

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

МЕЛЬНИКОВ Александр Евгеньевич

АВТОМАТИЧЕСКАЯ БАЛАНСИРОВКА ГИБКИХ РОТОРОВ

01.02.01 — Теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2011

Работа выполнена на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент БЫКОВ Владимир Григорьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор МЕЛЬНИКОВ Геннадий Иванович
(Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики)

кандидат физико-математических наук,
доцент ШНЕЕРСОН Юрий Борисович
(Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Защита состоится " ____ " _____ 201__ г. в ____ часов на заседании совета Д 212.232.30 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан " ____ " _____ 201__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Кустова Е.В.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Роторные механизмы применяются во многих областях современной промышленности, от машиностроения до компьютерной и бытовой техники. Так как зачастую эти механизмы должны функционировать на высоких скоростях, сильные вибрации, вызванные смещением центра тяжести ротора, могут стать серьезной проблемой и, даже, привести к поломке механизма.

Исследования динамики роторов насчитывают более чем 140-летнюю историю, о чем свидетельствует статья известного шотландского ученого У. Рэнкина о вращательных движениях ротора написанная в 1869 году. С тех пор исследованию динамики роторов было посвящено множество научных трудов, среди которых можно отметить работы А. Фёпля, А. Стодолы, Г. Джеффкотта, А.Н. Крылова и Г. Хользера. Фундаментальными работами, отражающими современное состояние теории жестких и гибких роторов, являются монографии Г. Генты и Т. Ямамото.

Существует два способа уменьшения нежелательных вибраций в механизме ротора - это ручная и автоматическая балансировка. Наибольшее распространение получила ручная балансировка, суть которой состоит в определении и устранении фиксированного статического, моментного или динамического дисбаланса на стадии создания ротора путем добавления корректировочных масс к "тяжелой" стороне ротора или удалением материала ротора с "легкой" стороны. Ручной балансировке роторов посвящено множество работ таких авторов как В.А. Щепетильников и А.А. Гусаров. Недостатком ручной балансировки является то, что при длительном использовании материал ротора деформируется и балансировку приходится проводить заново. Также ручная балансировка не приносит желаемых результатов, если центр тяжести ротора занимает нефиксированное положение, как это происходит, например, в стиральных машинах. Еще одним недостатком этого процесса является его трудоемкость для роторов сложной конструкции и, особенно, для гибких роторов, что было показано Ф.М. Диментбергом и А.А. Гусаровым.

Применение автобалансирующих устройств (АБУ) решает большинство этих проблем. Однако, АБУ гасят колебания лишь в закритичной области скоростей, а при скоростях меньше первой критической применение АБУ зачастую вызывает увеличение амплитуды и усугубляет переход через резонанс. Первая теоретическая модель ротора, оснащенного шаровым автобалансирующим устройством, была предложена американским инженером Э. Сирлом в 1932 году.

Автобалансирующие устройства делятся на пассивные - со свободным перемещением корректирующих масс, и активные - с их принудительным перемещением, присоединением или удалением. Основным преимуществом пассивных автобалансирующих устройств является простота. Их работа осуществляется за счет энергии самого ротора. Главный недостаток заключается в том, что они не являются всережимными, то есть они балансируют ротор только в определенном диапазоне угловой скорости его вращения. Основным недостатком активных автобалансирующих устройств является сложность их конструкции, но они являются всережимными.

Во многих работах рассматривались проблемы автоматической ба-

лансировки либо жестких роторов (Л. Сперлинг, В.Н. Нестеренко и А. А. Гусаров), либо гибких, но без учета влияния распределенной массы вала (Д. Чунг и Ф.М. Диментберг). Кроме того Ф.М. Детинко исследовал динамическую балансировку и устойчивость ротора с распределенным дисбалансом с помощью АБУ, установленных в нескольких сечениях.

В силу вышесказанного тема настоящей работы, посвященной исследованию динамики гибкого ротора, оснащенного шаровым АБУ, с учетом распределенной массы вала, является актуальной.

Цель работы. Целью настоящей работы является построение математической модели гибкого ротора с шаровым АБУ на основе обобщенных лагранжевых координат, пригодной для исследования различных режимов движения ротора. А также анализ этих режимов, их классификация и сравнение с результатами, полученными путем использования других моделей.

Методы исследований. Используются классические методы теории нелинейных колебаний и теории устойчивости движения, а также матричный анализ и элементы теории функции комплексной переменной. Кроме того для численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений применяются алгоритмы компьютерного моделирования.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Разработана методика исследования динамики гибкого ротора с распределенной массой и сосредоточенным дисбалансом на основе введения обобщенных лагранжевых координат.
2. Получено новое трансцендентное уравнение для определения критических скоростей гибкого вала, а также приближенная формула для вычисления критических скоростей высоких порядков.
3. Построена математическая модель гибкого ротора с распределенной массой и сосредоточенным дисбалансом, оснащенного шаровым автобалансирующим устройством. В рамках этой модели предложена классификация стационарных режимов, получены условия их существования и исследована устойчивость.
4. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием данной модели, с результатами, полученными путем использования других моделей.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Введенные в ней понятия, развитые методы и полученные результаты применимы при исследовании и конструировании быстровращающихся роторных машин, оснащенных шаровым автобалансирующим устройством. На основании результатов исследования могут быть сделаны практические рекомендации, касающиеся оптимальных параметров ротора и автобалансирующего устройства.

Апробация работы. Полученные в работе результаты были представлены автором на Международной конференции "Пятое Поляховские чтения Санкт-Петербург, 2009. Неоднократно результаты докладывались на семинаре кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано три публикации, из них две статьи [1, 2] в журналах, рекомендованных ВАК Российской Федерации.

В работах [1, 2], написанных в соавторстве, автору принадлежит разработка модели, исследование ее динамики и проведение численных экспериментов, а соавтору - общая постановка задачи и научные консультации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, насчитывающего 60 наименований. Диссертация содержит 40 рисунков и 3 таблицы. Общий объем работы 88 страниц.

