

На правах рукописи



Томилова Ирина Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЕКОВЫХ РЕЗОНАНСОВ НА ДОЛГО-  
ВРЕМЕННУЮ ОРБИТАЛЬНУЮ ЭВОЛЮЦИЮ  
ОКОЛОЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

01.03.01 – астрометрия и небесная механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2015

Работа выполнена в Томском государственном университете

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук, профессор  
Бордовицына Татьяна Валентиновна

**Официальные оппоненты:**

Питьева Елена Владимировна  
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
заведующая лабораторией Института прикладной астрономии РАН

Шайдулин Вахит Шамильевич  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры небесной механики Санкт-Петербургского государственного  
университета

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт астрономии  
Российской академии наук

Защита состоится 6 октября 2015 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.15 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 2143.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте

<http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite/details/12/465>.

Автореферат разослан

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета



Миланова Ю.В.

## Общая характеристика работы

### Актуальность проблемы

По данным НАСА (<http://www.nasa.gov>) в настоящее время в околоземном пространстве находится около 20000 объектов размером от 10 см и более. Вся эта масса неуправляемых объектов движется по законам небесной механики в сложном поле сил, определяемом гравитационным влиянием Земли, Луны и Солнца, и постоянно создает опасность столкновения с функционирующими объектами. Важным, но недостаточно изученным, возмущающим фактором в движении околоземных объектов являются вековые резонансы. Вековые резонансы – это наличие соизмеримости между скоростями изменения долготы перицентра и долготы восходящего узла спутника с одной из собственных частот третьего тела (Луны или Солнца), к которым относятся среднее движение третьего тела и скорости изменения их долгот перицентра и восходящего узла.

Характерной особенностью влияния ряда вековых резонансов является возрастание эксцентриситета орбиты объекта, что существенным образом меняет положение орбиты в пространстве. В результате орбита отработавшего объекта становится отличной от номинальной, что может приводить к столкновениям отработавших объектов с функционирующими. Кроме того, при наложении резонансов, как мы покажем в дальнейшем, может возникать хаотичность в движении объектов.

Из всего сказанного следует, что исследование влияния вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов является актуальным.

### Степень разработанности

Проблема влияния вековых резонансов на орбитальную эволюцию малых тел не нова. Первые исследования в этом направлении были сделаны для искусственных спутников Земли (ИСЗ) М.Л. Лидовым (1961) в рамках двукратно осредненной задачи и в предположении, что влияние третьего тела ограничивается задачей Хилла. Аналогичные результаты для астероидов были получены почти одновременно Ё. Козаи (1962).

В общем виде классификация основной части вековых резонансов в движении ИСЗ была дана Дж. Куком (1962).

М.Л. Лидовым (1962) были построены вековые эволюционные уравнения путем двукратного осреднения возмущающей функции по средним аномалиям спутника и возмущающего тела. М.Л. Лидовым и М.В. Ярской (1974) для этой системы уравнений исследованы некоторые интегрируемые случаи.

В 1980 – 81 гг. вышли работы С. Хьюза, в которых давалось теоретическое описание явления. В этих работах впервые было показано, что правая часть векового уравнения для эксцентриситета зависит от долготы перицентра, а влияние вековых резонансов тем значительнее, чем больше эксцентриситет и большая полуось орбиты объекта. Кроме того, были выделены резонансные соотношения, которые зависят только от наклона орбиты спутника и даны значения наклонов, для которых влияние каждого из

указанных резонансов должно быть максимальным. Следует отметить также, что С. Хьюз впервые указал на возможность использования численного моделирования в задачах исследования вековых резонансов.

В 1994 г. в обширной работе Дж. Джакалья в рамках аналитической теории были рассмотрены пять резонансов из классификации Дж. Кука, которые не связаны со средним движением третьего тела. Исследованию вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела, посвящены работы С. Брейтера (1999 – 2001). Этим же автором рассмотрены особенности движения объекта в случае наложения двух вековых резонансов и методом сечений Пуанкаре показано, что это приводит к возникновению хаоса в долговременной орбитальной эволюции.

Все перечисленные выше работы выполнены аналитическими методами в рамках однократно и двукратно осредненных задач в предположении, что влияние третьего тела ограничено задачей Хилла, а третье тело движется по невозмущенной круговой орбите.

В последние десять лет интерес к проблеме влияния вековых резонансов на орбитальную эволюцию околоземных объектов возрос в связи с изучением особенностей долговременной орбитальной эволюции отработавших объектов спутниковых радионавигационных систем (СРНС). В первых двух работах (Chao, Gick, 2004; Rossi, 2008), выполненных в указанном направлении, были впервые применены совместно аналитический и численный подходы к исследованию проблемы, однако модель движения третьего тела была выбрана той же, что и у предшествовавших авторов. Основное внимание в этих работах было уделено объектам системы GPS и будущей системы ГАЛИЛЕО. Таким образом, исследования требовали продолжения, как по линии уточнения методики, так и по линии расширения состава исследуемых объектов.

### **Цели и задачи работы**

Целью данной работы было построение численно-аналитической методики выявления и анализа вековых резонансов и исследование влияния вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов.

Для реализации этой цели были решены следующие задачи:

- построена численно-аналитическая методика выявления и исследования вековых резонансов, причем в аналитической части методики в качестве модели движения третьего тела использован эллипс с вращающимися линиями апсид и узлов, а для исследования орбитальной эволюции объектов использована высокоточная численная модель движения систем ИСЗ;
- выписаны все производные резонансных аргументов, способные приводить к возникновению вековых резонансов низких порядков;
- выявлены особенности динамической эволюции под действием вековых резонансов отработавших объектов спутниковых радионавигационных систем ГЛОНАСС, GPS, BEIDOU IGSO и рассмотрена проблема утилизации объектов системы ГЛОНАСС;
- сделана оценка распространенности вековых резонансов в околоземном орби-

тальном пространстве, выделены области орбитального пространства, где влияние ряда вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию объектов значительно;

- проведен MEGNO-анализ орбитальной эволюции объектов, подверженных одновременно влиянию нескольких резонансов, для определения условий возникновения хаотичности в их движении.

### **Научная новизна работы**

Научная новизна работы состоит в следующем:

- разработана численно-аналитическая методика выявления и исследования вековых резонансов; в аналитической части методики используется более полная, чем в работах других авторов, модель движения третьего тела, а именно, эллипс с вращающимися линиями апсид и узлов, такой подход оказался полезным при исследовании динамики приполярных объектов; для численного исследования влияния вековых возмущений применяется численная модель движения систем ИСЗ, обеспечивающая высокую точность прогнозирования движения на больших интервалах времени;

- изучена динамическая эволюция отработавших объектов СРНС ГЛОНАСС, GPS и BEIDOU IGSO, показано, что влияние вековых резонансов существенно меняет характер движения этих объектов;

- оценена возможность использования влияния вековых резонансов для выбора орбит отработавших объектов, реально приводящих к их утилизации;

- получены сведения о распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве;

- определены условия возникновения хаотичности в движении объектов при наложении резонансов различных типов.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Разработана более полная по сравнению с существующими (Chao, Gick, 2004; Rossi, 2008) численно-аналитическая методика выявления и исследования влияния вековых резонансов на орбитальную эволюцию околоземных объектов. Применение этой методики позволило увеличить перечень резонансных соотношений низких порядков, многие из которых оказались значимы для эволюции объектов на приполярных орбитах.

