

На правах рукописи

Александров Константин Дмитриевич

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛОСЫ ЗАХВАТА БЕЗ  
ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ  
СИНХРОНИЗАЦИИ

01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика  
05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2016

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научные руководители: доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН,  
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич

кандидат физико-математических наук  
КУЗНЕЦОВ Николай Владимирович

Официальные оппоненты: БУРКИН Игорь Михайлович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Тульский государственный университет,  
заведующий кафедрой математического анализа

СИДОРКИНА Юлия Анатольевна,  
доктор технических наук, доцент,  
Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана,  
доцент кафедры автономных информационных и управ-  
ляющих систем

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образова-  
тельное учреждение высшего образования "Санкт-  
Петербургский политехнический университет Петра  
Великого"

Защита состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ года в \_\_\_ часов на заседании диссертацион-  
ного совета Д 212.232.29 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по  
адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, 10 линия В.О., д. 33/35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-  
Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Уни-  
верситетская наб., 7/9 и на сайте <http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennyye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite>.

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201\_\_ года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.232.29  
доктор физико-математических наук,  
профессор

В. М. Нежинский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Впервые системы фазовой синхронизации (СФС) были описаны в 1920 – 1930-х годах в работах Н. de Bellescize и E.V. Appleton. Принцип работы СФС состоит в подстройке частоты (фазы) подстраиваемого генератора к частоте (фазе) эталонного генератора. Первое широкое распространение СФС относится к 1940-м годам, когда СФС были использованы в телевидении. В настоящее время СФС широко используются в радиотехнике, беспроводных системах связи, системах навигации и компьютерных архитектурах.

Ключевыми характеристиками СФС являются полоса удержания (hold-in range), полоса захвата (pull-in range) и полоса захвата без проскальзывания (lock-in range). В работах Ю.Н. Бакаева, Л.Н. Белюстиной, Н.А. Губарь, М.В. Капранова, Г.А. Леонова, А.А. Ляховкина, В.В. Матросова, В.Д. Шалфеева, В.В. Шахгильдяна, Б.И. Шахтарина, Р.Е. Best, F.M. Gardner, W. Lindsey, A.J. Viterbi и других известных ученых рассматриваются полосы захвата и удержания, получены результаты о локальной и глобальной асимптотической устойчивости математических моделей СФС.

Настоящая работа посвящена изучению полосы захвата без проскальзывания СФС. Концепция полосы захвата без проскальзывания была предложена в 1966 году известным американским инженером IEEE Fellow F.M. Gardner<sup>1</sup>, и соответствует быстрому втягиванию СФС в синхронизм без проскальзывания (внутри одного цикла подстраиваемого генератора). Однако, интуитивно понятное определение полосы захвата без проскальзывания, предложенное F.M. Gardner и получившее широкое распространение<sup>2</sup>, являлось нестрогим и требовало математического уточнения, что было указано F.M. Gardner в 1979 году<sup>3</sup>. Строгое математическое определение, позволяющее эффективно оценивать полосу захвата без проскальзывания с помощью численных методов, было недавно предложено в докторской диссертации Н.В. Кузнецова<sup>4</sup>. Актуальность данной работы по уточнению инженер-

---

<sup>1</sup>F.M. Gardner. Phase-lock techniques, 1st ed. Pub. John Wiley, 1966. *“If, for some reason, the frequency difference between input and VCO is less than the loop bandwidth, the loop will lock up almost instantaneously without slipping cycles. The maximum frequency difference for which this fast acquisition is possible is called the lock-in frequency.”*

<sup>2</sup>F.M. Gardner. Phase-lock techniques, 3rd ed. Wiley, 2005;

R.E. Best. PLL: Design, Simulation, and Applications, 6th ed. McGraw Hill, 2007;

J.L. Stensby. Phase-Locked Loops: Theory and Applications, Taylor & Francis, 1997.

<sup>3</sup>F.M. Gardner. Phase-lock techniques, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1979: *“There is no natural way to define exactly any unique lock-in frequency. <...> despite its vague reality, lock-in range is a useful concept.”*

<sup>4</sup>Н.В. Кузнецов. Аналитико-численные методы исследования скрытых колебаний. Диссертация на соискание ученой степени д. ф.-м. н., Санкт-Петербургский государственный университет, 2016.

ных определений была отмечена известным специалистом R.E. Best<sup>5</sup>, а также в кандидатской диссертации А.А. Тимофеева<sup>6</sup> (научный руководитель – доктор технических наук, профессор Б.И. Шахтарин).

В настоящей работе получены аналитические оценки полосы захвата без проскальзывания СФС на основании ее строгого математического определения с помощью развития классических методов качественного анализа систем дифференциальных уравнений на плоскости.

**Цели работы.** Целью работы является определение полосы захвата и получение численных и аналитических оценок полосы захвата без проскальзывания СФС с идеальным пропорционально-интегрирующим фильтром (ПИФ).