Краткое содержание работы.

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, приведена краткая история исследования автобалансирующих устройств, дан обзор литературы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, описана структура диссертации, а также представлены положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена исследованию динамики гибкого ротора с распределенной массой и сосредоточенным дисбалансом.

Исследуется математическая модель ротора в виде жесткого тонкого диска массы m , несимметрично насаженного на упругий вал круглого сечения с равномерно распределенной массой. Вал вращается в шарнирных опорах, одна из которых является подвижной (рис. 1). Диск считаем жестко скрепленным с валом в точке O_1 — центре диска. Неуровновешенность ротора зададим с помощью точечного дисбаланса массы m_0 , закрепленного на диске в точке D на расстоянии r_0 от центра диска.

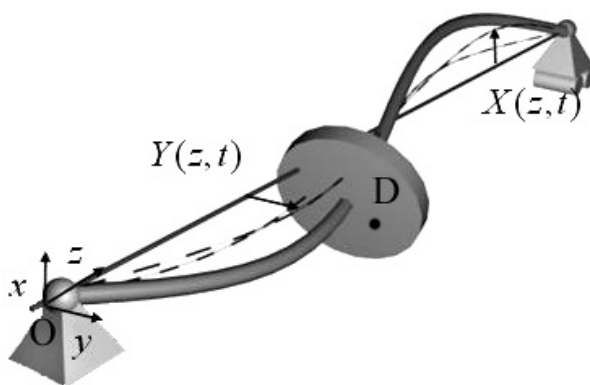


Рис. 1. Диск на гибком валу

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$, начало которой поместим в центр неподвижной шарнирной опоры, а ось Oz направим по оси недеформированного вала, проходящей через центры шарниров. Пусть текущее положение точек осевого сечения вала задается координатами $X(z, t)$ и $Y(z, t)$. Функции $X(z, t)$ и $Y(z, t)$ можно разложить по собственным формам колебаний вала, соответствующим условиям шарнирного за-

крепления

$$X(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad Y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad (1)$$

где $x_k(t)$ и $y_k(t)$ — величины максимального прогиба вала, а l — длина вала.

В качестве полной системы обобщенных координат ротора примем функции x_k , y_k и угол собственного вращения диска вокруг его нормали θ_0 . Рассмотрим конечное число n собственных форм колебаний и введем следующие обозначения

$$\mathbf{x} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T, \quad \mathbf{y} = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T, \\ \mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}^T,$$

где коэффициенты $a_k = \sin \frac{k\pi z_0}{l}$ и $b_k = \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi z_0}{l}$ характеризуют величину отклонения искривленной оси вала и угол наклона касательной к ней для k -й формы колебания в точке крепления диска к валу, а z_0 — проекция этой точки на ось Oz .

Перейдем к комплексным переменным и введем вектор $\mathbf{v} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$. Обозначив через $\bar{\mathbf{v}}$ вектор комплексно сопряженный к \mathbf{v} , кинетическую энергию системы с точностью до малых второго порядка представим в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{v}}}^T (m_S \mathbf{E}_n + J_t \mathbf{B} + (m + m_0) \mathbf{A}) \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} (J_p + m_0 r_0^2) \dot{\theta}_0^2 \\ - J_p \dot{\theta}_0 \operatorname{Im}[\dot{\bar{\mathbf{v}}}^T \mathbf{B} \mathbf{v}] + m_0 r_0 \dot{\theta}_0 \operatorname{Im}[\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{e}^{-i\theta_0}] \mathbf{a}, \quad (2)$$

где $m_S = pSl/2$ — приведенная масса вала (p и S — плотность и площадь поперечного сечения вала); J_p , J_t — полярный и трансверсальный моменты инерции диска; \mathbf{E}_n — единичная матрица $n \times n$; $\mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$ и $\mathbf{B} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T$ — симметричные матрицы $n \times n$.

Так как на вал не действуют внешние потенциальные силы, то потенциальная энергия ротора будет состоять только из энергии изгиба вала

$$\Pi = \frac{1}{2} m_S \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{v}, \quad (3)$$

где $\mathbf{\Omega}^2 = \operatorname{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2\}$, $\omega_k^2 = \frac{k^4 \pi^4 EJ}{pSl^4}$ — собственные частоты поперечных колебаний вала, EJ — изгибная жесткость вала.

Для учета вязкого трения введем в рассмотрение диссипативную функцию Релея

$$R = \frac{1}{2} d \dot{\bar{\mathbf{v}}}^T \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} d_0 \dot{\theta}_0^2, \quad (4)$$

где d и d_0 — коэффициенты сопротивления при движении ротора и вращении вала.

С учетом выражений (2), (3) и (4) запишем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\begin{cases} (m_S \mathbf{E}_n + J_t \mathbf{B} + (m + m_0) \mathbf{A}) \ddot{\mathbf{v}} + (d \mathbf{E}_n + 2i J_p \dot{\theta}_0 \mathbf{B}) \dot{\mathbf{v}} \\ \quad + (m_S \Omega^2 + i J_p \ddot{\theta}_0 \mathbf{B}) \mathbf{v} = m_0 r_0 (\dot{\theta}_0^2 - i \ddot{\theta}_0) \mathbf{e}^{i\theta_0} \mathbf{a} \\ (J_p + m_0 r_0^2) \ddot{\theta}_0 + m_0 r_0 \operatorname{Im}[\ddot{\mathbf{v}}^T \mathbf{e}^{-i\theta_0}] \mathbf{a} + i J_p \operatorname{Im}[\ddot{\mathbf{v}}^T \mathbf{B} \mathbf{v}] + d_0 \dot{\theta}_0 = M_\theta, \end{cases} \quad (5)$$

где M_θ — внешний вращающий момент приложенный к валу.