Проанализирована степень распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве и выявлены области этого пространства, где эти резонансы сохраняют устойчивые конфигурации и их влияние особенно существенно.

Исследовано влияния вековых резонансов на орбитальную эволюцию отработавших объектов СРНС, которое показало, что объекты всех существующих и разрабатываемых навигационных систем подвержены влиянию большого количества вековых резонансов, и это необходимо учитывать при выборе параметров орбит утилизации. В работе приведен подбор возможных орбит утилизации для объектов системы ГЛОНАСС.

## **Методология и методы исследования**

Методологией исследования являются законы динамики небесных тел, а в качестве основного метода исследования используется численно-аналитическое моделирование. Исследование влияния вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов проводилось при помощи численно-аналитической методики, состоящей из следующих этапов:

- вычисление частот вековых возмущений аналитическим способом;
- численное моделирование долговременной орбитальной эволюции при помощи программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ»;
- численное исследование эволюции во времени резонансных аргументов, построение динамических портретов вековых резонансов;
- MEGNO-анализ орбитальной эволюции.

## **Положения, выносимые на защиту**

- предложенная численно-аналитическая методика выявления вековых резонансов и исследования их влияния на движение неуправляемых околоземных космических объектов существенно расширяет возможности исследования;
- результаты исследования долговременной динамической эволюции обработанных объектов СРНС показывают, что под действием вековых резонансов основные элементы орбит объектов, особенно эксцентриситет, претерпевают значительные долгопериодические изменения, что налагает ограничения на способы утилизации объектов;
- оценки распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве, позволяют утверждать, что область наибольшего влияния вековых резонансов начинается от значений большой полуоси 20000 км и наклонов  $45^\circ$ , особенно значительно это влияние на высоких приполярных орбитах;
- хаотичность орбитального движения объектов возникает при наложении вековых и орбитального резонансов, а также при наложении на устойчивый вековой резонанс одного или нескольких резонансов, для которых критический аргумент меняет либрационный характер изменения на циркуляционный и обратно.

## **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность полученных результатов подтверждается данными 20-летних наблюдений эволюции орбит ИСЗ Эталон-1 и -2, а также данными об эволюции обработанных объектов системы GPS.

По результатам исследований опубликовано 20 работ (Александрова, Томилова, Бордовицына, 2014; Бордовицына и др., 2009; Бордовицына, Томилова, 2011; Бордовицына, Томилова, Чувашов, 2011; Бордовицына, Томилова, Чувашов, 2012; Бордовицына, Томилова, 2013а; Бордовицына, Томилова, 2013b; Бордовицына, Томилова, 2013с; Бордовицына, Томилова, Чувашов, 2014; Бордовицына, Томилова, 2014а; Бордовицына, Томилова, 2014b; Бордовицына, Томилова, 2015; Томилова, Бордовицына, 2010; Томи-

лова, 2011; Томилова, Бордовицына, 2012; Томилова, Чувашов, 2012; Томилова, Чувашов, Бордовицына, 2012; Томилова, 2013; Томилова, Чувашов, Бордовицына, 2013а; Томилова, Бордовицына, Чувашов, 2013b), из них 12 в изданиях, рекомендуемых ВАК для публикации научных работ.

Результаты работы вошли в список важнейших достижений астрономических учреждений России за 2014 г. по тематике секции 17 «Небесная механика» Научного Совета РАН по астрономии.

Полученные результаты докладывались на 12 научных конференциях:

1. «Математическое и физическое моделирование опасных природных явлений и техногенных катастроф». Всероссийская научная конференция с участием зарубежных ученых (г. Томск, 18 – 20 октября 2010 г.).

2. «Физика космоса». 40-я международная студенческая научная конференция (г. Екатеринбург, 31 января – 4 февраля 2011 г.).

3. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». VII Всероссийская конференция посвященная 50-летию полета Ю.А. Гагарина и 90-летию со дня рождения основателя и первого директора НИИ ПММ ТГУ А.Д. Колмакова (г. Томск, 12 – 14 апреля 2011 г.).

4. «Околоземная астрономия». Международная конференция (г. Красноярск, 5 – 10 сентября 2011 г.).

5. «Современные проблемы прикладной математики и информатики». Международная молодежная конференции в рамках Фестиваля науки (г. Томск, 19 – 21 сентября 2012 г.).

6. «Математическое и физическое моделирование опасных природных явлений и техногенных катастроф». Всероссийская научная конференция (г. Томск, 23 – 25 мая 2012 г.).

7. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». VIII-я всероссийская научная конференция (г. Томск, 22 – 26 апреля 2013 г.).

8. «Многоликая Вселенная». Всероссийская астрономическая конференция (г. Санкт-Петербург, 23 – 27 сентября 2013 г.).

9. Всероссийская конференция по математике и механике (с международным участием) (г. Томск, 2 – 4 октября 2013 г.).

10. «Околоземная астрономия-2013». Международная конференция (г. Краснодар, 7 – 11 октября 2013 г.).

11. IAU-Symposium: Complex Planetary Systems (Бельгия, г. Намюр, 7 – 11 июля 2014 г.).

12. «Актуальные проблемы современной механики сплошных и небесной». IV Всероссийская молодежная научная конференция (г. Томск, 8 – 10 ноября 2014 г.)

Представленные в диссертации результаты включены в отчеты по проектам:

1. № 11-02-00918-а «Создание и применение методов исследования околопланетной динамики малых космических объектов» (РФФИ);

2. № П1247 «Развитие методов решения сложных задач динамики малых тел Солнечной системы» (ФЦП);

3. № П882 «Развитие методов моделирования и прогнозирования опасных тесных сближений объектов космического мусора и астероидов с Землей и космическими аппаратами» (ФЦП);

4. № 2.1.2/2629 «Развитие и применение основанных на параллельных вычислениях математических моделей сложных космических систем естественного и искусственного происхождения» (АВЦП);

5. № 2.4024.2011 «Исследование динамики сложных взаимодействий естественных и искусственных малых тел Солнечной системы с большими планетами и друг с другом» (Министерство образования и науки РФ);

6. № 12-02-31064 мол-а «Исследование динамики больших скоплений околоземных космических объектов искусственного происхождения» (РФФИ).

В совместных работах Бордовицыной Т.В. принадлежит постановка задачи и обсуждение полученных результатов. Чувашову И.Н. принадлежит разработка пакета программ «Численная модель движения систем ИСЗ», используемого в исследовании.

Самостоятельно автором диссертации разработана уточненная аналитическая часть методики исследования и получены все результаты по выявлению вековых резонансов и исследованию их влияния на долговременную орбитальную эволюцию околоземных космических объектов.

### **Краткое содержание диссертационной работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников (60 наименований) и двух приложений, содержит 123 рисунка и 22 таблицы. Общий объем работы составляет 163 страницы.

*Во введении* дано обоснование актуальности проблемы, ее теоретической и практической значимости, показана степень разработанности проблемы. Сформулированы цели и задачи работы. Приведены методология и методы исследования. Сформулированы положения, выносимые на защиту. Показана научная новизна полученных результатов. Дано краткое содержание диссертации по главам.

*В первой главе* представлена численно-аналитическая методика выявления вековых резонансов.