**Методы анализа.** Для анализа полосы захвата СФС в работе применялись методы построения функций Ляпунова. Для оценки полосы захвата без проскальзывания СФС с фильтром первого порядка применялись методы анализа фазовой плоскости, метод малого параметра и методы численного интегрирования.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- Частотный критерий устойчивости СФС с фильтром, передаточная функция которого содержит нулевой полюс кратности один;
- Аналитические оценки зависимости полосы захвата без проскальзывания от параметров СФС для математической модели СФС с идеальным ПИФ и синусоидальными сигналами эталонного и подстраиваемого генераторов;
- Точные аналитические формулы зависимости полосы захвата без проскальзывания от параметров СФС для математической модели СФС с идеальным ПИФ и импульсными сигналами эталонного и подстраиваемого генераторов;
- Программная реализация численного определения полосы захвата без проскальзывания СФС с идеальным ПИФ.

**Достоверность** изложенных в работе теоретических результатов обеспечивается их строгим математическим доказательством. Кроме того, достоверность результатов подтверждается сравнением с ранее известными результатами F.M. Gardner, J.L. Stensby, A.S. Huque и результатами численного моделирования.

<sup>5</sup>R.E. Best, G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop, Annual Reviews in Control, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.arcontrol.2016.08.003>.

<sup>6</sup>А.А. Тимофеев. Импульсная фазовая автоподстройка с высоким быстродействием. Диссертация на соискание ученой степени к.т.н., МГТУ им. Баумана, 2016. (с. 74)

**Научная новизна.** Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

**Практическая ценность.** Полученные в диссертации результаты позволяют определять полосу захвата, оценивать и вычислять полосу захвата без проскальзывания СФС и могут использоваться для анализа и определения рабочих параметров СФС.

**Апробация работы.** Результаты данной работы докладывались на международных конференциях 6th IEEE International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (St. Petersburg, Russia – 2014), 8th Vienna IFAC International Conference on Mathematical Modeling (Vienna, Austria – 2015), 1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems (St. Petersburg, Russia – 2015), 6th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems (Eindhoven, the Netherlands – 2016); на семинарах кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета и семинарах факультета информационных технологий Университета Ювяскюля (University of Jyväskylä, Finland).

На основе полученных в работе результатов были оформлены заявки на патенты [11, 12] и получено свидетельство на программу ЭВМ [13].

Результаты диссертационной работы были получены при поддержке гранта Российского Научного Фонда для поддержки существующих кафедр (14-21-00041), в рамках выполнения проекта Санкт-Петербургского Государственного Университета (6.38.505.2014). Результаты работы вошли в диссертацию на соискание степени Doctor of Philosophy [6], подготовленную при поддержке стипендии Президента РФ для обучения за рубежом студентов и аспирантов российских вузов, и защищенную в Университете Ювяскюля в 2016 году.

**Публикации.** Основные результаты работы представлены в 5 печатных работах [1–5], опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Всего по результатам диссертации автором опубликовано 10 работ [1–10], оформлены и поданы 3 заявки на интеллектуальную собственность [11–13].

В работах [1–4, 8] диссертанту принадлежат формулировка и доказательство теорем о глобальной асимптотической устойчивости СФС, численное моделирование, соавторам принадлежат постановка задачи и остальные результаты. В работе [7] диссертанту принадлежит реализация численного поиска колебаний двумерных систем, соавторам принадлежит постановка задачи и остальные результаты. В работах [5, 9, 10] диссертанту принадлежат вывод оценок полосы захвата без проскальзывания СФС, соавторам принадлежат постановка задачи и остальные результаты. Личный вклад диссертанта

в заявки на интеллектуальную собственность [11–13] составляет 20 процентов.

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации **92** страницы машинописного текста с **20** рисунками. Список литературы содержит **142** наименования.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во Введении** приводится история развития систем фазовой синхронизации (СФС) и методов их исследования. Представлен обзор литературы, обосновывается актуальность и научная новизна диссертационной работы, формулируются проблемы, решаемые в диссертационной работе, показывается практическая значимость полученных результатов, представляются выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** описываются модели классической СФС в пространстве сигналов и в пространстве фаз сигналов, приводятся математические определения ключевых характеристик, описывающих работу СФС – полосы удержания, полосы захвата и полосы захвата без проскальзывания.

### 1. Математические модели СФС.

Рассматривается модель классической СФС в пространстве сигналов, которая изображена на Рис. 1. Данная модель содержит следующие эле-

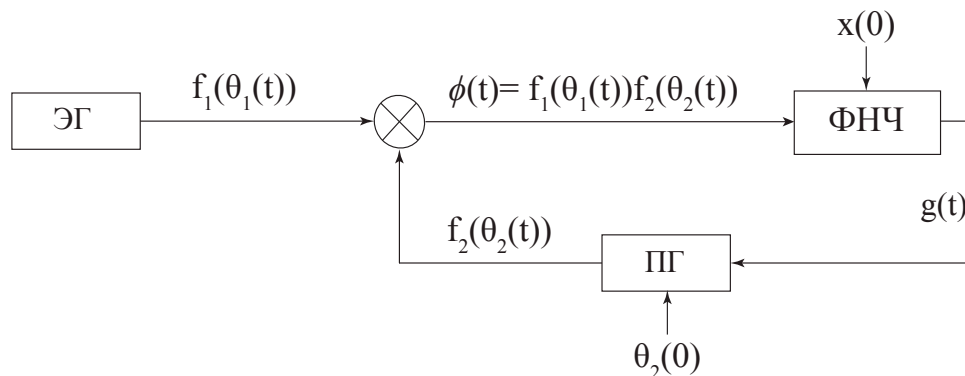


Рис. 1: Модель классической СФС в пространстве сигналов.