Для исследования стационарных режимов предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta}_0 = \omega$ и перейдем к новой векторной переменной $\mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{e}^{-i\omega t}$. Запишем первую часть уравнений Лагранжа (5) в новых переменных в безразмерном виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_n + \tilde{J}_t \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{m} \mathbf{A}) \left(\frac{d^2 \tilde{\mathbf{w}}}{d\tilde{t}^2} + 2i\tilde{\omega} \frac{d\tilde{\mathbf{w}}}{d\tilde{t}} - \tilde{\omega}^2 \tilde{\mathbf{w}} \right) + (d \mathbf{E}_n + 2i \tilde{J}_p \tilde{\omega} \tilde{\mathbf{B}}) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{w}}}{d\tilde{t}} + i\tilde{\omega} \tilde{\mathbf{w}} \right) \\ + \tilde{\Omega}^2 \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{m}_0 \tilde{\omega}^2 \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{J}_t = \frac{\pi^2 J_t}{l^2 m_S}, \quad \tilde{J}_p = \frac{\pi^2 J_p}{l^2 m_S}, \quad \tilde{m} = \frac{m + m_0}{m_S}, \quad \tilde{m}_0 = \frac{m_0}{m_S}, \quad \tilde{d} = \frac{d}{m_S \omega_1}, \\ \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{l}, \quad \tilde{t} = \omega_1 t, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{r_0}, \quad \tilde{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{l^2}{\pi^2} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Далее символ " \sim " писать не будем.

Рассмотрим стационарные режимы вращения ротора, при которых $\mathbf{w} = \mathbf{w}_* = \text{const}$. Полагая в (6) значения всех производных от \mathbf{w} равными нулю, получим

$$(\Omega^2 + \omega(id - \omega) \mathbf{E}_n - \omega^2 (m \mathbf{A} + (J_t + 2J_p) \mathbf{B})) \mathbf{w}_* = m_0 \omega^2 \mathbf{a}. \quad (7)$$

Матрицу левой части системы (7) обозначим через \mathbf{R} и запишем в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (8)$$

где $\mathbf{A} = \Omega^2 + \omega(di - \omega) \mathbf{E}_n$ — диагональная матрица размера $n \times n$, а $\mathbf{U} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ и $\mathbf{V} = -\omega^2 \{m \mathbf{a}, (J_t + 2J_p) \mathbf{b}\}$ — матрицы размера $n \times 2$.

В диссертации показано, что у матрицы \mathbf{R} существует обратная матрица, которую можно представить в виде

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot (\mathbf{E}_2 + \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A}^{-1}. \quad (9)$$

Разрешая систему (7) относительно вектора \mathbf{w}_* и умножая его скалярно на вектор \mathbf{a} , получим

$$\mathbf{w}_*^T \mathbf{a} = m_0 \omega^2 \left(\frac{1 - S_{22} (J_t + 2J_p) \omega^2}{S_{11} (1 - S_{22} (J_t + 2J_p) \omega^2) + S_{12}^2 (J_t + 2J_p) \omega^2} - m \omega^2 \right)^{-1}, \quad (10)$$

где

$$S_{11} = \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{a}, \quad S_{21} = S_{12} = \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{b}, \quad S_{22} = \mathbf{b}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{b}.$$

Для нахождения амплитудно-частотных характеристик ротора (АЧХ) и фазо-частотных характеристик ротора (ФЧХ) можно использовать формулы

$$A(\omega) = |\mathbf{w}_*^T \mathbf{a}|, \quad \beta(\omega) = \arg(\mathbf{w}_*^T \mathbf{a}). \quad (11)$$

Аналогично, чтобы найти амплитуду угловой прецессии диска, определим наклон нормали к поверхности диска

$$\Phi(\omega)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k(t) b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n y_k(t) b_k \right)^2 = |\mathbf{w}_*^T \mathbf{b}|^2, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{w}_*^T \mathbf{b} = \frac{S_{12} m_0 \omega^2}{(1 - S_{11} m \omega^2) (1 - S_{22} (J_t + 2J_p) \omega^2) - S_{12}^2 m (J_t + 2J_p) \omega^4}. \quad (13)$$

Заметим что для симметричного закрепления диска $S_{12} = 0$, следовательно, амплитуда угловой прецессии в данном случае будет тождественно равна нулю.

Предполагая, что $n \rightarrow \infty$, получим

$$S_{11} = \frac{\pi}{4\alpha^3} \left(\frac{\sin \alpha \pi z_0}{\sin \alpha \pi} \sin \alpha \pi (1 - z_0) - \frac{\text{sh } \alpha \pi z_0}{\text{sh } \alpha \pi} \text{sh } \alpha \pi (1 - z_0) \right), \quad (14)$$

$$S_{12} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left(\frac{\cos \alpha \pi z_0}{\sin \alpha \pi} \sin \alpha \pi (1 - z_0) - \frac{\text{ch } \alpha \pi z_0}{\text{sh } \alpha \pi} \text{sh } \alpha \pi (1 - z_0) \right), \quad (15)$$

$$S_{22} = \frac{\pi}{4\alpha} \left(-\frac{\cos \alpha \pi z_0}{\sin \alpha \pi} \cos \alpha \pi (1 - z_0) + \frac{\text{ch } \alpha \pi z_0}{\text{sh } \alpha \pi} \text{ch } \alpha \pi (1 - z_0) \right). \quad (16)$$

Уравнение для определения критических частот ν_k найдем, приравняв в (10) знаменатель нулю и, подставив $\alpha = \sqrt{\nu_k}$ в выражения для S_{ij}

$$\frac{1 - S_{22} (J_t + 2J_p) \nu_k^2}{S_{11} (1 - S_{22} (J_t + 2J_p) \nu_k^2) + S_{12}^2 (J_t + 2J_p) \nu_k^2} = m \nu_k^2. \quad (17)$$