Следуя К. Мюррею и С. Дермотту (2009), возмущающую функцию, описывающую влияние на спутник Земли третьего тела, можно выразить через элементы орбиты следующим образом:

$$R = \frac{\mu'}{a'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \sum_{\bar{m}=0}^l (-1)^{l-\bar{m}} \chi_{\bar{m}} \frac{(l-\bar{m})!}{(l+\bar{m})!} \times \sum_{p,p'=0}^l F_{l\bar{m}p}(i) F_{l\bar{m}p'}(i') \times \sum_{q,q'=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) X_{l-2p'+q'}^{-l-1,l-2p'}(e') \times \cos \psi, \quad (1)$$



где  $\alpha = a/a'$ ,  $\mu' = Gm'_{L,S}$  – произведение гравитационной постоянной на массу возмущающего тела (Луны ( $L$ ) или Солнца ( $S$ )),  $F \dots (i)$  – функция наклона,  $X \dots (e)$  – функция эксцентриситета. Функция  $\psi$  – аргумент, который для однократно и двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{\psi} &= (l - 2p' + q')M' - (l - 2p)\omega + (l - 2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \\ \underline{\underline{\psi}} &= (l - 2p')\omega' - (l - 2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} M' &= M'_0 + \bar{n}'(t - t_0), \quad \omega' = \omega'_0 + \dot{\omega}'(t - t_0), \quad \Omega' = \Omega'_0 + \dot{\Omega}'(t - t_0), \\ \omega &= \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0). \end{aligned}$$

Условие возникновения резонанса можно представить в следующем виде

$$\underline{\dot{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\underline{\dot{\psi}}} \approx 0. \quad (3)$$

Вековые частоты в движении спутника, обусловленные влиянием второй зональной гармоники и третьего тела вычисляются по известным формулам. Полный набор резонансных соотношений низких порядков состоит из 29 алгебраических выражений, приведенных в таблице 1. Сюда вошли резонансные соотношения со средними движениями Луны  $\dot{M}'_L$  и Солнца  $\dot{M}'_S$ , резонансы нодальных и апсидальных вековых частот спутника и возмущающих тел, а также геометрический резонанс типа Лидова-Козаи  $\dot{\omega} \approx 0$ . Этот резонанс получил название «геометрический», так как он не содержит частот, связанных с движением возмущающих тел, но позволяет выявить те области орбитального пространства, где имеет место равновесие в действии на вековое движение перицентров орбит трех возмущающих факторов: сжатия Земли и притяжения Луны и Солнца.

Таблица 1 — Типы резонансных соотношений низких порядков

№	Тип резонансного соотношения	№	Тип резонансного соотношения	№	Тип резонансного соотношения
1	$\dot{M}'_S - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega}'_S$	11	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$	21	$\dot{M}'_L - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$
2	$\dot{M}'_S - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega}'_S$	12	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_S$	22	$\dot{M}'_L - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_L$
3	$\dot{M}'_S - 2\dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega}'_S$	13	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_S$	23	$\dot{M}'_L - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$
4	$\dot{M}'_S + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$	14	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$	24	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \omega - \dot{\omega}'_L$
5	$\dot{M}'_S - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$	15	$\dot{M}'_L - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega}'_L$	25	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L$
6	$\dot{M}'_S + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$	16	$\dot{M}'_L - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + \dot{\omega}'_L$	26	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_L$
7	$\dot{M}'_S - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S)$	17	$\dot{M}'_L - 2\dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega}'_L$	27	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_L$
8	$\dot{M}'_S - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_S$	18	$\dot{M}'_L + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$	28	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$
9	$\dot{M}'_S - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$	19	$\dot{M}'_L - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$	29	$\dot{\omega}$
10	$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + \dot{\omega} - \dot{\omega}'_S$	20	$\dot{M}'_L + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L)$		

Соотношения с номерами 1 – 9 и 15 – 23 относятся к резонансам со средним движением Солнца и Луны соответственно, причем соотношения 1 – 3 и 15 – 17 описывают смешанный апсидально-нодальный резонанс, соотношения 4 – 7, 18 – 21 описывают нодальный резонанс, соотношения 8 – 9, 22 – 23 дают апсидальный резонанс со средним и движениями Луны и Солнца. Соотношения 10 – 13 и 24 – 27 описывают смешанный вековой резонанс, а соотношения 14 и 28 – чисто нодальный резонанс. Соотношение 29 представляет собой резонанс типа Лидова-Козаи, который по своей природе является геометрическим резонансом, так как зависит только от взаимного расположения объектов и не связан с частотами движения возмущающих тел.

Методика выявления того или иного резонанса в орбитальной динамике объекта, применяемая в работе, сводится к исследованию малости соотношений (3) для использованных при составлении таблицы 1 индексов  $l, p, p', q, q'$ , и анализа эволюции во времени соотношений (2), так называемых критических аргументов (Александрова, Томилова, Бордовицына, 2014). Как показано К. Мюреем и С. Дермота, а также А. Морбиделли, это необходимо для того, чтобы установить, какой характер имеют резонансные конфигурации: устойчивый при либрационном изменении соотношений (2), или неустойчивый при циркуляционном изменении. При исследовании долговременной эволюции во времени соотношений (2) и (3) значения элементов орбиты спутника определяются с помощью численного моделирования.

Кроме того, в первой главе дано краткое описание численной модели движения искусственных спутников Земли. Рассматриваются уравнения движения и математическая модель возмущающих сил, связанных с несферичностью геопотенциала, а также влиянием Луны и Солнца. Изложены особенности реализации программного комплекса на кластере ТГУ «Скиф Cyberia» с использованием параллельных вычислений, что позволяет отслеживать одновременно эволюцию орбит более 1000 объектов. Программный комплекс содержит алгоритмы для вычисления параметра MEGNO (Mean Exponential Growth of Nearby Orbit – среднее экспоненциальное расхождение близких орбит), который представляет собой взвешенную по времени интегральную форму ляпуновского характеристического числа (LCN) и позволяет выявлять наличие хаотичности в движении исследуемых объектов. Описание алгоритма для вычисления MEGNO также приведено в первой главе. Даны оценки точности численной модели, полученные путем прямого и обратного интегрирования, которые показывают, что при работе на 64 битной разрядной сетке на 100 летнем интервале времени гарантирована точность 10 метров, а на 128 битной сетке – миллиметровая точность.

*Вторая глава* посвящена исследованию особенностей динамической эволюции отработавших объектов навигационных систем ГЛОНАСС, GPS и BEIDOU IGSO (inclination geostationary orbits), то есть для навигационной системы BEIDOU рассмотрена динамика только тех объектов, которые имеют специфические наклонения.

В работах ряда авторов (Chao, Gick, 2004, Rossi, 2008) для объектов систем GPS,

ГАЛИЛЕО и частично ГЛОНАСС было показано, что для орбит с наклонениями, выбранными для созвездий навигационных систем, возмущения от вековых лунно-солнечных резонансов являются весьма значительными в области МЕО. Эти возмущения приводят к возрастанию эксцентриситетов орбит отработавших объектов СРНС. Полученные нами данные по численному моделированию эволюции эксцентриситета также показывают зависимость возрастания эксцентриситета от наклонения для объектов с орбитами типа ГЛОНАСС и GPS и орбитами типа BEIDOU IGSO. Более того наклонения орбит рассматриваемых навигационных систем приходятся как раз на максимумы возрастания эксцентриситетов, что должно приводить к существенному изменению положения орбит в пространстве. В результате этого отработавшие объекты могут создавать опасность столкновения для функционирующих КА. Помимо зависимости эволюции эксцентриситета от наклонения, в диссертационной работе показана зависимость эксцентриситета от величины начальных значений долготы восходящего узла и аргумента перицентра.

