ротора проведено исследование стационарных режимов и показана практическая неосуществимость полностью сбалансированного режима. Несбалансированный стационарный режим, при котором амплитуда прецессионного движения не зависит от угловой скорости ротора, предложено называть полусбалансированным. Также выделены три типа несбалансированных стационарных режимов, при которых величина вибрации ротора зависит от его скорости вращения. Найдены условия существования и устойчивости полусбалансированного и несбалансированных стационарных режимов.

3. Построена математическая модель динамически неуравновешенного ротора, оснащенного неидеальным двухплоскостным эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством.
4. В рамках модели динамически неуравновешенного ротора показана практическая неосуществимость полностью сбалансированного режима. Проведено исследование условий существования и устойчивости полусбалансированного и несбалансированного стационарных режимов.
5. Проведено сравнение результатов исследования точных и приближенных моделей рассматриваемых систем.

Научная и практическая значимость. Результаты исследования могут быть применены при конструировании и анализе эксплуатации быстро вращающихся роторных машин и двигателей в различных областях техники, на транспорте, в энергетике, самолето- и вертолетостроении и др. На основании полученных результатов могут быть сделаны практические рекомендации относительно ширины рабочего диапазона ротора, условий прохождения через резонансные зоны, а также рекомендации по конструктивным особенностям автобалансирующих устройств и достижимого качества балансировки роторов в рабочем режиме.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата. Результаты численных экспериментов находятся в соответствии с результатами, полученными в работах предшественников.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Восьмой международный симпозиум по классической и небесной механике, 2013 год, Седльце, Польша.
2. Научный семинар кафедры Теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, 2014 год.
3. Международная научная конференция по механике “Седьмые Поляховские Чтения”, 2015 год, Санкт-Петербург, Россия.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в шести работах [1–6], две из которых изданы в журнале, рекомендованном ВАК [1, 2], и две индексированы в базе данных Scopus [3, 4]. Работа [2] выполнена без соавторов, работы [1, 3–6] написаны в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит общая постановка задач, а также консультирование по вопросам построения математических моделей и анализа результатов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 92 страницы с 34 рисунками. Список литературы содержит 60 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию динамики и устойчивости статически неуравновешенного ротора с одноплоскостным, эксцентрически насаженным шаровым автобалансирующим устройством.

В разделе 1.1 построена математическая модель ротора с помощью введения обобщенных лагранжевых координат. Рассматривается модель неуравновешенного ротора в виде массивного тонкого жесткого диска, закрепленного посередине невесомого упругого вала, вращающегося в вертикальных шарнирных опорах O_1 и O_2 . Статический эксцентриситет диска s_1 — расстояние между точкой его крепления к валу C и центром тяжести G . Для компенсации дисбаланса на диске установлено шаровое АБУ, представляющее собой круговую полость радиуса r , в которой могут свободно передвигаться n балансирующих шариков одинаковой массы. Предполагается, что АБУ установлено на диск “не идеальным образом”, т.е. точка E обозначает центр круговой полости АБУ, несовпадающий с точкой C . Для описания эксцентриситета АБУ вводятся два параметра: расстояние s_2 между точками C и E и угол $\gamma = \angle GCE$ (рис.1). Эксцентриситеты s_1 и s_2 считаются малыми величинами, по сравнению с радиусом r .

Движение ротора рассматривается в трех системах координат: неподвижной $OXYZ$, вращающейся $O\xi\eta\zeta$ и жестко связанной с ротором $C\xi'\eta'\zeta'$. Ось Z неподвижной системы направлена вертикально вверх вдоль оси, соединяющей центры опор, а начало координат выбрано так, чтобы оси X и Y лежали в плоскости статического эксцентриситета. Ось ζ вращающейся системы совпадает с осью Z , а оси ξ и η коллинеарны осям ξ' и η' системы координат, связанной с ротором. В рамках модели Джеффкотта рассматривается движение диска и балансирующих шариков только в плоскости OXY .