Заметим, что при достаточно больших ν_k слагаемыми порядка $1/\nu_k^2$ можно пренебречь, при этом гиперболическая часть в выражениях для S_{ij} будет приближенно равна 0.5. В результате получим простую приближенную формулу для определения критических частот высокого порядка

$$\nu_k = \left(\frac{1 + 4k}{2 \pm (2 - 4z_0)} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Для того, чтобы полностью решить линейную систему уравнений Лагранжа 2-го порядка (6), необходимо сложить общее решение однородной системы с частным решением неоднородной, которое было найдено ранее. Решение однородной части уравнений (6) будем искать в виде

$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_s e^{\lambda_s t}$, где \mathbf{w}_s — не зависящий от времени вектор, который можно найти из системы

$$\mathbf{R}(\lambda_s) \mathbf{w}_s = 0, \quad (19)$$

где $\mathbf{R}(\lambda_s) = k_E \mathbf{E}_n + \boldsymbol{\Omega}^2 + k_A \mathbf{A} + k_B \mathbf{B}$, $k_E = (\lambda_s + i\omega + d)(\lambda_s + i\omega)$, $k_A = m(\lambda_s + i\omega)^2$, $k_B = (J_t \lambda_s + (J_t + 2J_p)i\omega)(\lambda_s + i\omega)$.

Для того чтобы однородная система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы $\det[\mathbf{R}(\lambda_s)] = 0$. В диссертации показано, что при $|k_E \mathbf{E}_n + \boldsymbol{\Omega}^2| \neq 0$ уравнение $\det[\mathbf{R}(\lambda_s)] = 0$ эквивалентно

$$\det \left[\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{k_A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_B} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{array} \right\} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right\} \right] = 0, \quad (20)$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = k_E \mathbf{E}_n + \boldsymbol{\Omega}^2$. Из уравнения (20) можно вычислить λ_s при $s = 1 \dots 2n$. Можно показать, что $\lambda_s \approx -\frac{d}{2} \pm i\nu_s$ при $|\lambda_s| \gg 1$. Подставляя найденное значение λ_s в (19), получим линейную систему относительно неизвестных компонент собственных векторов \mathbf{w}_s . Вектор \mathbf{w}_s следует искать в виде

$$\mathbf{w}_s = C_a^s \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{a} + C_b^s \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{b}, \quad (21)$$

где коэффициенты C_a^s и C_b^s можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{k_A} C_a^s + (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{a}) C_a^s + (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{b}) C_b^s = 0 \\ \frac{1}{k_B} C_b^s + (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{b}) C_a^s + (\mathbf{b}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{b}) C_b^s = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Определитель этой системы равен нулю в силу (20), следовательно, у системы существует нетривиальное решение. В итоге получим общее решение системы уравнений (6)

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_* + \sum_{s=1}^{\infty} A_s e^{-\gamma_s t} \sin(\nu_s t + \varphi_s) \mathbf{w}_s, \quad (23)$$

где коэффициент затухания $\gamma_s = -\operatorname{Re}[\lambda_s] > 0$ можно найти из уравнения (20), а значения амплитуды A_s и фазы φ_s определяются из начальных условий.

Таким образом, в процессе перехода к стационарному режиму ротор совершает свободные колебания, являющиеся композицией колебаний по всем собственным формам системы с соответствующей частотой. С течением времени эти эффекты исчезают и ротор выходит на стационарный режим, при этом высокочастотные формы гасятся быстрее, чем низкочастотные.

В разделе 1.4 проводится компьютерное моделирование динамики роторов различной конфигурации. Представлены собственные формы вала с диском и значения критических частот. Проведено сравнение полученных

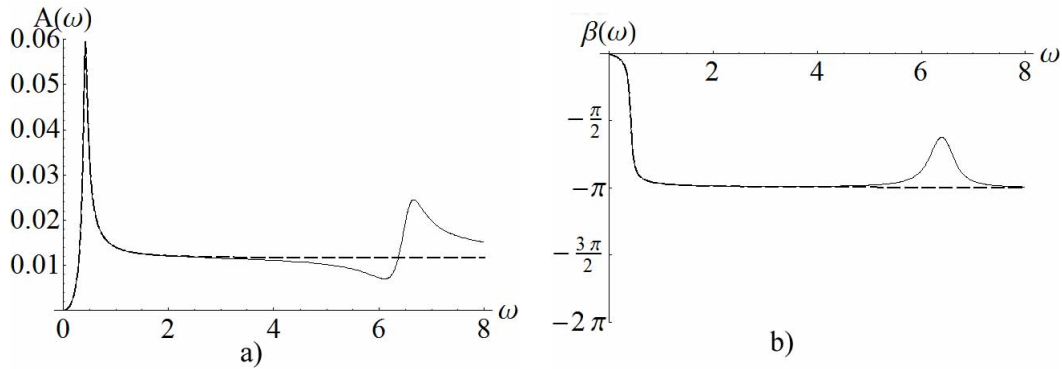


Рис. 2. АЧХ и ФЧХ симметричного ротора с учетом (сплошная линия) и без учета массы вала (пунктир)

амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик с аналогичными характеристиками, полученными для моделей, не учитывающих вес вала (рис. 2). Показана зависимость амплитуды угловой прецессии ротора от частоты вращения. Численно исследованы режимы нестационарного прохождения через критические скорости.

Во второй главе математический аппарат, представленный в первой главе, применяется для построения математической модели гибкого ротора с сосредоточенным дисбалансом, оснащенного шаровым автобалансирующим устройством (АБУ). АБУ представляет собой цилиндрическую обойму, в которой N балансировочных шариков массы m_j , $j = 1, \dots, N$, могут перемещаться в плоскости диска по concentрическим окружностям радиуса r_j с центром в точке O_1 . Предполагаем, что шарики движутся внутри трубок, заполненных вязкой жидкостью с коэффициентом сопротивления d_j . Обозначим через θ_j угловое отклонение j -го шарика от оси O_1x_2 (рис. 3).