менты: эталонный генератор (ЭГ), подстраиваемый генератор (ПГ), фильтр нижних частот (ФНЧ) и аналоговый перемножитель в качестве фазового детектора (ФД). Значение  $\theta_1(0)$  соответствует фазе ЭГ в момент замыкания цепи СФС,  $\theta_2(0)$  – фазе ПГ,  $x(0)$  – состоянию ФНЧ соответственно. Сигналы  $f_1(\theta_1(t))$  и  $f_2(\theta_2(t))$ , генерируемые ЭГ и ПГ соответственно, поступают на входы аналогового перемножителя. Результирующий сигнал  $\phi(t) = f_1(\theta_1(t))f_2(\theta_2(t))$  обрабатывается ФНЧ. Сигнал  $g(t)$ , полученный в результате фильтрации, является корректирующим сигналом частоты ПГ.

Данная математическая модель СФС описывается с помощью системы неавтономных дифференциальных уравнений, и применение аналитических методов для ее изучения является сложной задачей. Следуя классическим подходам, данная модель СФС с помощью методов усреднения может быть сведена к модели СФС в пространстве фаз сигналов (см. Рис. 2), которая описывается с помощью системы автономных дифференциальных уравнений.

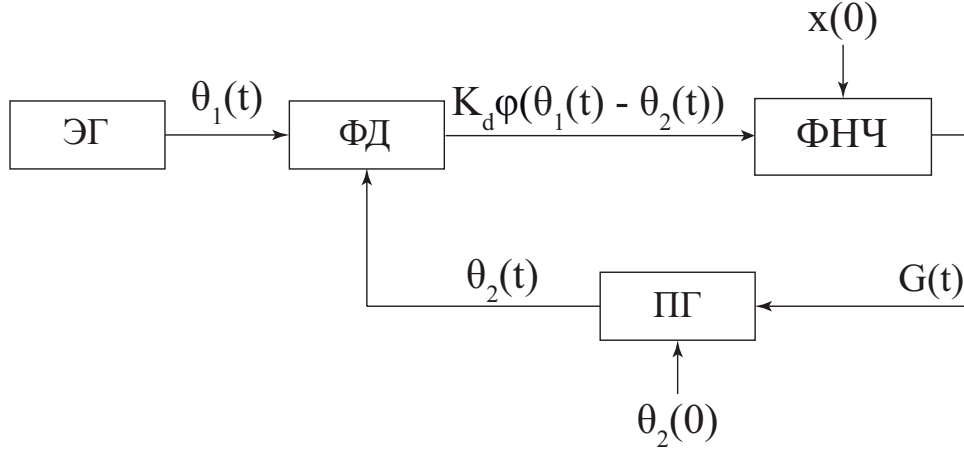


Рис. 2: Модель классической СФС в пространстве фаз сигналов.

ЭГ и ПГ генерируют соответственно фазы  $\theta_1(t)$  и  $\theta_2(t)$ , которые поступают на входы ФД, являющегося нелинейным блоком. Выход ФД  $K_d\varphi(\theta_\Delta(t))$ , который является функцией от разности фаз  $\theta_\Delta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ , называют характеристикой фазового детектора ( $K_d$  является коэффициентом усиления ФД). Важно отметить, что сведение модели СФС в пространстве сигналов к модели СФС в пространстве фаз сигналов приводит, в зависимости от форм сигналов ЭГ и ПГ, к различным формам характеристики ФД  $K_d\varphi(\theta_\Delta)$ .

Выход ФД поступает на вход ФНЧ. Вход ФНЧ  $K_d\varphi(\theta_\Delta(t))$  и выход ФНЧ  $G(t)$  связаны следующим соотношением:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bK_d\varphi(\theta_\Delta(t)), \\ G(t) = c^*x(t) + \rho K_d\varphi(\theta_\Delta(t)), \end{cases} \quad (1)$$

где  $A$  – постоянная  $n \times n$  матрица,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния фильтра,  $b$  и  $c$  – постоянные  $n$ -мерные векторы, а  $\rho$  – число. Передаточная функция ФНЧ имеет вид

$$F(p) = -c^* (A - pI_n)^{-1} b + \rho, \quad p \in \mathbb{C}^1.$$

Корректирующий сигнал  $G(t)$  подстраивает фазу ПГ к фазе ЭГ:

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2^{\text{free}} + K_v G(t), \quad (2)$$

где  $\omega_2^{\text{free}}$  – частота ПГ в разомкнутой цепи, а  $K_v > 0$  – коэффициент усиления ПГ. Кроме того, частота сигнала ЭГ обычно предполагается постоянной:

$$\dot{\theta}_1(t) \equiv \omega_1. \quad (3)$$

Система автономных дифференциальных уравнений, полученная из соотношений (1), (2) и (3), описывает математическую модель классической СФС в пространстве фаз сигналов:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bK_d\varphi(\theta_\Delta), \\ \dot{\theta}_\Delta = \omega_\Delta^{\text{free}} - K_v c^* x - K_v K_d \rho \varphi(\theta_\Delta), \end{cases} \quad (4)$$

где  $\omega_\Delta^{\text{free}} = \omega_1 - \omega_2^{\text{free}}$  называют частотной расстройкой между ЭГ и ПГ.