В силу сделанных допущений описанная механическая система имеет $n + 3$ степени свободы. В качестве обобщенных координат выбраны координаты X и Y точки C в неподвижной системе, угол θ между осями OX и $O\xi$

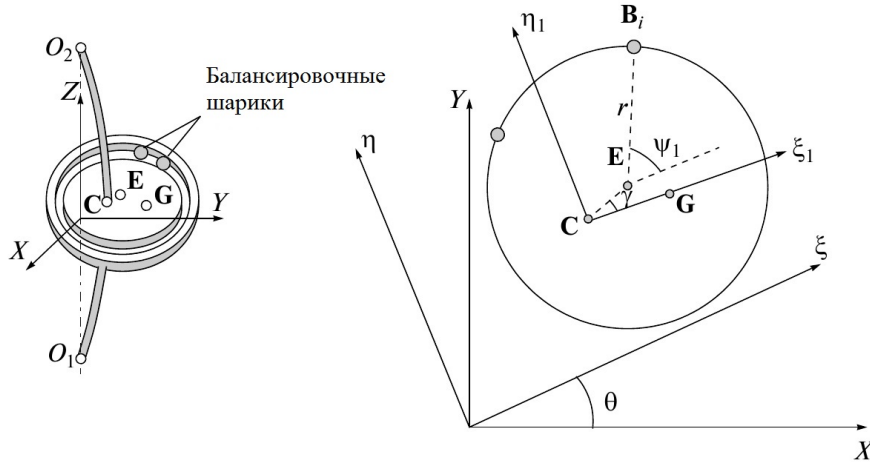


Рис. 1: Ротор с эксцентрически насаженным АБУ.

(угол поворота ротора), углы ψ_i ($i = 1, \dots, n$) отклонения шариков относительно диска.

Уравнения Лагранжа при переходе к безразмерным переменным $x = X/s_1$, $y = Y/s_1$, $t = \Omega \bar{t}$, где $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$, выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \delta_1 \dot{x} + x = -\frac{d^2}{dt^2} [\mu_1 \cos \theta + \mu_2 \sum \cos(\theta + \gamma) + \mu_3 \sum \cos(\theta + \psi_j)], \\ \ddot{y} + \delta_1 \dot{y} + y = -\frac{d^2}{dt^2} [\mu_1 \sin \theta + \mu_2 \sum \sin(\theta + \gamma) + \mu_3 \sum \sin(\theta + \psi_j)], \\ J\ddot{\theta} + \delta_3 \dot{\theta} - \frac{\mu_3}{\varepsilon_1} \delta_2 \sum \dot{\psi}_j = \mathcal{M}(t) + \mu_1 (\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) + \mu_2 (\ddot{x} \sin(\theta + \gamma) + \\ + \ddot{y} \cos(\theta + \gamma)) - \mu_3 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sum ((\dot{\theta} + \dot{\psi}_j)^2 \sin(\gamma - \psi_j) + (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}_j) \cos(\gamma - \psi_j)), \\ \ddot{\psi}_j + \ddot{\theta} + \delta_2 \dot{\psi}_j = \varepsilon_1 (\ddot{x} \sin(\theta + \psi_j) - \ddot{y} \cos(\theta + \psi_j)) + \varepsilon_2 (\dot{\theta}^2 \sin(\gamma - \psi_j) - \\ - \ddot{\theta} \cos(\gamma - \psi_j)), \\ j = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (1)$$

где безразмерные параметры μ_1 , μ_2 , μ_3 , δ_1 , δ_2 , δ_3 , ε_1 , ε_2 , J и \mathcal{M} имеют следующий смысл

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2 + nm_3}, \quad \mu_2 = \frac{(m_2 + nm_3)s_2}{(m_1 + m_2 + nm_3)s_1}, \quad \mu_3 = \frac{m_3 r}{(m_1 + m_2 + nm_3)s_1}, \\ \delta_1 &= \frac{c}{m_0 \Omega}, \quad \delta_2 = \frac{c_\psi}{m_3 r^2 \Omega}, \quad \varepsilon_1 = \frac{s_1}{r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{s_2}{r}, \\ \delta_3 &= \frac{c_\theta}{m_0 s_1^2 \Omega}, \quad J = \frac{I_G + m_1 s_1^2 + (m_2 + nm_3) s_2^2}{m_0 s_1^2}, \quad \mathcal{M} = \frac{M}{m_0 s_1^2 \Omega^2}, \end{aligned}$$

а m_1 , m_2 , m_3 являются соответственно массой ротора, корпуса АБУ и балансирующего шарика; I_G — момент инерции относительно оси, проходящей

через точку G , перпендикулярной плоскости диска; k — коэффициент упругости вала.