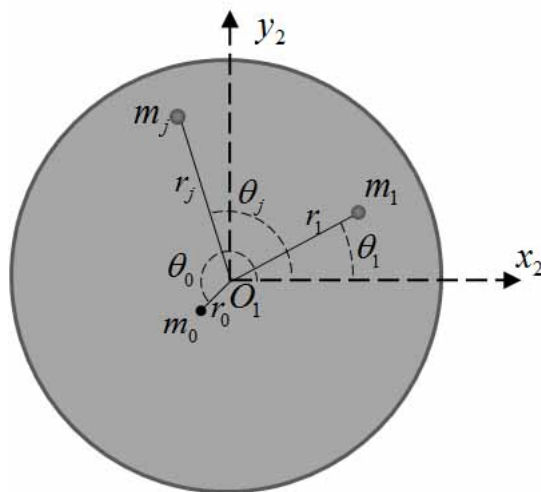


Рис. 3. Балансировочные шарики

Считая балансировочные шарики материальными точками, примем за обобщенные координаты компоненты вектора \mathbf{v} и углы θ_j , $j = 0 \dots N$

и запишем выражения для кинетической T и потенциальной Π энергии, а также для диссипативной функции Рэлея R

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{v}}^T (m_S \mathbf{E}_n + J_t \mathbf{B} + (m + \sum_{j=0}^N m_j) \mathbf{A}) \dot{\mathbf{v}} + J_p \dot{\theta}_0^2 + \sum_{j=0}^N m_j r_j^2 \dot{\theta}_j^2 - 2J_p \dot{\theta}_0 \operatorname{Im}[\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{B} \mathbf{v}] + \sum_{j=0}^N 2r_j m_j \dot{\theta}_j \operatorname{Im}[\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{e}^{-i\theta_j}] \mathbf{a} \right),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} m_S \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{v}, \quad R = \frac{1}{2} \left(d \dot{\mathbf{v}}^T \dot{\mathbf{v}} + d_0 \dot{\theta}_0^2 + \sum_{j=1}^N d_j (\dot{\theta}_j - \dot{\theta}_0)^2 \right).$$

Предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω . Перейдем к новым переменным $\mathbf{w} = \mathbf{v} e^{-i\omega t}$ во вращающейся системе координат. Также, введем относительные углы поворота шариков $\alpha_j = \theta_j - \omega t$. После перехода к безразмерным переменным, получим уравнения динамики ротора с АБУ во вращающейся системе координат

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}_n + \tilde{J}_t \mathbf{B} + \tilde{m} \mathbf{A}) (\ddot{\tilde{\mathbf{w}}} + 2i\tilde{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} - \tilde{\omega}^2 \tilde{\mathbf{w}}) + (2i\tilde{J}_p \tilde{\omega} \mathbf{B} + \tilde{d} \mathbf{E}_n) (\dot{\tilde{\mathbf{w}}} + i\tilde{\omega} \tilde{\mathbf{w}}) \\ \quad - \tilde{m}_0 \tilde{r}_0 \tilde{\omega}^2 \mathbf{a} + \sum_{j=1}^N \tilde{m}_j \tilde{r}_j (i\ddot{\alpha}_j - (\dot{\alpha}_j + \tilde{\omega})^2) \mathbf{a} e^{i\alpha_j} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^2 \tilde{\mathbf{w}} = 0 \\ \ddot{\alpha}_j + \frac{1}{\tilde{r}_j} \operatorname{Im}[(\ddot{\tilde{\mathbf{w}}} + 2i\tilde{\omega} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} - \tilde{\omega}^2 \tilde{\mathbf{w}})^T \mathbf{e}^{-i\alpha_j}] \mathbf{a} + \tilde{d}_j \dot{\alpha}_j = 0, \quad j = 1 \dots N. \end{array} \right. \quad (24)$$

Безразмерные параметры в уравнениях (24) имеют следующий смысл

$$\tilde{m} = \frac{m + \sum_{j=0}^N m_j}{m_S}, \quad \tilde{m}_j = \frac{m_j}{m_S}, \quad \tilde{r}_j = \frac{r_j}{r_0}, \quad \tilde{d}_j = \frac{d_j}{m_j r_j^2 \omega_1^2},$$

а остальные безразмерные переменные совпадают с описанными ранее. Далее, символ " \sim " над безразмерными параметрами писать не будем.

Рассмотрим стационарные режимы движения ротора, при которых осевая линия вала и углы, описывающие положение балансировочных шариков, сохраняют постоянное положение во вращающейся системе координат. Для нахождения стационарных режимов положим в системе (24) $\ddot{\tilde{\mathbf{w}}} = \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = 0$, $\ddot{\alpha}_j = \dot{\alpha}_j = 0$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_* = \text{const}$, $\alpha_j = \alpha_j^* = \text{const}$. В результате получим следующие уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{\Omega}^2 + (id - \omega) \omega \mathbf{E}_n - (J_t + 2J_p) \omega^2 \mathbf{B} - m \omega^2 \mathbf{A}) \mathbf{w}_* = \omega^2 \left(\sum_{j=0}^N m_j r_j \mathbf{e}^{i\alpha_j^*} \right) \mathbf{a} \\ \operatorname{Im}[(\mathbf{w}_*^T \mathbf{a}) \mathbf{e}^{-i\alpha_j^*}] = 0, \quad j = 1 \dots N. \end{array} \right. \quad (25)$$

Стационарный режим, при котором осевая линия вала совпадает с осью Oz , назовем сбалансированным (С), в противном случае — несбалансированным (НС). Особо выделим частный случай, при котором ось вала

искривлена, но центр диска лежит на оси Oz . Этот режим назовем псевдосбалансированным (ПС).