## 2. Рабочие диапазоны СФС.

Ключевыми характеристиками работы СФС являются полосы удержания, захвата и захвата без проскальзывания, рассмотренные в основополагающих работах А.Ж. Витерби<sup>7</sup>, Ф.М. Gardner<sup>8</sup>, В.В. Шахгильдяна и А.А. Ляховкина<sup>9</sup>. В работе используются соответствующие строгие математические определения<sup>10</sup>.

*Полосой удержания* называется максимальный интервал отклонений частот  $|\omega_\Delta^{\text{free}}| \in [0, \omega_h)$  таких, что математическая модель (4) СФС в пространстве фаз сигналов имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия, которое непрерывно изменяется внутри данного интервала  $[0, \omega_h)$  (иными словами, устойчивые состояния равновесия можно рассматривать как многозначную функцию переменной  $\omega_\Delta^{\text{free}}$  и требовать существования непрерывной ветви для  $|\omega_\Delta^{\text{free}}| \in [0, \omega_h)$ ). Полоса удержания соответствует режиму удержания (режим слежения, tracking process) СФС, в котором при плавном изменении частоты ЭГ СФС автоматически компенсирует расстройку частот и тем самым не выходит из синхронизма.

*Полосой захвата* называется максимальный интервал отклонений частот  $|\omega_\Delta^{\text{free}}| \in [0, \omega_p)$  таких, что математическая модель (4) СФС в пространстве фаз сигналов глобально асимптотически устойчива (то есть любое решение системы (4) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к некоторому состоянию равновесия).

Однако до достижения синхронизма СФС может работать в режиме биений, что характеризуется ростом разности фаз ЭГ и ПГ. Во многих приложениях СФС такой рост нежелателен, и для описания быстрого достижения СФС режима синхронизма без проскальзывания (внутри одного цикла

<sup>7</sup>A.J. Viterbi. Principles of Coherent Communications, McGraw-Hill, 1966.

<sup>8</sup>F.M. Gardner. Phase-lock techniques, 1st ed. Pub. John Wiley, 1966.

<sup>9</sup>В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин. Фазовая автоподстройка частоты, Москва:Связь, 1966.

<sup>10</sup>G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, Vol. 62, № 10, pp. 2454–2464, 2015.



подстраиваемого генератора) используется понятие полосы захвата без проскальзывания. Если

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta_{\Delta}(0) - \theta_{\Delta}(t)| \geq 2\pi,$$

то имеет место *проскальзывание цикла (cycle slipping)*. Для системы (4) с фиксированным значением  $\omega_{\Delta}^{\text{free}}$ , область начальных состояний СФС, для которой синхронизация происходит без проскальзывания цикла, называется *областью притяжения без проскальзывания (the lock-in domain)*,  $D_{\text{lock-in}}(\omega_{\Delta}^{\text{free}})$ .

*Полосой захвата без проскальзывания* называется максимальный интервал отклонений частот такой, что для каждого отклонения частоты  $|\omega_{\Delta}^{\text{free}}| \in [0, \omega_l)$  модель (4) является глобально асимптотически устойчивой и область

$$D_{\text{lock-in}}((-\omega_l, \omega_l)) = \bigcap_{|\omega_{\Delta}^{\text{free}}| < \omega_l} D_{\text{lock-in}}(\omega_{\Delta}^{\text{free}})$$

содержит все асимптотически устойчивые состояния равновесия системы (4), соответствующие  $\omega_{\Delta}^{\text{free}} \in (-\omega_l, \omega_l)$ . Граница полосы захвата без проскальзывания  $\omega_l$  называется *частотой захвата без проскальзывания (lock-in frequency)*.

**Вторая глава** посвящена изучению полосы захвата СФС. Проведено доказательство теорем о глобальной асимптотической устойчивости СФС, и приведены примеры применения доказанных теорем для СФС с ФНЧ первого порядка.

Для анализа глобальной асимптотической устойчивости СФС рассматривается следующая запись системы (4):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\theta_{\Delta}), \\ \dot{\theta}_{\Delta} = \omega_{\Delta}^{\text{free}} + c^*x + \rho\varphi(\theta_{\Delta}) \end{cases} \quad (5)$$

с передаточной функцией

$$W(p) = c^* (A - pI_n)^{-1} b - \rho, \quad p \in \mathbb{C}^1.$$

Система (5) получается из системы (4) с помощью переобозначений

$$c \rightarrow -\frac{c}{K_v}, \quad \rho \rightarrow -\frac{\rho}{K_d K_v}, \quad b \rightarrow \frac{b}{K_d}.$$

**1. Доказана следующая теорема** о глобальной асимптотической устойчивости СФС с передаточной функцией ФНЧ, которая содержит нулевой полюс кратности один, и  $2\pi$ -периодической кусочно-однозначной функцией  $\varphi(\theta_{\Delta})$ , для которой однозначная кусочно-непрерывная функция  $\psi(\theta_{\Delta})$ ,

совпадающая с  $\varphi(\theta_\Delta)$  во всех точках ее однозначности удовлетворяет следующим свойствам:

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta_\Delta) d\theta_\Delta = 0;$$

для любого  $\theta_\Delta^0 \in (-\infty, +\infty)$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\int_{\theta_\Delta^0}^{\theta_\Delta^0 + \delta} \psi(\theta_\Delta) d\theta_\Delta \neq 0 \quad \text{для } \theta_\Delta \in (\theta_\Delta^0 - \delta, \theta_\Delta^0 + \delta) \text{ и } \theta_\Delta \neq \theta_\Delta^0. \quad (6)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $\varphi(\theta_\Delta)$  системы (5) является  $2\pi$ -периодической кусочно-однозначной функцией и удовлетворяет свойствам (6), и передаточная функция  $W(p)$  системы (5) невырождена, имеет нулевой полюс кратности 1, а остальные  $(n - 1)$  полюсов передаточной функции  $W(p)$  имеют отрицательную вещественную часть.