Далее во второй главе представлены результаты численного исследования долговременной орбитальной эволюции избранных объектов систем ГЛОНАСС, GPS и пяти спутников системы BEIDOU IGSO.

На рисунке 1 приведены оценки долговременной орбитальной эволюции объектов систем ГЛОНАСС и GPS, которые показывают, что объекты систем GPS и ГЛОНАСС имеют разные особенности орбитальной эволюции.

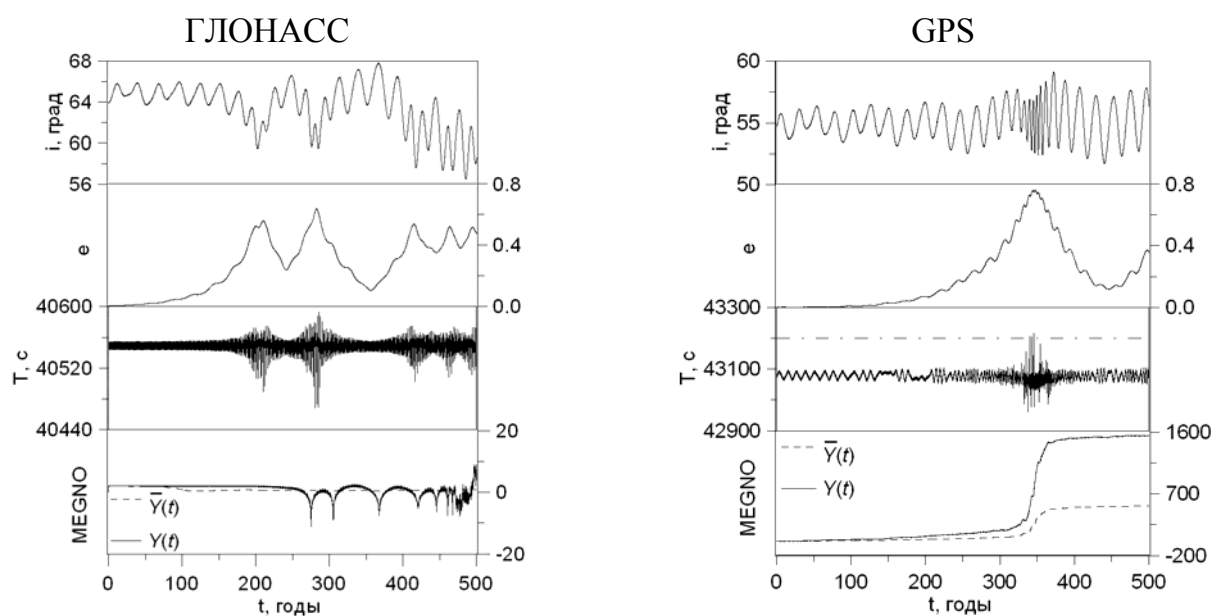


Рисунок 1 — Эволюция наклонения  $i$ , эксцентриситета  $e$ , периода  $T$  и параметров MEGNO (неосредненный параметр  $Y(t)$  – сплошная линия и осредненный  $\bar{Y}(t)$  – пунктирная линия) для объектов ГЛОНАСС и GPS на орбитах функционирования

Объект системы ГЛОНАСС на орбите функционирования проходит через два острых вековых резонанса  $\dot{\psi}_{25} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$ , но только действие резонанса Лидова-Козаи  $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$  можно считать устойчивым (рисунок 2). Влияние

этого резонанса приводит к раннему и долгопериодическому возрастанию эксцентриситета. Что же касается хаотичности, то она, хотя и имеет место, но не является значительной.

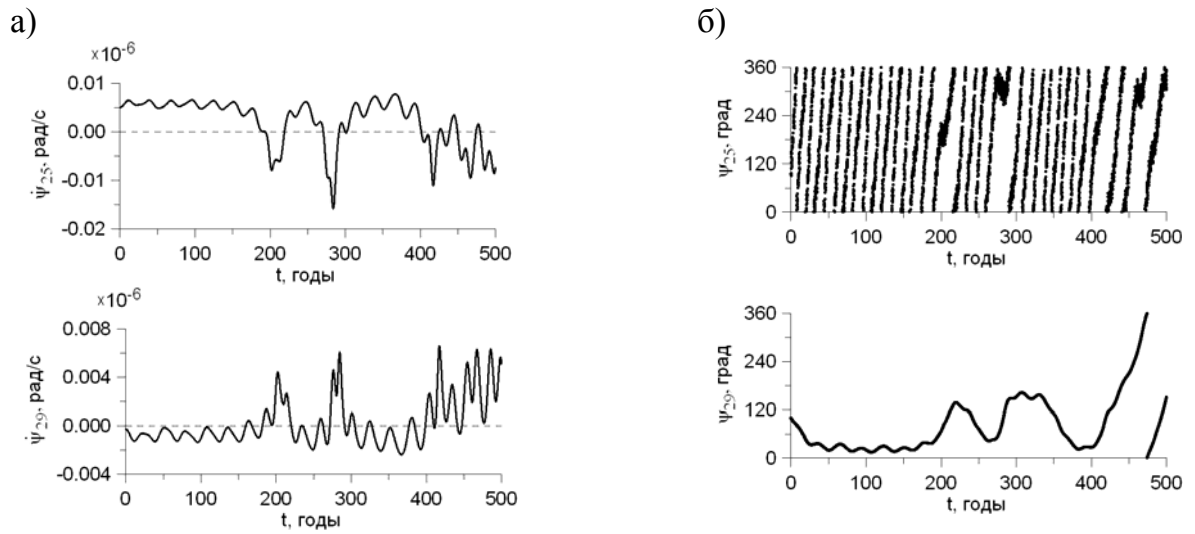


Рисунок 2 — Эволюция резонансных соотношений (а) и соответствующих им критических аргументов (б) для объекта навигационной системы ГЛОНАСС