Рассмотрим сбалансированный режим. Полагая $\mathbf{w}_* = 0$, из первого уравнения системы (25) получим

$$\sum_{j=0}^N m_j r_j \mathbf{e}^{i\alpha_j^*} = 0. \quad (26)$$

Условие (26) означает, что центр тяжести системы, образованной балансировочными шариками и дисбалансом, лежит в точке O_1 . Предположим, что все шарики имеют одинаковую массу m_1 и лежат на одинаковом расстоянии r_1 от центра диска. В таком случае, двух шариков оказывается достаточно, чтобы уравновесить любой дисбаланс для которого $m_0 r_0 \leq 2m_1 r_1$.

Обозначим за $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{w}_*^T \mathbf{a} = \rho \mathbf{e}^{i\beta}$ комплексный вектор, определяющий положение центра диска во вращающейся системе координат. Для псевдосбалансированного режима должны выполняться два условия: $\boldsymbol{\rho} = 0$ и $\mathbf{w}_* \neq 0$. Умножим первое уравнение (25) слева скалярно на $\overline{\mathbf{w}_*^T}$, получим, что псевдосбалансированный режим может существовать только при $d = 0$. Из первого уравнения системы (25) получим условие существования псевдосбалансированного режима

$$S_{11} + \frac{S_{12}^2 (J_t + 2J_p) \omega^2}{1 - S_{22} (J_t + 2J_p) \omega^2} = 0, \quad (27)$$

где S_{ij} можно найти по формулам (14 - 16), положив $\alpha = \sqrt{\omega}$.

В случае несбалансированного режима имеем $\rho \neq 0$. В этом случае вторая группа уравнений (25) будет удовлетворяться только при условиях $\beta - \alpha_j^* = \pi \delta_j$, где δ_j равняется либо 0, либо 1. Рассмотрим сумму из правой части первого уравнения (25)

$$\sum_{j=0}^N m_j r_j \mathbf{e}^{i\alpha_j^*} = m_0 + \sum_{j=1}^N m_j r_j \mathbf{e}^{i(\beta - \pi \delta_j)} = m_0 (1 + \mathbf{e}^{i\beta} \sigma), \quad (28)$$

где $\sigma = \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^N m_j r_j \mathbf{e}^{-i\pi \delta_j} \in \mathbb{R}$. Параметр σ назовем балансировочным ко-

эффициентом. Физически балансировочный коэффициент определяет положение центра масс системы шариков на линии, соединяющей текущее положение центра диска с его положением на неискривленном валу.

Рассмотрим три случая, при которых возможны несбалансированные режимы: $\sigma > 0$ — обозначим как режим НС1, $\sigma < 0$ — обозначим как режим НС2, $\sigma = 0$ — обозначим как режим НС3. Режимы НС1 и НС2 имеют место, когда центр масс балансировочных шариков находится соответственно на большем или меньшем расстоянии от неискривленного положения центра вала, чем его текущее положение. В режиме НС3 центр масс балансировочных шариков совпадает с текущим положением центра вала.

Подставив (28) в первое уравнение (25), получим

$$\mathbf{R} \mathbf{w}_* = \omega^2 m_0 (1 + \mathbf{e}^{i\beta} \sigma) \mathbf{a}, \quad (29)$$

где $\mathbf{R} = \Omega^2 + \omega(id - \omega)\mathbf{E}_n - (J_t + 2J_p)\omega^2\mathbf{B} - m\omega^2\mathbf{A}$. Заметим, что матрицу \mathbf{R} также можно записать в виде (8), поэтому для нее справедлива формула (9). Выражая из уравнения (29) \mathbf{w}_* и умножая его скалярно на вектор \mathbf{a} , получим уравнение относительно амплитуды ρ корни которого равны

$$\rho = \omega^2 m_0 \left(\sigma \operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] \pm \sqrt{\operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}]^2 + (1 - \sigma^2) \operatorname{Im}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}]^2} \right). \quad (30)$$

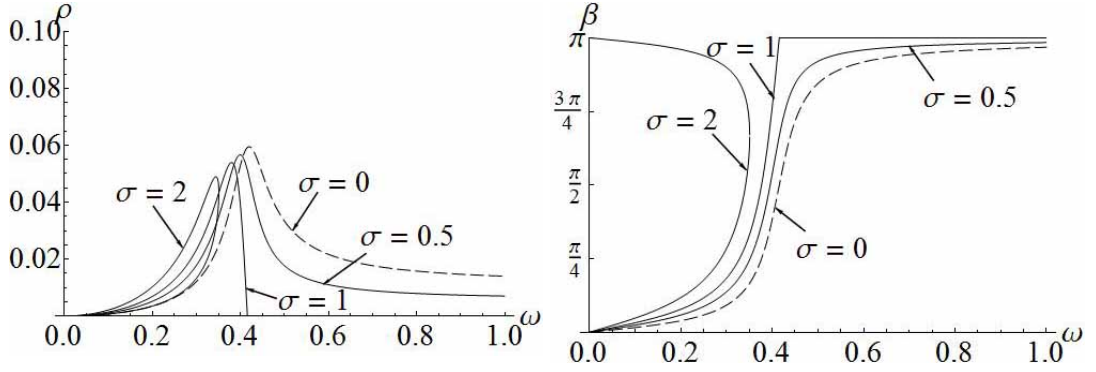


Рис. 4. АЧХ и ФЧХ стационарных режимов типа HC1

На рис. 4 представлена зависимость амплитуды и фазы от скорости вращения для режима HC1. Условия существования несбалансированных стационарных режимов, обусловленные положительностью амплитуды ρ , представлены в таблице 1.