Если существует  $\beta$  такое, что выполнены условия:

(i)  $\beta \operatorname{Re} [W(i\omega)] > 0, \forall \omega \in (-\infty, +\infty);$

(ii)  $\beta \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega^2 \operatorname{Re} [W(i\omega)] > 0;$

(iii)  $\beta \operatorname{Re} [i\omega W(i\omega)] \Big|_{\omega=0} > 0,$

то для произвольного фиксированного значения  $\omega_\Delta^{\text{free}}$  система (5) глобально асимптотически устойчива.

В качестве примера применения Теоремы 1 рассматривается СФС с идеальным ПИФ первого порядка и доказывается, что ее полоса захвата бесконечна.

Для случая, когда матрица  $A$  системы (5) – неособая и  $W(0) \neq 0$ , рассматривается следующая запись системы (5):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\theta_\Delta), \\ \dot{\theta}_\Delta = c^*x + \rho\varphi(\theta_\Delta), \end{cases} \quad (7)$$

полученная с помощью преобразований

$$x \rightarrow x - \frac{A^{-1}b\omega_\Delta^{\text{free}}}{c^*A^{-1}b - \rho}, \quad \varphi(\theta_\Delta) \rightarrow \varphi(\theta_\Delta) + \frac{\omega_\Delta^{\text{free}}}{c^*A^{-1}b - \rho}.$$

**2. Доказана следующая теорема** о глобальной асимптотической устойчивости СФС.

**Теорема 2.** Пусть функция  $\varphi(\theta_\Delta)$  системы (7) является  $2\pi$ -периодической непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией, которая имеет два нуля  $\theta_\Delta^{1,2} \in [0, 2\pi)$  и дифференцируема в точках  $\theta_\Delta^{1,2}$ , причем  $\varphi'(\theta_\Delta^1) > 0$ ,

$\varphi'(\theta_\Delta^2) < 0$ . Пусть кроме того  $W(0) \neq 0$ , и существует число  $\lambda > 0$  такое, что все собственные значения матрицы  $(A + \lambda I)$  имеют отрицательные вещественные части и

$$|\varphi'(\theta_\Delta)| |K(i\omega - \lambda)| < \lambda, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta_\Delta \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Тогда система (7) является глобально асимптотически устойчивой.

В качестве примера применения Теоремы 2 выводятся известные необходимые и достаточные условия совпадения полос захвата и удержания СФС с интегрирующим ФНЧ первого порядка, приведенные в работе В.В. Шахгильдяна и А.А. Ляховкина<sup>11</sup>.

**В третьей главе** для СФС с идеальным ПИФ для синусоидальной и треугольной характеристик ФД приведены численные и аналитические оценки полосы захвата без проскальзывания, полученные с помощью развития методов анализа фазовой плоскости, основы которых были заложены в работах F. Tricomi<sup>12</sup> и А.А. Андропова<sup>13</sup>.

### 1. Вычисление полосы захвата без проскальзывания

Для случая идеального ПИФ, которому соответствует передаточная функция  $F(p) = \frac{1+\tau_2 p}{\tau_1 p}$  (где  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ), система (4) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = K_d \varphi(\theta_\Delta), \\ \dot{\theta}_\Delta = \omega_\Delta^{\text{free}} - \frac{K_v}{\tau_1} (x + \tau_2 K_d \varphi(\theta_\Delta)). \end{cases} \quad (9)$$

В результате линейного преобразования  $x \rightarrow K_d x$  система (9) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(\theta_\Delta), \\ \dot{\theta}_\Delta = \omega_\Delta^{\text{free}} - \frac{K_0}{\tau_1} (x + \tau_2 \varphi(\theta_\Delta)), \end{cases} \quad (10)$$

где  $K_0 = K_v K_d$  называют коэффициентом усиления СФС.

Рассматриваются следующие формы характеристики ФД:

$$\varphi(\theta_\Delta) = \sin(\theta_\Delta),$$

которая соответствует синусоидальным сигналам ЭГ и ПГ, и

$$\varphi(\theta_\Delta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \theta_\Delta - 4n, & \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \theta_\Delta(t) \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ -\frac{2}{\pi} \theta_\Delta + 2 + 4n, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \theta_\Delta(t) \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

<sup>11</sup>В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин. Системы фазовой автоподстройки частоты, Москва: Связь, 1972.

<sup>12</sup>F. Tricomi. Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. 2, № 2, 1933.

<sup>13</sup>А.А. Андронов, (А.А. Витт), С.Е. Хайкин. Теория колебаний, ОНТИ НКТП СССР, 1937.

которая соответствует импульсным сигналам ЭГ и ПГ.