Учитывая медленный характер движения геометрического центра ротора во вращающейся системе координат, получена приближенная система дифференциальных уравнений первого порядка, на основе которой построены упрощенные уравнения, описывающие движение балансировочных шариков. Проведено сравнение результатов численного интегрирования точной, приближенной и упрощенной модели.

В разделе 1.2 в рамках точной модели для ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью ν , выведена система трансцендентных уравнений, описывающая стационарные режимы движения ротора. Вводя комплексную переменную $z = x + iy$ и переходя к вращающейся системе координат $z = \zeta e^{i\nu t}$, получим автономные уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + (\delta_1 + 2i\nu)\dot{\zeta} + (1 - \nu^2 + i\nu\delta_1)\zeta &= (\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma})\nu^2 + \mu_3 \sum ((\nu + \dot{\psi}_j)^2 - i\ddot{\psi}_j)e^{i\psi_j}, \\ \ddot{\psi}_j + \delta_2\dot{\psi}_j &= -\varepsilon_1 \text{Im}[(\ddot{\zeta} + 2i\nu\dot{\zeta} - \nu^2\zeta)e^{-i\psi_j}] + \varepsilon_2\nu^2 \sin(\gamma - \psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Стационарные решения системы (2) имеют следующий вид:

$$\zeta = a_0 e^{i\phi_0}, \quad \psi_j = \psi_{0j} = \text{const}, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где a_0 и ϕ_0 — постоянные амплитуда и угол сдвига фаз прецессионного движения центра диска. Подставляя (3) в (2), получаем систему трансцендентных уравнений относительно a_0 , ϕ_0 и ψ_{0j} , которая описывает стационарные режимы движения ротора

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2 + i\nu\delta_1)a_0 e^{i\phi_0} &= \nu^2 \left(\mu_1 + \mu_2 e^{i\gamma} + \mu_3 \sum_{j=1}^n e^{i\psi_{0j}} \right), \\ \varepsilon_1 a_0 \sin(\phi_0 - \psi_{0j}) &= -\varepsilon_2 \sin(\gamma - \psi_{0j}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Из системы (4) вытекает, что для осуществления полной балансировки должно выполняться соотношение $\psi_{0j} = \{0, \pi\}$ ($j = 1, \dots, n$), т. е. все балансировочные шарики также должны лежать на одной прямой с точками C и G . Второе условие существования сбалансированного режима дает соотношение

$$-\mu_3 \sum_{j=1}^n \cos \psi_{0j} = \mu_1 \pm \mu_2, \quad (5)$$

которое означает принципиальную невозможность для эксцентрически насаженного АБУ обеспечить полную балансировку ротора с переменным дисбалансом невозможность достичь на практике полной балансировки.

Предлагается следующая классификация возможных стационарных режимов вращения ротора:

1. Полусбалансированный режим, при котором амплитуда прецессии и положение шариков в обойме АБУ зависит только от величины эксцентриситета АБУ и не зависит от угловой скорости вращения ротора:

$$\tilde{a}_0 e^{i\phi_0} = s_2 e^{i(\gamma+\pi)}. \quad (6)$$

Для существования полусбалансированного режима должно выполняться условие

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 4, \quad (7)$$

где

$$\alpha = -\frac{\mu_1 + \mu_2 \cos \gamma}{\mu_3} - \frac{\varepsilon_2((1 - \nu^2) \cos \gamma - \nu \delta \sin \gamma)}{\varepsilon_1 \nu^2 \mu_3}, \quad (8)$$

$$\beta = -\frac{\mu_2 \sin \gamma}{\mu_3} - \frac{\varepsilon_2((1 - \nu^2) \sin \gamma + \nu \delta \cos \gamma)}{\varepsilon_1 \nu^2 \mu_3}.$$

2. Несбалансированные режимы, при которых амплитуда прецессионного движения зависит от угловой скорости собственного вращения, и $\psi_{01} = \psi_{02} + \pi k$ ($k = 0, 1$), т.е. балансировочные шарики либо соприкасаются, либо располагаются на противоположных сторонах круговой полости АБУ. Для данных режимов получены аналитические формулы для нахождения амплитудно-частотных характеристик.