Режим	Условие существования	Кол-во корней
HC1	$0 < \sigma < 1$	1
	$\sigma = 1, \operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] > 0$	1
	$\sigma > 1, \operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] \geq \sqrt{\sigma^2 - 1} \operatorname{Im}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] $	2
HC2	$-1 < \sigma < 0$	1
	$\sigma = -1, \operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] < 0$	1
	$\sigma < -1, \operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] \leq -\sqrt{\sigma^2 - 1} \operatorname{Im}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}] $	2
HC3	$\sigma = 0$	1

Таблица 1. Условия существования режимов HC1, HC2 и HC3

В разделе 2.3 проводится исследование устойчивости стационарных решений системы (24), путем анализа уравнений возмущенного движения. Пусть $\Delta \mathbf{w}$ и $\Delta \alpha_j, j = 1, 2, \dots, N$ — малые отклонения обобщенных координат от стационарных значений. Подставляя $\alpha_j = \alpha_j^* + \Delta \alpha_j, \mathbf{w} = \mathbf{w}_* + \Delta \mathbf{w}$ в уравнения (24), разлагая в ряд по малым отклонениям, пренебрегая малыми второго порядка и учитывая, что \mathbf{w}_* и α_j^* удовлетворяют системе

уравнений (25), получим линейную систему уравнений в вариациях

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}_n + J_t \mathbf{B} + m \mathbf{A})(\Delta \ddot{\mathbf{w}} + 2i\omega \Delta \dot{\mathbf{w}} - \omega^2 \Delta \mathbf{w}) + (2iJ_p \omega \mathbf{B} + d \mathbf{E}_n)(\Delta \dot{\mathbf{w}} + i\omega \Delta \mathbf{w}) \\ \quad + \sum_{j=1}^N m_j r_j (i\Delta \ddot{\alpha}_j - 2\Delta \dot{\alpha}_j \omega - i\omega^2 \Delta \alpha_j) \mathbf{e}^{i\alpha_j^*} \mathbf{a} + \mathbf{\Omega}^2 \Delta \mathbf{w} = 0, \\ \Delta \ddot{\alpha}_j + \frac{1}{r_j} \text{Im}[(\Delta \ddot{\mathbf{w}} + 2i\omega \Delta \dot{\mathbf{w}} - \omega^2 \Delta \mathbf{w} + i\omega^2 \Delta \alpha_j \mathbf{w}_*)^T \mathbf{e}^{-i\alpha_j^*}] \mathbf{a} \\ \quad + d_j \Delta \dot{\alpha}_j = 0, \quad j = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (31)$$

Ищем решение (31) в виде $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}^0 \mathbf{e}^{\lambda t}$ и $\Delta \alpha_j = \alpha_j^0 \mathbf{e}^{\lambda t}$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[(\lambda + i\omega)^4 \left(\sum_{j=1}^N m_j r_j \mathbf{e}^{i(\alpha_k^* - \alpha_j^*)} \alpha_j^0 \right) \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a} - \omega^2 \mathbf{e}^{-i\alpha_k^*} \boldsymbol{\rho} \alpha_k^0 \right] \\ - (\lambda + d_k) r_k \lambda \alpha_k^0 = 0, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\mathbf{R}(\lambda) = (\mathbf{E}_n + J_t \mathbf{B} + m \mathbf{A})(\lambda + i\omega)^2 + (2iJ_p \omega \mathbf{B} + d \mathbf{E}_n)(\lambda + i\omega) + \mathbf{\Omega}^2$.

Исследуем устойчивость сбалансированного стационарного режима в случае, когда АБУ имеет два балансировочных шарика одинаковой массы и $d_1 = d_2$. Поскольку (32) является системой линейных однородных уравнений относительно α_1^0 и α_2^0 , то для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель ее был равен нулю. Из этого условия получаем характеристическое уравнение для определения λ

$$\left| 1 - \frac{(\lambda + d_1)\lambda}{m_1(\lambda + i\omega)^4 \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a}} \right|^2 = (\cos 2\alpha_2^*)^2. \quad (33)$$

Пусть λ_s , $s = 0, 1, \dots$ — корни уравнения (33), упорядоченные по возрастанию. В работе показано, что $\lambda_s^0 \approx -\frac{d}{2} \pm i\nu_s$ при $|\lambda_s| \gg 1$. То есть достаточно большие по модулю корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Таким образом, можно констатировать, что устойчивость сбалансированного стационарного режима определяется первыми корнями характеристического уравнения (33).

Устойчивости псевдосбалансированного режима определяется корнями уравнения (32), которое при $N = 1$ и $\boldsymbol{\rho} = 0$, принимает вид

$$\text{Re} [(\lambda + i\omega)^4 \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a}] m_1 - (\lambda + d_1)\lambda = 0. \quad (34)$$

Заметим, что при наличии более одного балансировочного шарика ($N > 1$) система (32) становится неразрешима, так как при любых значениях α_j^* существует свой псевдосбалансированный режим. Учитывая условие существования псевдосбалансированного режима (27), заметим, что выражение для $\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(0) \mathbf{a}$ будет тождественно равно нулю. Следовательно, $\lambda = 0$ является корнем уравнения (34). Поэтому этот режим является неустойчивым для любых значений параметров.

Для анализа устойчивости несбалансированных режимов НС1, НС2 и НС3 вернемся к уравнениям (32). Учитывая, что $\alpha_j^* = \beta - \pi\delta_j$ и $|\mathbf{w}_*^T \mathbf{a}| = \rho = \rho e^{i\beta}$, получим систему характеристических уравнений

$$((\lambda + d_k)r_k \lambda + \omega^2 e^{i\pi\delta_k} \rho) \alpha_k^0 - \left(\sum_{j=1}^N m_j r_j e^{i\pi(\delta_j - \delta_k)} \alpha_j^0 \right) \operatorname{Re}[(\lambda + i\omega)^4 \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a}] = 0. \quad (35)$$

Рассмотрим режим НС2. Приравняв нулю определитель системы (35), получим систему уравнений для определения характеристических чисел λ

$$\begin{cases} (\lambda + d_1)r_1 \lambda - \omega^2 \rho = 0 \\ (\lambda + d_1)r_1 \lambda - \omega^2 \rho - 2m_1 r_1 \operatorname{Re}[(\lambda + i\omega)^4 \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a}] = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения для режима НС2 следует, что этот режим всегда неустойчив, так как свободный член этого уравнения $-\omega^2 \rho$ всегда меньше нуля.