Для произвольного  $\omega_{\Delta}^{\text{free}}$  состояния равновесия

$$(\theta_{eq}^s + 2\pi n, x_{eq}(\omega_{\Delta}^{\text{free}})) = \left(2\pi n, \frac{\omega_{\Delta}^{\text{free}} \tau_1}{K_0}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

системы (10) являются асимптотически устойчивыми, а состояния равновесия

$$(\theta_{eq}^u + 2\pi n, x_{eq}(\omega_{\Delta}^{\text{free}})) = \left(\pi + 2\pi n, \frac{\omega_{\Delta}^{\text{free}} \tau_1}{K_0}\right), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

являются неустойчивыми седловыми состояниями равновесия.

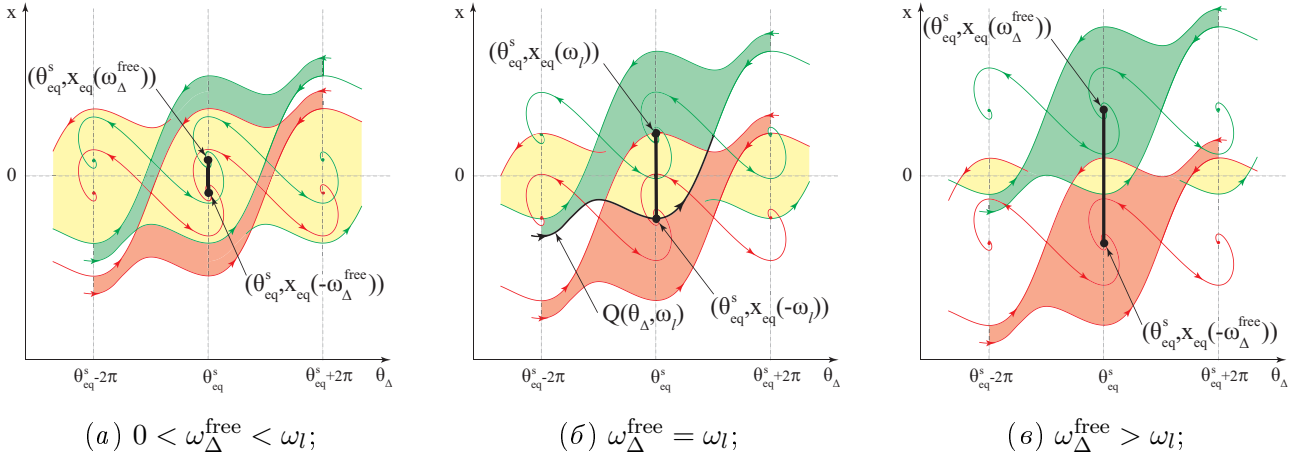


Рис. 3: Примеры области  $D_{\text{lock-in}}((-\omega_{\Delta}^{\text{free}}, \omega_{\Delta}^{\text{free}}))$  (светлая область) для синусоидальной характеристики ФД.

Согласно определению полосы захвата без проскальзывания, ей соответствует такое максимальное значение частотного отклонения  $\omega_l$ , что множество асимптотически устойчивых состояний равновесия

$$\theta_{\Delta} = \theta_{eq}^s + 2\pi n, \quad -\frac{\tau_1 \omega_l}{K_0} < x < \frac{\tau_1 \omega_l}{K_0}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

соответствующих  $\omega_{\Delta}^{\text{free}} \in (-\omega_l, \omega_l)$ , содержится внутри  $D_{\text{lock-in}}((-\omega_l, \omega_l))$  (см. Рис. 3).

Критический случай, соответствующий границе  $\omega_l$  полосы захвата без проскальзывания, представлен на Рис. 3б и описывается следующим соотношением:

$$x_{eq}(-\omega_l) = Q(\theta_{eq}^s, \omega_l), \quad (12)$$

где  $Q(\theta_{\Delta}, \omega_l)$  является сепаратрисой неустойчивого седлового состояния равновесия  $(\theta_{eq}^u, x_{eq}(\omega_l))$  (см. Рис. 3б). В силу того, что линейное преобразование  $x \rightarrow x + \frac{\tau_1 \omega_{\Delta}^{\text{free}}}{K_0}$  вертикально сдвигает фазовые траектории системы (10), справедливо

$$-\frac{\omega_l}{K_0/\tau_1} = \frac{\omega_l}{K_0/\tau_1} + Q(\theta_{eq}^s, 0) \Rightarrow \omega_l = -\frac{K_0 Q(\theta_{eq}^s, 0)}{2\tau_1}. \quad (13)$$

**2. Доказана теорема** об аналитическом приближении полосы захвата без проскальзывания СФС с идеальным ПИФ и синусоидальной формой характеристики ФД.

**Теорема 3.** Пусть  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $K_0 > 0$ ,  $0 < \tau_2/\tau_1 \ll 1$  и  $\varphi(\theta_\Delta) = \sin(\theta_\Delta)$ . Для частоты захвата без проскальзывания системы (10) справедливы следующие соотношения:

$$\omega_l = \omega_{l1} + O\left((\tau_2/\tau_1)^2\right) = \omega_{l1} + \omega_{l2} + O\left((\tau_2/\tau_1)^3\right), \quad (14)$$

$$\text{где } \omega_{l1} = \sqrt{K_0/\tau_1} + \frac{K_0\tau_2}{3\tau_1}, \omega_{l2} = \frac{K_0\tau_2^2(5 - 6 \ln 2)}{18\tau_1} \sqrt{K_0/\tau_1}.$$

Также в диссертации с помощью методов численного интегрирования получены оценки частоты захвата без проскальзывания. На Рис. 4 приведен пример сравнения аналитических оценок (14) и численных оценок частоты захвата без проскальзывания для значения  $\frac{K_0}{\tau_1} = 1$  и параметра  $\tau_2 \in [0, 1]$ . Оценки сепаратрисы  $Q(\theta_\Delta, \omega_\Delta^{\text{free}})$ , приведенные в работах F.M. Gardner, J.L. Stensby и A.S. Nique также подтверждают достоверность аналитических оценок, полученных в Теореме 3.