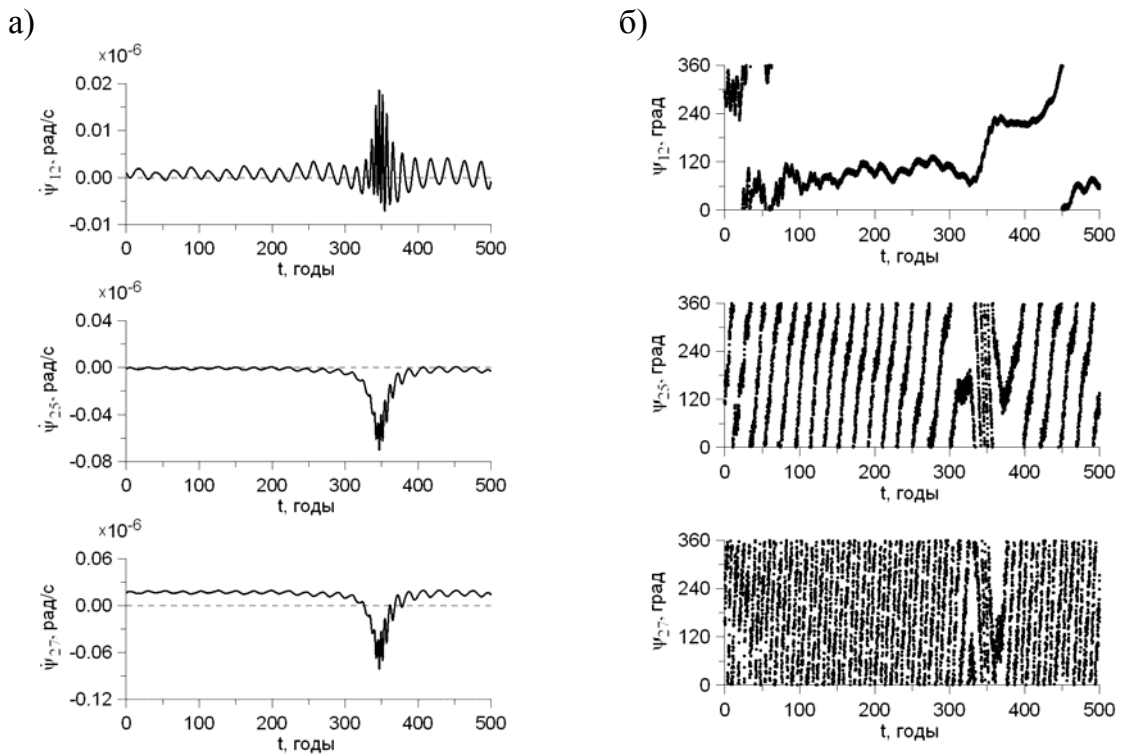


Рисунок 3 — Эволюция резонансных соотношений (а) и соответствующих им критических аргументов (б) для объекта навигационной системы GPS

Объект системы GPS имеет три вековых резонансных соотношения:  $\psi_{12} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_S \approx 0$ ,  $\psi_{25} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_L \approx 0$ ,  $\psi_{27} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_L) - 2\dot{\omega} + 2\dot{\omega}'_L \approx 0$ , которые в процессе эволюции переходят через нулевые значения (рисунок 3), причем

только вековой резонанс  $\psi_{12} \approx 0$  имеет устойчивое влияние на движение объекта. Критический аргумент, соответствующий  $\psi_{12} \approx 0$ , испытывает либрацию, которая нарушается в момент прохождения через орбитальный резонанс 2/1, связанный с соизмеримостью среднего движения объекта со скоростью вращения Земли (рисунок 4). Эксцентриситет орбиты растет, вплоть до вхождения объекта в орбитальный резонанс, после которого начинает стремительно нарастать хаотичность в движении объекта.

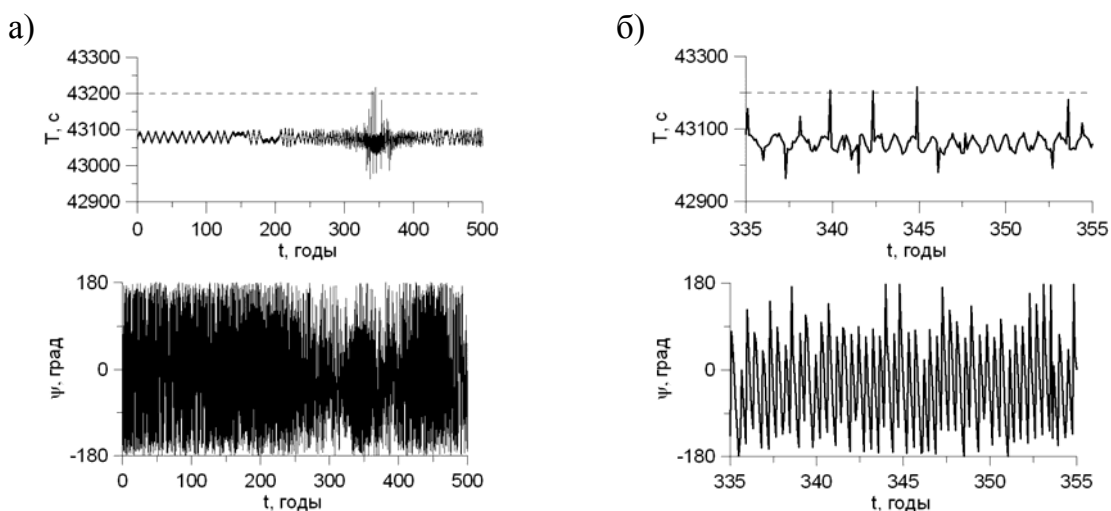


Рисунок 4 — Эволюция периода и критического аргумента для орбитального резонанса объекта GPS

Спутники BEIDOU IGSO расположены на геосинхронных орбитах, но их объединяет с российскими и американскими навигационными спутниками величина наклона орбиты, что порождает вековые резонансы в движении объектов и приводит к возрастанию эксцентриситетов орбит. Еще одной особенностью орбитальной эволюции объектов BEIDOU IGSO является возможность прохождения их в процессе эволюции через орбитальный резонанс 1/1 со скоростью вращения Земли. Из пяти спутников BEIDOU IGSO, рассматриваемых в диссертационной работе, наибольший интерес, с этой точки зрения, представляет орбитальная эволюция BEIDOU IGSO-3, поскольку именно этот объект имеет временное вхождение в орбитальный резонанс. Орбитальная эволюция объектов системы BEIDOU IGSO и влияние на нее вековых резонансов подробно рассмотрено в о втором разделе главы 2.

В последнем разделе второй главы рассмотрена проблема утилизации навигационных ИСЗ. В настоящее время действует стратегия утилизации (Rossi, 2008), в которой рекомендуется переводить исчерпавшие свой срок службы спутники на орбиты, расположенные на 500 км выше или 500 км ниже номинальных. Результаты исследования эволюции орбит утилизации показывают, что такая стратегия является не эффективной, и позволяет лишь на относительно короткий срок удалять отработавшие объекты из зоны функционирования навигационных систем. Поэтому нами была предпринята попытка на примере спутников системы ГЛОНАСС найти такие орбиты, которые приводили бы к действительной утилизации спутников. Для этого была рассмотрена эволюция ор-

бит с более существенным понижением высоты полета (на 1000, 1250, 1500, 1750 и 2000 км), а также увеличение эксцентриситета и одновременное уменьшение большой полуоси орбиты, и только увеличение эксцентриситета. В таблице 2 приведены оценки изменения перигейного и апогейного расстояний, полученные путем численного моделирования на интервале времени 54 года с учетом влияния гравитационных возмущений и атмосферы (для простоты была использована модель атмосферы ГОСТ 22721-77). Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что увеличение эксцентриситета является более действенным средством понижения перигея орбиты, чем уменьшение ее большой полуоси. Более того, уменьшение большой полуоси замедляет процесс понижения перигейного расстояния.

Таким образом, приведенные в настоящем разделе диссертации результаты исследований позволяют сделать вывод, что вековые резонансы оказывают заметное влияние на орбитальную эволюцию неуправляемых объектов СРНС, которое проявляется, прежде всего, в возрастании эксцентриситетов орбит рассматриваемых объектов. Это свойство орбитального движения СРНС может быть использовано для построения орбит, способных приводить со временем к реальной утилизации объектов. Для того, чтобы объекты в процессе орбитальной эволюции выходили на орбиты, достигающие в перигее верхних слоев атмосферы, достаточно увеличить эксцентриситеты орбит отработавших объектов до величины 0.4. За 50 лет можно получить желаемый результат.