На рис.2 приведены результаты численного интегрирования исходной системы уравнений (2) для ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Рис. а) и б) отвечают случаям, когда угловая скорость ротора ниже и выше критической соответственно. В левых частях рисунков показаны графики изменения со временем амплитуд прецессионного движения, а в правых — изменение положения балансировочных шариков. Штриховые прямые на правом нижнем графике соответствуют стационарным значениям ψ_{01} и ψ_{02} .

Таким образом результаты расчетов демонстрируют, что в докритической области устанавливается несбалансированный стационарный режим, а в закритической — полусбалансированный режим с амплитудой остаточной вибрации равной эксцентриситету АБУ.

В разделе 1.3 исследуется устойчивость стационарных режимов движения ротора. Устойчивость полусбалансированного режима исследуется на основе уравнений в вариациях, построенных для точной и приближенной систем. С помощью критериев Рауса и Гурвица численными методами построены двухпараметрические диаграммы устойчивости. Показано, что полусбалансированный режим устойчив только в области закритических частот. Устойчивость несбалансированных режимов исследуется на основе уравнений в вариациях, полученных для приближенной системы.

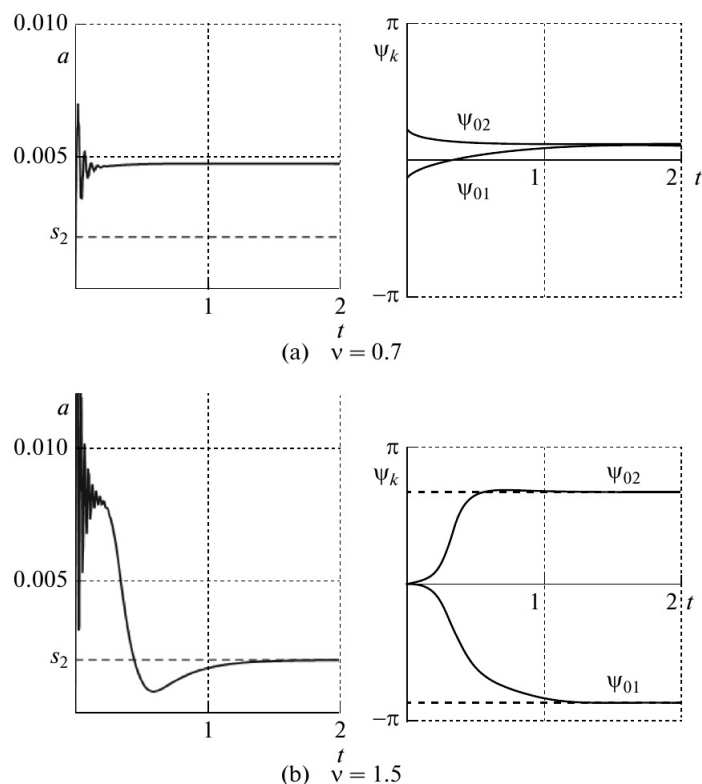


Рис. 2: Режимы вращения ротора в докритической (а) и закритической (б) областях.

В разделе 1.4 исследуются режимы нестационарного прохождения критической области для случаев вращения ротора с постоянным угловым ускорением и постоянным приложенным вращающим моментом.

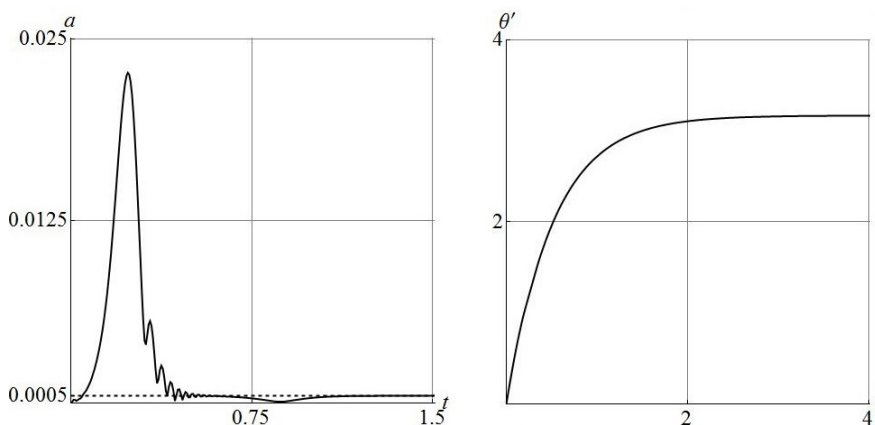


Рис. 3: Амплитуда прецессионного движения и угловая скорость ротора под действием постоянного вращающего момента