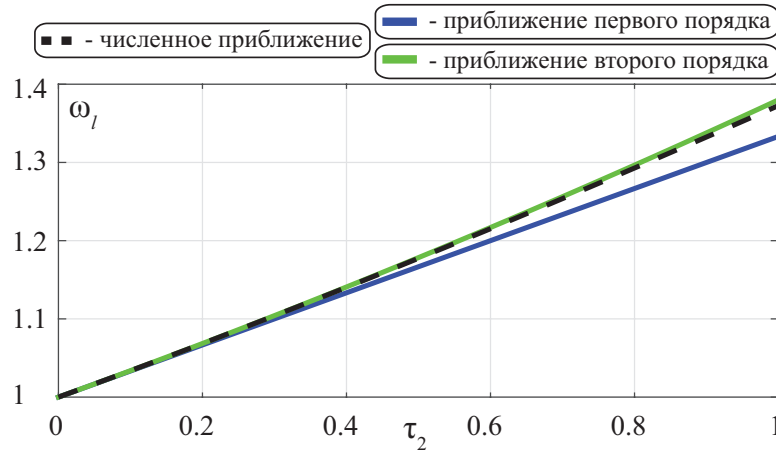


Рис. 4: Сравнение численных и аналитических оценок (14) частоты захвата без проскальзывания  $\omega_l$  системы (10) при  $\frac{K_0}{\tau_1} = 1$ .

**3. Доказана теорема** о точном значении полосы захвата без проскальзывания СФС с идеальным ПИФ и непрерывной кусочно-линейной формой характеристики ФД

$$\varphi(\theta_\Delta) = \begin{cases} k\theta_\Delta - 2\pi kn, & \text{если } -\frac{1}{k} + 2\pi n \leq \theta_\Delta(t) \leq \frac{1}{k} + 2\pi n, \\ -\frac{k}{\pi k - 1}\theta_\Delta + \frac{k}{\pi k - 1}(\pi + 2\pi n), & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \theta_\Delta(t) \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

**Теорема 4.** Обозначим  $a = \frac{\tau_2}{\tau_1}$ ,  $b = \frac{1}{\tau_1}$ . Точное значение частоты захвата без проскальзывания системы (10) с  $\varphi(\theta_\Delta)$  вида (15), определяется из следующих соотношений:

(i) если  $(aK_0)^2 - 2bK_0\pi > 0$ :

$$\omega_l = \frac{1}{2}c_1\sqrt{(aK_0k)^2 - 4bK_0k} \left(-\frac{c_2}{c_1}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{aK_0k}{2\sqrt{(aK_0k)^2 - 4bK_0k}}\right), \text{ где} \quad (16)$$

$$c_1 = \left(\frac{\sqrt{(aK_0)^2 + 4bK_0(\pi - \frac{1}{k})}}{2k\sqrt{(aK_0)^2 - \frac{4bK_0}{k}}} + \frac{1}{2k}\right), \quad c_2 = \left(\frac{1}{2k} - \frac{\sqrt{(aK_0)^2 + 4bK_0(\pi - \frac{1}{k})}}{2k\sqrt{(aK_0)^2 - \frac{4bK_0}{k}}}\right);$$

(ii) если  $(aK_0)^2 - 2bK_0\pi = 0$ :

$$\omega_l = \frac{1}{2}c_2 e^{\left(\frac{aK_0}{2c_2}\right)}, \text{ где } c_2 = \frac{\sqrt{(aK_0)^2 + 4bK_0(\pi - \frac{1}{k})}}{2}; \quad (17)$$

(iii) если  $(aK_0)^2 - 2bK_0\pi < 0$ :

$$\omega_l = -\frac{aK_0k e^{(t_0 \operatorname{Re} \lambda_1^s)}}{4} (c_1 \cos(t_0 \operatorname{Im} \lambda_1^s) + c_2 \sin(t_0 \operatorname{Im} \lambda_1^s)) +$$

$$+ \frac{e^{(t_0 \operatorname{Re} \lambda_1^s)} \sqrt{4bK_0k - (aK_0k)^2}}{4} (c_2 \cos(t_0 \operatorname{Im} \lambda_1^s) - c_1 \sin(t_0 \operatorname{Im} \lambda_1^s)), \quad (18)$$

$$\text{где } t_0 = \frac{\operatorname{arctg}\left(-\frac{c_1}{c_2}\right)}{\operatorname{Im} \lambda_1^s}, \quad \lambda_1^s = \frac{-aK_0k + i\sqrt{4bK_0k - (aK_0k)^2}}{2},$$

$$c_1 = \frac{1}{k}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{(aK_0)^2 + 4bK_0(\pi - \frac{1}{k})}}{k\sqrt{\frac{4bK_0}{k} - (aK_0)^2}}.$$

Случай  $k = \frac{2}{\pi}$  соответствует случаю треугольной формы характеристики ФД. На Рис. 5 для набора значений  $\tau_2 = 0, 0.1, \dots, 1$  и параметра  $\frac{K_0}{\tau_1} \in (0, 10^4)$  приведены диаграммы для вычисления частоты захвата без проскальзывания, полученные на основании Теоремы 4, и их достоверность подтверждается численным моделированием. Для прочих значений  $\tau_2$  диаграммы строятся аналогичным образом в соответствии с соотношениями (16), (17) и (18).