Условие равенства нулю определителя системы (35) для режима НС3 примет следующий вид

$$-2\lambda(\lambda + d_1)m_1 r_1^2 \operatorname{Re}[(\lambda + i\omega)^4 \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a}] + (\lambda(\lambda + d_1)r_1)^2 - (\omega^2 \rho)^2 = 0. \quad (36)$$

Для характеристического полинома (36) свободный член c_n и коэффициент при старшей степени c_0 будут равны

$$c_n = -\omega^4 \rho^2, \quad c_0 = 1 - 2m_1 \left(\frac{1 + |\mathbf{b}|^2 J_t}{|\mathbf{a}|^2 (1 + |\mathbf{b}|^2 J_t) - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})^2 J_t} + m \right)^{-1}.$$

Из неравенства Коши-Буняковского $(\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ следует, что $c_0 > 0$, поэтому режим НС3 неустойчив.

Исследуем устойчивость режима НС1. Для него условие равенства нулю определителя системы (35) примет вид

$$\begin{cases} (\lambda + d_1)r_1 \lambda + \omega^2 \rho = 0 \\ (\lambda + d_1)r_1 \lambda + \omega^2 \rho - 2m_1 r_1 \operatorname{Re}[(\lambda + i\omega)^4 \mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1}(\lambda) \mathbf{a}] = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Вещественная часть корней первого из этих уравнений всегда меньше нуля. Повторив действия, проделанные для режима НС3, можно доказать, что коэффициент при старшей степени второго полинома больше нуля. Найдем свободный член этого полинома

$$c_n = \pm \omega^4 \sqrt{m_0^2 \operatorname{Re}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}]^2 + (m_0^2 - 4m_1^2 r_1^2) \operatorname{Im}[\mathbf{a}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}]^2}$$

Отсюда следует, что решение уравнения (30) со знаком минус перед корнем, существующее при $\sigma > 1$ (таблица 1), неустойчиво для любых значений параметров. Для $|\lambda| \gg 1$ второе уравнение системы (37) можно привести к виду эквивалентному характеристическому уравнению уравновешенного режима (33). Поэтому устойчивость верхней ветви режима НС1 (со знаком плюс перед корнем) также будет определяться малыми корнями.

Для определения характера устойчивости по первым корням воспользуемся критерием Рауса и методом D-разбиений, а также интегральным критерием устойчивости, который является следствием принципа аргумента Коши. Для режимов С (рис. 5) и НС1 строятся двухпараметрические диаграммы устойчивости, показывающие области параметров при которых данные режимы устойчивы. Проводится сравнение с аналогичными диаграммами устойчивости для моделей ротора с невесомым валом.

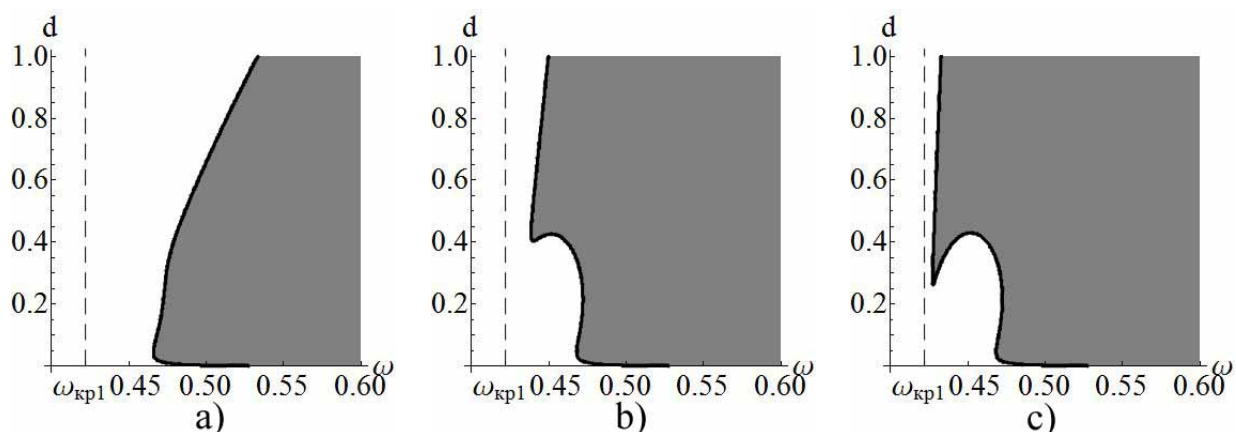


Рис. 5. Диаграммы устойчивости сбалансированного стационарного режима в плоскости параметров (d, ω) для симметричного ротора

В разделе 2.4 представлены результаты численного интегрирования уравнений, описывающих динамику системы. Строятся графики, отображающие динамику процесса выхода на стационарный режим при вращении ротора с постоянной угловой скоростью. Экспериментально обнаружен установившийся предельный цикл для значений параметров лежащих в области неустойчивости стационарных режимов. Кроме того моделируется нестационарный переход через резонансные частоты с целью оценки эффективности работы автобалансирующего устройства.

В заключении излагаются основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации.

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

1. *Быков В.Г., Мельников А.Е.* Математическая модель гибкого ротора на основе обобщенных Лагранжевых координат. // Вестник СПбГУ, сер.1, вып. 4, 2010, стр. 110-118.
2. *Быков В.Г., Мельников А.Е.* Автоматическая балансировка диска на гибком массивном валу. // Вестник СПбГУ, сер.1, вып. 1, 2011, стр. 116-126.

Другие публикации

3. *Мельников А.Е.* Динамика упругого статически неуравновешенного ротора. // Пятые Поляховские чтения. Избранные труды. - СПб. Изд. ВВМ. 2009. стр. 88-93.