На рис. (3) представлены рассчитанные из соотношений (1) графики амплитуд вибраций ротора и его угловой скорости $\dot{\theta}$ для безразмерного вращающего момента $\mathcal{M} = 0.25$ и достаточной для балансировки массой шари-

ков в АБУ. Из графика видно, что в системе устанавливается закритический полусбалансированный режим

Во **второй главе** исследуется динамически неуравновешенный ротор типа цилиндра, оснащенный двухплоскостным шаровым автобалансировочным устройством. В качестве двухплоскостного АБУ рассматриваются две закрепленные на одной оси с ротором круговые обоймы, в которых могут свободно передвигаться балансировочные шарики. Предполагается, что каждая из обойм АБУ насажена на ротор с некоторым эксцентриситетом.

В разделе 2.1 построена механическая модель ротора с двухплоскостным АБУ. Выведена точная система дифференциальных уравнений движения в неподвижной системе координат.

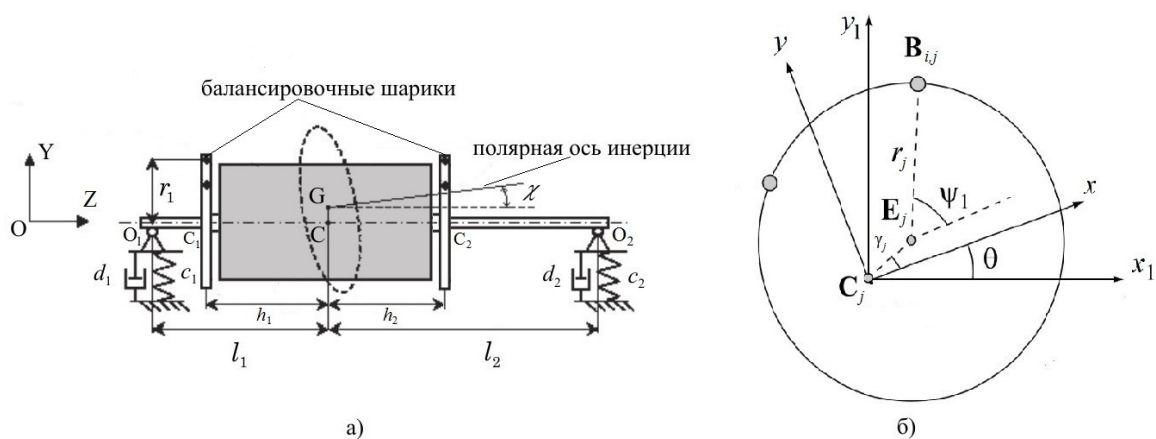


Рис. 4: Динамически неуравновешенный ротор с двухплоскостным АБУ

На рис. 4 G – центр масс ротора; E_j ($j=1,2$) – геометрический центр обоймы j -ого АБУ; C и C_j – точки пересечения оси вращения с перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через точки G и E_j соответственно; l_1 и l_2 – расстояния от точки C до центров опор O_1 и O_2 в недеформированном состоянии; c_1 и c_2 – коэффициенты жесткости в опорах; $s_0 = |CG|$ – статический эксцентриситет; χ – угол между осью вращения и осью динамической симметрии ротора (моментный эксцентриситет); γ – угол между плоскостью моментного эксцентриситета и плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс ротора (фазовый сдвиг моментного эксцентриситета по отношению к статическому); r_j и h_j – радиус и смещение круговой полости j -ого АБУ. Эксцентриситет обойм АБУ описывается через параметры s_j – расстояния между точками C_j и E_j . Будем считать ротор симметричным, если $l_1 = l_2$.

Введены следующие системы координат: $OXYZ$ – неподвижная абсолютная система координат, ось OZ которой направлена по оси, соединяющие центры опор O_1 и O_2 в недеформированном состоянии; $CX_1Y_1Z_1$ – подвиж-

ная невращающаяся система координат с началом в точке C , сонаправленная с осями неподвижной системы $OXYZ$; $Cxyz$ – жестко связанная с ротором система координат. $G\xi\eta\zeta$ – система главных центральных осей инерции ротора; Система $Cxyz$ при повороте на угол χ относительно оси Cy переходит в систему, оси которой сонаправлены главным осям инерции ротора. Угол γ рассматривается в плоскости статического эксцентриситета, а углы γ_j (между отрезком C_jE_j и осью C_jx) – в плоскости j -ого АБУ. Описанная механическая система имеет $(5 + 2n)$ степеней свободы. В качестве обобщенных координат используются: X, Y – абсолютные координаты точки C ; α, β – углы между осью вращения и неподвижными плоскостями XZ и YZ ; θ – угол собственного вращения ротора; ψ_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, 2$) – относительные углы отклонения балансировочных шариков в обоймах АБУ (Рис. 4б).