**В заключении** представлены основные результаты работы.

**В приложении** представлен компьютерный код алгоритмов вычисления частоты захвата без проскальзывания СФС с идеальным ПИФ первого

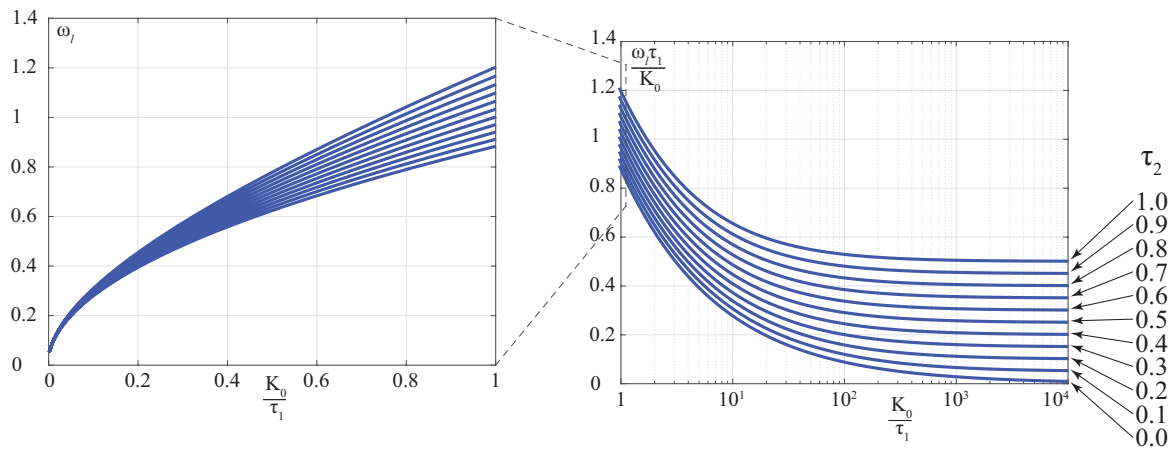


Рис. 5: Диаграммы для вычисления частоты захвата без проскальзывания системы (10) с треугольной характеристикой ФД.

порядка с помощью численных методов интегрирования, с помощью известных оценок, с помощью полученных в диссертации оценок.

## Публикации автора по теме диссертации

Статьи по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. *Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M.* Best's conjecture on pull-in range of two-phase Costas loop // 6th IEEE International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2015. Vol. 2015-January. P. 78–82.
2. *Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmäki P., Seledzhi S.M.* Pull-in range of the classical PLL with impulse signals // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, № 1. P. 562 – 567.
3. *Леонов Г.А., Александров К.Д.* Частотные критерии глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации // *Доклады Академии Наук*. 2015. Т. 465, №.6. С. 656–659.
4. *Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmäki P., Seledzhi S.M.* Pull-in range of the PLL-based circuits with proportionally-integrating filter // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, № 11. P. 720–724.
5. *Aleksandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V.* Computation of the Lock-In Ranges of Phase-Locked Loops with PI Filter // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49, № 14. P. 36–41.

Монографии:

6. *Aleksandrov K.D.* Phase-Locked Loops with Active PI Filter: the Lock-In Range Computation. Jyväskylä University Printing House. 2016.

Другие публикации:

7. *Leonov G.A., Burova I.G., Aleksandrov K.D.* Vizualization of two-dimensional quadratic systems in the parameter space // *Differential Equations*. 2013. Vol. 49, № 13. P. 1675–1703.
8. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Александров К.Д.* Двухфазная схема Костаса и гипотеза Беста // Материалы Всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК–2014. СПб.:ВВМ, 2014. С. 437–441.
9. *Aleksandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V.* Lock-in range of PLL-based circuits with proportionally-integrating filter and sinusoidal phase detector characteristic // *arXiv preprint arXiv:1603.08401*. 2016.
10. *Aleksandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V.* Lock-in range of classical PLL with impulse signals and proportionally-integrating filter // *arXiv preprint arXiv:1603.09363*. 2016.

Патенты и свидетельства:

11. *Александров К.Д., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* Заявка на выдачу патента РФ на изобретение. Способ для определения границ рабочего диапазона импульсного генератора систем фазовой синхронизации и устройство для его реализации. 2016. Рег. № 2016136074.
12. *Александров К.Д., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* Заявка на выдачу патента РФ на полезную модель. Регистратор рабочего диапазона систем. цифровой связи. 2016. Рег. № 2016136140.
13. *Александров К.Д., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* Свидетельство на программу для ЭВМ. Программа для вычисления рабочего диапазона систем фазовой синхронизации на этапе проектирования (LPC). 2016. № 2016613336.