Таблица 2 — Оценки эволюционных изменений орбит

$e_0$	$e_{\text{макс}}$	$a$ , км ( $a_0 = 25508.383$ км)	$r_{\pi}$ , км		$r_A$ , км	
			Мин.	Макс.	Мин.	Макс.
С атмосферой 54 года						
0.1	0.414	$a_0$	12377.071	22727.969	27778.629	30241.487
	0.266	$a_0 - 2000$ км	16028.972	20946.583	25600.629	27662.662
0.2	0.531	$a_0$	8589.224	19590.438	28044.925	30241.600
	0.405	$a_0 - 2000$ км	11704.417	18054.438	27081.657	27871.702
0.3	0.475	$a_0$	10386.688	16248.840	29150.604	30244.801
	0.475	$a_0 - 2000$ км	10388.968	16247.566	29149.195	30242.303
0.4	0.544	$a_0$	8207.730	13562.922	27755.841	30138.717
	0.543	$a_0 - 2000$ км	8207.519	13554.166	27751.138	30135.542

*Третья глава* посвящена исследованию с помощью численно-аналитической методики, описанной в первой главе, распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве и их влияния на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов.

Для изучения распространенности вековых резонансов был проведен численно-аналитический эксперимент, в котором для всех 29 (таблица 1), резонансных соотношений были определены их численные значения для следующих вариаций параметров:

$$e = \{0.01, 0.6, 0.8\}; i = \{0^\circ - 90^\circ\}; a = \{8000 \text{ км} - 55000 \text{ км}\}.$$

Для каждого резонансного соотношения были построены графики зависимости величины соотношений от эксцентриситета, наклона и большой полуоси. Продемонстрируем данные результаты на примере резонанса Лидова-Козаи (рисунок 5).

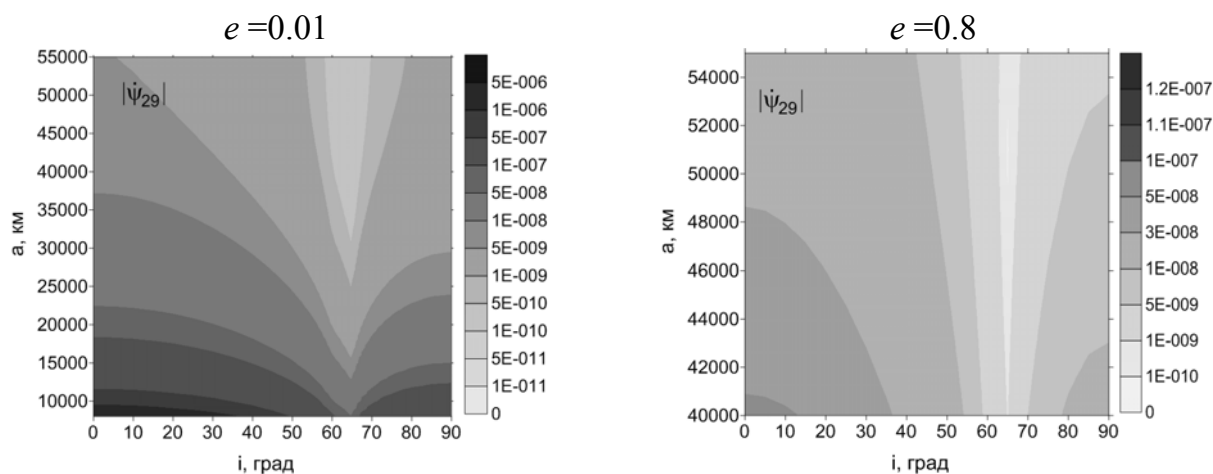


Рисунок 5 — Зависимость величины резонансного соотношения  $\psi_{29} = \dot{\omega} \approx 0$  от параметров орбиты объекта

Как показывают оценки, этот резонанс действует в широком диапазоне орбитальных параметров и достигает почти нулевых значений при наклонениях близких к  $65^\circ$  и для больших полуосей, превосходящих 20000 км.

Для смешанных апсидально-нодальных вековых резонансов со средним движением Солнца и Луны характерно появление малых знаменателей у объектов, движущихся по сравнительно низким почти круговым орбитам, с большими полуосями от 15000 до 20000 км, и наклонениями от  $0^\circ$  до  $70^\circ$ . При увеличении значений эксцентриситета до 0.8 область действия резонанса расширяется, а при больших полуосях, равных примерно 40000 км, появляется острый резонанс.

Вековые апсидальные резонансы со средним движением третьего тела по своему поведению совпадают со смешанными вековым резонансам со средним движением Солнца и Луны. При малых эксцентриситетах область действия резонансов ограничена низкими орбитами, а с увеличением эксцентриситета эта область расширяется. Наиболее острый резонанс появляется при наклонениях близких к  $60^\circ$ . Для того и другого резонансов величины резонансных соотношения, связанных с влиянием Луны, больше на порядок, чем величины соотношений, связанных с Солнцем.

Вековые нодальные резонансы, связанные с движением Солнца и Луны принимают наименьшие значения для объектов с большими полуосями в диапазоне 13000–17000 км и наклонениями в диапазоне  $0^\circ$ – $85^\circ$ . С увеличением эксцентриситета орбит величина резонансных соотношений уменьшается.

Смешанные вековые резонансы, связанные с Солнцем проявляют себя в большой области орбитального пространства с диапазоном больших полуосей 20000–55000 км и наклонений от  $45^\circ$  до  $75^\circ$ .

Нодальные вековые резонансы независимо от величины эксцентриситета дают малые знаменатели только при наклонениях близких к  $90^\circ$ .

Далее по результатам численного эксперимента дается анализ распределения устойчивых вековых резонансов в области околоземного пространства почти круговых орбит. Данные эксперимента включают результаты моделирования орбитальной эволюции объектов на интервале времени 100 лет, сведения об изменении на том же интервале времени всех резонансных соотношений, проходящих через нулевые или близкие к нулю значения, сведения об изменении их критических аргументов.

На низких почти круговых орбитах с большими полуосями до 20000 км и наклонами до  $85^\circ$  устойчивые вековые резонансные конфигурации отсутствуют.

На почти круговых орбитах с наклонами до  $70^\circ$  устойчивые резонансные конфигурации для разных моделей дают вековые резонансные соотношения:  $\dot{\psi}_{10} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{12} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{15} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{25} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{29} \approx 0$ . Соответствующие критические аргументы либрируют на всем 100-летнем интервале времени. Для модельных объектов из этого же диапазона орбитальных параметров критические аргументы резонансных соотношений  $\dot{\psi}_1 \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_3 \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_6 \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_8 \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_9 \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{11} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{13} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{14} \approx 0$  и  $\dot{\psi}_{28} \approx 0$  – либрируют кусочно, меняя либрационные изменения критического аргумента на циркуляционные и обратно. Причем конкретный набор резонансных соотношений зависит от величины большой полуоси модельного объекта.

На орбитах с наклонами от  $75^\circ$  до  $90^\circ$  и во всем диапазоне больших полуосей имеют место устойчивые конфигурации вековые резонансы с номерами 14 и 28, далее в зависимости от большой полуоси к ним присоединяются резонансные соотношения с номерами 10 – 13, 29.