Предполагается, что в j -ой обойме АБУ шарики имеют одинаковую массу m_j .

Вводя вектор-столбец комплексных переменных $q = \{X + iY, \beta - i\alpha\}^T$, уравнения Лагранжа можно представить в матричной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \mathbf{M}_j) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} - i\dot{\theta} \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = (\dot{\theta}^2 - i\ddot{\theta}) e^{i\theta} (\mathbf{F}_0 + \\ + \sum_{j=1}^2 f_j s_j \mathbf{F}_j e^{i\gamma_j}) + \sum_{j=1}^2 m_j r_j \mathbf{F}_j \sum_{k=1}^n (\dot{\phi}_{kj}^2 - i\ddot{\phi}_{kj}) e^{i\phi_{kj}}, \\ (J_p + m_0 s_0^2) \ddot{\theta} + d_3 \dot{\theta} = M_z + m_0 s_0 \mathbf{K}^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i(\theta+\gamma)}] - \sum_{j=1}^2 (m_j r_j \sum_{k=1}^n (r_j \ddot{\phi}_{kj} - \\ - \mathbf{K}^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i\phi_{kj}}] - s_j f_j \mathbf{K}^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i(\theta+\gamma_j)}])), \\ m_j r_j^2 \ddot{\phi}_{kj} + d_4 (\dot{\phi}_{kj} - \dot{\theta}) + \mathbf{F}_j^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i\phi_{kj}}] = \\ = s_j (\dot{\theta}^2 \sin(\psi_{kj} - \gamma_j) - \ddot{\theta} \cos(\psi_{kj} - \gamma_j)), \quad j = 1, 2; \quad k = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \begin{pmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & J_t \end{pmatrix}, \mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} 1 & h_j \\ h_j & h_j^2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix}, \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} m_0 s_0 e^{i\gamma} \\ -\chi(J_p - J_t) \end{pmatrix}, \mathbf{F}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ h_j \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ d_{11} &= d_1 + d_2, \quad d_{12} = d_2 l_2 - d_1 l_1, \quad d_{22} = d_1 l_1^2 + d_2 l_2^2, \quad c_{11} = c_1 + c_2, \\ c_{12} &= c_2 l_2 - c_1 l_1, \quad c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2, \quad J_t = \tilde{J}_t + \sum_{j=1}^2 J_{t_j}, \quad J_p = \tilde{J}_p + \sum_{j=1}^2 J_{p_j}, \\ \phi_{ij} &= \theta + \psi_{ij}, \quad f_j = p_j + n m_j, \end{aligned}$$

m_0 – масса ротора, \tilde{J}_p, \tilde{J}_t – полярный и экваториальные моменты инерции ротора, p_j – масса обоймы j -ого АБУ, J_{p_j}, J_{t_j} – полярный и экваториальные моменты инерции обоймы j -ого АБУ, d_1, d_2 – коэффициенты демпфирования в опорах, а d_3, d_4, d_5 – коэффициенты диссипации, учитывающие потери энергии при вращении ротора и движении шариков в обоймах АБУ соответственно.

В разделе 2.2 исследуются стационарные режимы для ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью, в виде $a_j e^{i\varphi_j}$, где $a_j = \text{const}$ и $\varphi_j = \text{const}$, $j = 1, 2$

Получено необходимое условие существования сбалансированного стационарного режима ($a_1 = 0, a_2 = 0$):

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= \gamma_1 + \pi k, & \psi_{21} &= \gamma_1 + \pi k, \\ \psi_{12} &= \gamma_2 + \pi k, & \psi_{22} &= \gamma_2 + \pi k, \quad k = 0, 1.\end{aligned}$$

Это условие показывает, что сбалансированный режим может иметь место только при фиксированном положении балансировочных шариков, что означает принципиальную невозможность осуществить на практике полную балансировку ротора с эксцентрически насаженным двуплоскостным АБУ.

Аналогично первой главе, проведена классификация возможных стационарных режимов вращения ротора:

1. Полусбалансированный режим, при котором амплитуды прецессии зависят только от величины эксцентриситета обойм АБУ и от расположения их относительно ротора

$$\begin{aligned}a_1 &= \sqrt{\frac{h_2^2 s_1^2 - 2h_1 h_2 s_1 s_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + h_1^2 s_2^2}{(h_1 - h_2)^2}}, \\ a_2 &= \sqrt{\frac{s_1^2 - 2s_1 s_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + s_2^2}{(h_1 - h_2)^2}}.\end{aligned}\tag{10}$$

2. Несбалансированные режимы, при которых прецессия ротора зависит от скорости его вращения.

Найдены условия существования каждой группы режимов.

Процесс установления полусбалансированного режима при постоянной угловой скорости вращения ротора $\omega = 600 \text{ с}^{-1}$ продемонстрирован на рис. 5 в случае, когда массы шариков $m_1 = m_2 = 0.375 \text{ кг}$. В этом случае амплитуды прецессионного движения стремятся к значениям, определяемым соотношениями (10) и отмеченные на верхних графиках пунктиром.

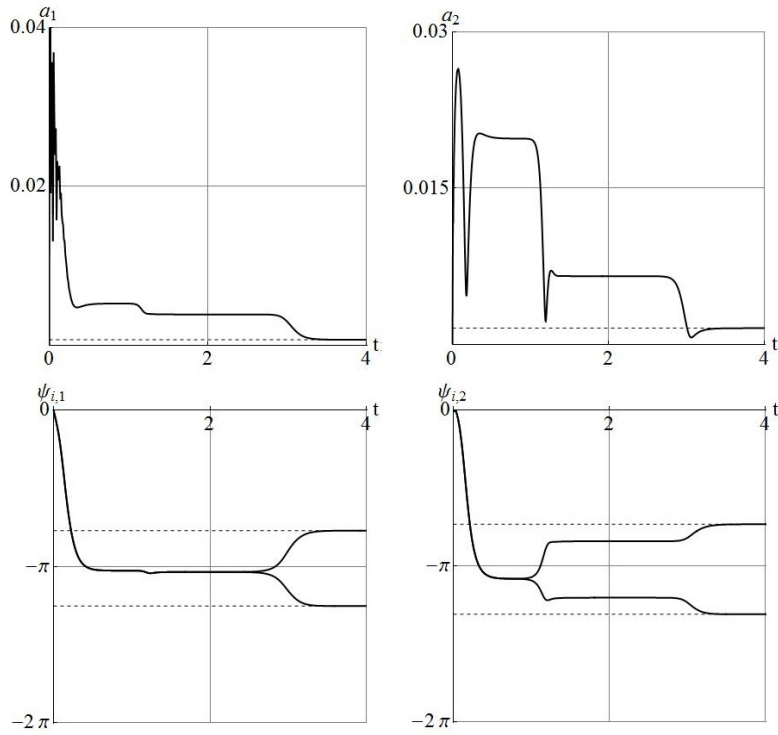


Рис. 5: Процесс установления полусбалансированного режима при вращении с постоянной угловой скоростью

В разделе 2.3 исследуется устойчивость полусбалансированного режима с использованием критерия Рауса. С помощью численных методов показано, что полусбалансированный режим устойчив только в области закритических частот. Построены двухпараметрические диаграммы устойчивости.

В разделе 2.4 исследуются режимы нестационарного прохождения критической области для случаев вращения ротора с постоянным угловым ускорением и постоянным приложенным вращающим моментом.

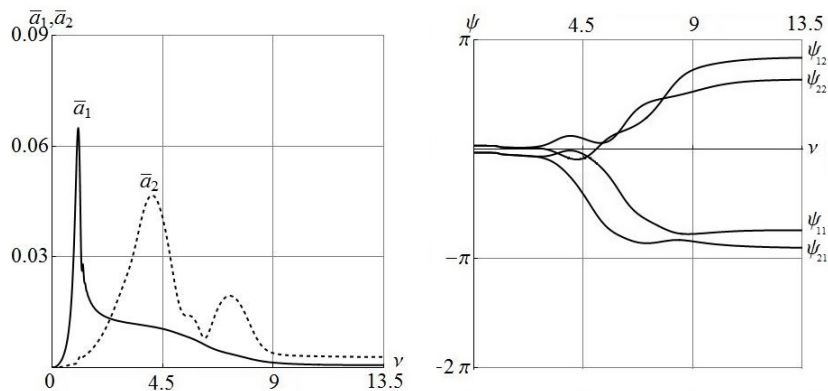


Рис. 6: Прохождение резонансной области симметрично закрепленного ротора с неидеальным АБУ с постоянным угловым ускорением