Самое большое количество устойчивых конфигураций дают геометрический резонанс Лидова-Козаи  $\dot{\psi}_{29} \approx 0$ , вековые резонансы со средним движением Солнца  $\dot{\psi}_8 \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_9 \approx 0$ , смешанные апсидально-нодальные вековые резонансы, связанные с Солнцем  $\dot{\psi}_{10} \approx 0$ ,  $\dot{\psi}_{12} \approx 0$ , и нодальные вековые резонансы  $\dot{\psi}_{14} \approx 0$  и  $\dot{\psi}_{28} \approx 0$ .

Следует отметить, что анализ полных данных всего численного эксперимента позволяет сделать вывод, что увеличение эксцентриситета существенно не меняет локализацию областей устойчивости вековых резонансов в орбитальном пространстве.

Таким образом, проведенный анализ результатов численного эксперимента показывает, что в рассматриваемой области орбитального пространства вековые резонансы с устойчивыми конфигурациями концентрируются в диапазоне наклонений от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ , и в диапазоне больших полуосей от 20000 км до 55000 км.

В последних разделах главы три диссертационной работы рассматривается влияние вековых резонансов на орбитальную эволюцию околоземных объектов. Анализируется динамика объектов, расположенных на почти круговых орбитах ( $e = 0.01$ ) с наклонами от  $10^\circ$  –  $70^\circ$ , на почти круговых приполярных орбитах и объектов с большими значениями начальных эксцентриситетов ( $e = 0.6, 0.8$ ) с наклонами от  $10^\circ$  –  $90^\circ$ .

Для всех модельных объектов построена эволюция, приведенных в таблице 1 резонансных соотношений, и соответствующих критических аргументов. Выделены вековые резонансы, имеющие устойчивые конфигурации на 100-летнем интервале времени.



Показано, что движение модельных объектов, не подверженных действию вековых резонансов, и при наличии одного или нескольких устойчивых вековых резонансов регулярно, а параметр MEGNO  $\bar{Y}(t) \approx 2$ , для любого типа орбит.

Следует отметить, что устойчивое влияние резонанса Лидова-Козаи во всех случаях приводит к долгопериодическим изменениям эксцентриситетов орбит с большими амплитудами колебаний. Движение объектов, при этом, остается регулярным, о чем говорит изменение параметров MEGNO. В то же время совместное действие различных резонансов, у которых критические аргументы на рассматриваемом интервале времени неоднократно меняют либрационный характер изменения на циркуляционный и обратно, приводит к появлению хаотичности в движении объектов, расположенных на почти круговых орбитах (рисунок 6).

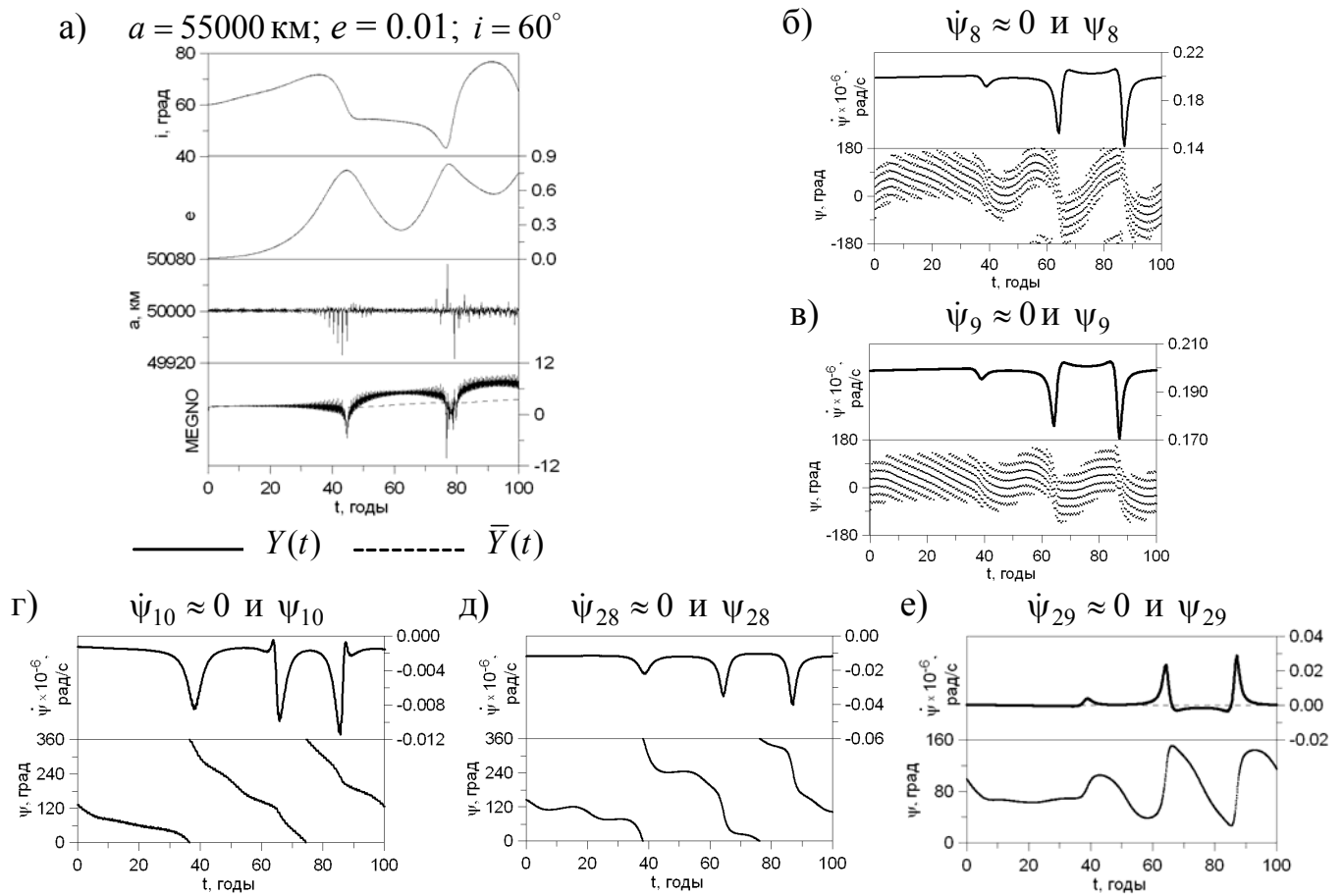


Рисунок 6 — Орбитальная динамика объекта под действием наложения большого числа вековых резонансов с различным характером изменения критических аргументов. а) долговременная орбитальная эволюция элементов орбиты и параметров MEGNO; б) – е) изменение во времени резонансных соотношений вековых резонансов и их критических аргументов

*В заключении* перечислены основные результаты работы.

– Усовершенствована численно-аналитическая методика выявления и исследования влияния вековых резонансов на орбитальную эволюцию околоземных объектов. В аналитической части методики использована более полная, чем в работах других авто-

ров, модель движения третьего тела, а именно, эллипс с вращающимися линиями апсид и узлов. Для численного исследования влияния вековых резонансов применена «Численная модель движения систем ИСЗ», обеспечивающая высокую точность вычислений.

– Проведен анализ динамической эволюции отработавших объектов СРНС ГЛОНАСС, GPS и BEIDOU IGSO. Показано, что влияние вековых резонансов меняет характер движения этих объектов. Исследована зависимость возрастания эксцентриситета орбиты спутника от величины наклона и долгот восходящего узла и перицентра.