Рис. 6 демонстрирует процесс установления полусбалансированного режима при разгоне с постоянным угловым ускорением для случая симмет-

рично закрепленного ротора с неидеальным АБУ. При прохождении через первую критическую скорость движение близко к цилиндрической прецессии, так как безразмерная амплитуда \bar{a}_2 мала в сравнении с безразмерной амплитудой \bar{a}_1 , однако при прохождении через вторую критическую скорость наблюдается обратная ситуация и движение близко к конической прецессии.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Выведены точная и приближенная системы уравнений, описывающие динамику статически неуравновешенного ротора, симметрично закрепленного в вертикальных шарнирных опорах и оснащенного одноплоскостным, эксцентрически насаженным шаровым автобалансирующим устройством. Проведено сравнение результатов численных исследований точных и приближенных моделей рассматриваемых систем.
2. В рамках точной модели статически неуравновешенного ротора проведено исследование стационарных режимов и показана практическая неосуществимость полностью сбалансированного режима. Несбалансированный стационарный режим, при котором амплитуда прецессионного движения не зависит от угловой скорости ротора и в точности равна эксцентриситету АБУ, предложено называть полусбалансированным. Выделены три типа несбалансированных стационарных режимов, при которых амплитуда прецессионного движения ротора зависит от его угловой скорости собственного вращения. Найдены условия существования и устойчивости полусбалансированного и несбалансированных режимов с помощью критерия Рауса-Гурвица. Проведено численное исследование нестационарных режимов при постоянном угловом ускорении и приложенном постоянном вращательном моменте.
3. Построена математическая модель динамически неуравновешенного ротора, оснащенного двухплоскостным шаровым автобалансирующим устройством, обоймы которого насажены на вал ротора с некоторым эксцентриситетом.
4. В рамках модели динамически неуравновешенного ротора показана практическая неосуществимость полностью сбалансированного режима, а так же возможность существования режима с постоянной остаточной амплитудой прецессионного движения, не зависящей от угловой скорости. Получена аналитически формула для амплитуды данного (полусбалансированного) режима, зависящая от эксцентриситетов обойм АБУ и их положения относительно ротора. Проведено исследование условий

существования и устойчивости полубалансированного и несбалансированного стационарных режимов с помощью критерия Рауса. Также проведено численное исследование нестационарных режимов вращения при постоянном угловом ускорении и приложенном постоянном вращательном моменте.

5. Проведено численное сравнение результатов исследования точных и приближенных моделей рассматриваемых систем.

Публикации автора по теме диссертации

1. Быков В. Г., Ковачев А. С. Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством // *Вестник Санкт-Петербургского университета, Серия 1: Математика, Механика, Астрономия*. — 2014. — № 4. — С. 579–588.
2. Ковачев А. С. Балансировка динамически неуравновешенного ротора с учетом неидеальности автобалансирующих устройств // *Вестник Санкт-Петербургского университета, Серия 1: Математика, Механика, Астрономия*. — 2015. — № 4. — С. 606–616.
3. Bykov V. G., Kovachev A. S. Dynamics of a rotor with an eccentric ball auto-balancing device // *Vestnik of Saint Petersburg University: Mathematics*. — 2014. — Vol. 47, no. 4. — Pp. 173–180.
4. Bykov V. G., Kovachev A. S. On stability of unbalanced steady-state motions of a rotor with eccentric ball autobalancing device // *Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015 International Conference on*. — DOI:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106720.
5. Bykov V. G., Kovachev A. S. Dynamics of statically unbalanced rotor with eccentric automatic ball balancer // *Book of Abstracts of Eighth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics*. — 2013. — P. 18.
6. Быков В. Г., Ковачев А. С. Об устойчивости стационарных движений ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством // *Седьмые Поляховские чтения. Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, С.-Петербург, 2-6 февраля 2015 г.* — С. 197.