– Проведено исследование причин возникновения динамической хаотичности в движении объектов космического мусора, образовавшегося из отслуживших свой срок космических аппаратов СРНС, размещенных в настоящее время в области МЕО и на геосинхронных орбитах. Показано, что наложение вековых и орбитального резонансов приводит к возникновению хаотичности в динамике объектов СРНС.

– Рассмотрена проблема утилизации навигационных ИСЗ. Результаты исследования показывают, что при выборе орбит утилизации необходимо учитывать влияние вековых резонансов, которое проявляется, главным образом, в возрастании эксцентриситета орбиты. Кроме того показано, что этот факт можно использовать для построения орбит, способных приводить к попаданию объектов в атмосферу и сгоранию.

– Проведен обширный численно-аналитический эксперимент по исследованию распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве и их влияния на долговременную орбитальную эволюцию объектов космического мусора. Построены динамические портреты, а также рассмотрена эволюция во времени критических аргументов для всех вековых резонансов, действующих в диапазоне больших полуосей от 8000 до 55000 км и в диапазоне наклонов от  $10^\circ$  до  $90^\circ$ , для значений эксцентриситетов орбит 0.01, 0.6 и 0.8.

– Показано, что область наибольшего влияния вековых резонансов начинается от значений большой полуоси 20000 км и наклонов  $45^\circ$ . Причем в области орбитального пространства с большими полуосями от 40000 км и выше и наклонами  $55^\circ - 90^\circ$  на движение объектов одновременно влияет большое количество вековых резонансов, имеющих как устойчивый, так и неустойчивый характер. Движение таких объектов является нерегулярным, а в динамике имеют место долгопериодические колебания эксцентриситета и наклона с большими амплитудами и стремительная хаотизация.

– Эволюция приполярных орбит с наклонами  $80^\circ$  и  $90^\circ$  градусов является особенно сложной. Причем орбитальная эволюция объектов с наклонами  $90^\circ$  градусов является катастрофичной при любых значениях эксцентриситетов. Кроме того, движение таких объектов является хаотичным.

– Полученные в работе результаты позволяют выделить несколько общих закономерностей в динамике околоземных объектов, подверженных действию вековых резонансов: а) среди вековых резонансов, связанных со средним движением третьего тела наибольшее влияние на движение объектов оказывают вековые резонансы, связанные со средним движением Солнца; б) наложение нескольких устойчивых вековых резонансов

не приводит к возникновению хаотичности, в то же время вхождение объекта в орбитальный резонанс с вращением Земли при наличии вековых резонансов может сопровождаться возникновением хаотичности в движении объектов; в) хаотичность возникает также при наложении на устойчивый вековой резонанс одного или нескольких резонансов, для которых критический аргумент меняет либрационный характер изменения на циркуляционный и обратно.

### **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы**

Дальнейшая разработка темы возможна по нескольким направлениям. В теоретическом плане возможно распространение исследований на более высокие области околоземного орбитального пространства, а также детальное изучение особенностей влияния каждой группы вековых резонансов на орбитальную эволюцию объектов. В практическом плане возможно использование полученных результатов для разработки алгоритмов утилизации объектов конкретных спутниковых систем.

### **Список опубликованных работ по теме диссертации**

1. Александрова А.Г., Томилова И.В., Бордовицына Т.В. Анализ влияния вековых резонансов на динамическую эволюцию околоземных объектов, движущихся по почти круговым орбитам в области супер-ГЕО// Изв. вузов. Физика. 2014. №10/2. С.95–102.
2. Бордовицына Т.В, Авдюшев В.А., Чувашов И.Н., Александрова А.Г., Томилова И.В Численное моделирование движения систем ИСЗ в среде параллельных вычислений // Изв. вузов. Физика. 2009. №. 10/2. С. 5 – 11.
3. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию объектов области МЕО //Материалы международной конференции «Околоземная астрономия 2011». Красноярск. Изд-во СибГАУ. 2011. С. 20.
4. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Численно-аналитическая методика выявления и исследования вековых резонансов в движении околоземных объектов// Изв. Вузов. Физика. 2011. № 6/2. С. 160 – 168.
5. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем в области МЕО// Астрон. вестн. 2012. Т. 46, № 5. С. 356–368.
6. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Исследование распространенности вековых резонансов в околоземном орбитальном пространстве//Изв.вузов. Физика. 2013а. №10/2. С. 150 – 158.
7. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Вековые резонансы и проблема утилизации отработавших объектов спутниковых навигационных систем// Тр. всероссийской астрономической конференции ВАК-2013. 2013б. С. 36.
8. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов искусственного происхождения//Материалы международ. конференции «Околоземная астрономия 2013». Краснодар. Изд-во КубГУ. 2013. С. 78.
9. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как источник возникновения динамической хаотичности в долговременной орбитальной эволю-

ции неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем // Астр. вестн. 2014. Т.48, № 4. С. 280 – 289.

10. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамической эволюции околоземных космических объектов на вытянутых орбитах // Изв. вузов. Физика. 2014. № 4. С. 84 – 91.

11. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамической эволюции околоземных космических объектов на приполярных орбитах // Изв. вузов. Физика. 2014. № 6. С.102-109.

12. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Анализ структуры резонансных возмущений навигационных ИСЗ орбитах // Изв. вузов. Физика. 2015. № 2 .С. 131 –.133.

13. Томилова И.В., Бордовицына Т.В. Вековые резонансы и прогнозирование возможности столкновения утилизированных навигационных ИСЗ с функционирующими аппаратами // Математическое и физическое моделирование опасных природных явлений и техногенных катастроф. Материалы всерос. конференции с участием зарубежных ученых. Томск: Изд-во ТГУ. 2010. С. 109 – 110.

14. Томилова И.В. Вековые резонансы в орбитальной эволюции объектов зоны МЕО // Физика космоса: Тр. 40 международ. студ. научн. конф., Екатеринбург , 31 янв.–4 фев. 2011 г. – Екатеринбург: Изд-во Урал. Ун-та. 2011. С. 256.

15. Томилова И.В., Бордовицына Т.В. Вековые резонансы и проблема утилизации отработавших объектов спутниковых радионавигационных систем // Математическое и физическое моделирование опасных природных явлений и техногенных катастроф. Материалы всерос. конференции с участием зарубежных ученых. Томск: Изд-во ТГУ. 2012. С. 109 – 110.

16. Томилова И.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как источник хаотичности в долговременной орбитальной эволюции неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем в области МЕО // Тр. Том. гос. ун-та. Томск, 2012. Т.282, С.291–293.

17. Томилова И.В., Чувашов И.Н., Бордовицына Т.В. Влияние вековых резонансов на возникновение хаотичности в движении объектов в зоне МЕО // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 10/2. С. 119 – 124.

18. Томилова И.В. Вековые резонансы как источник хаотичности в движении околоземных космических объектов // Труды всерос. астрономической конференции ВАК-2013. 2013. С. 253.

19. Томилова И.В., Чувашов И.Н., Бордовицына Т.В. Вековых резонансы как источник хаотичности в движении околоземных космических объектов по почти круговым орбитам // Изв. вузов. Физика. 2013а. Т. 56, № 10/2. С. 159 – 165.

20. Томилова И.В., Бордовицына Т.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как фактор орбитальной эволюции околоземных объектов // Изв. вузов. Физика. 2013б. № 6/3. С. 238 – 240.