

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ВАГАЙЦЕВ Владимир Игоревич

**АЛГОРИТМЫ ПОИСКА КОЛЕБАНИЙ В  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ПРОЦЕДУР ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ**

05.13.18 - Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2010

Работа выполнена на кафедре прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научные руководители: член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор ЛЕОНОВ Геннадий Алексеевич

кандидат физико-математических наук,  
доцент КУЗНЕЦОВ Николай Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович  
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор технических наук,  
ведущий научный сотрудник  
АНДРИЕВСКИЙ Борис Ростиславич  
(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем машиноведения РАН)

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет

Защита состоится “16” декабря 2010 г. в \_\_\_ часов на заседании совета Д 212.232.51 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Даугавет И. К.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации разработаны алгоритмы поиска периодических и хаотических колебаний, основанные на объединении метода гармонической линеаризации и прикладной теории бифуркаций. Эти алгоритмы применены к вычислениям аттракторов в цепях Чуа.

**Актуальность темы.** Нелинейные колебания являются основой современной радиотехники. Импульсные колебания тактовых генераторов — основой компьютерной и телекоммуникационной техники. Нелинейные колебания в системах управления часто приводят к выходу из строя таких систем. Поэтому задача локализации и вычисления таких колебаний является актуальной.

Основное внимание в настоящей работе уделено скрытым колебаниям, т.е. колебаниям, которые не устанавливаются после переходного процесса из окрестностей стационарных состояний.

Таким образом, разработанный аналитико-численный метод позволяет локализовывать и вычислять колебания нелинейных систем, которые являются скрытыми.

**Цель работы.** Целью работы является разработка и реализация алгоритмов поиска периодических и хаотических колебаний в динамических системах с использованием аналитических и численных методов исследования колебаний динамических систем, современных вычислительных средств и специализированных математических пакетов.

**Методы исследования.** Методы исследования включают в себя аналитические методы гармонической линеаризации и численные методы локализации последовательностей аттракторов динамических систем. Разработанный многошаговый аналитико-численный метод поиска колебаний реализован в пакете Matlab.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

- Описан и обоснован метод гармонической линеаризации для динамических систем с непрерывной векторной нелинейностью, который

применяется в качестве первого шага в алгоритме локализации аттракторов.

- Разработан и реализован в пакете Matlab алгоритм численной локализации скрытых аттракторов для системы Чуа.
- Разработан и реализован в пакете Matlab алгоритм численной локализации скрытых аттракторов для модифицированной системы Чуа с векторной нелинейностью.

**Достоверность результатов.** Все полученные аналитические результаты математически строго доказаны. Разработанные в диссертации алгоритмы локализации дают для классических аттракторов Чуа такие же результаты как в известных работах L.O. Chua, C.W. Wu, A. Huang, G.Q. Zhong, G. Chen, E. Bilotta, P. Pantano и др.

**Научная новизна.** Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

**Теоретическая и практическая ценность.** Разработанные в диссертации методы позволяют производить эффективную численную локализацию скрытых колебаний в нелинейных динамических системах, например, локализовывать и вычислять скрытые странные аттракторы в системе Чуа.

**Апробация работы.** Результаты данной работы докладывались на международных конференциях “International Conference on Dynamics, Vibration and Control” (Китай, Гуанчжоу – 2010), “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления”, имени Е.С. Пятницкого (Россия, Москва – 2010), “IFAC Workshop Periodic Control Systems” (Турция, Анталья – 2010), конференция памяти В.Я. Ривкинда (Финляндия, Ювяскюля – 2010) и на семинарах кафедры прикладной кибернетики (2008 – 2010).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 6 печатных работах, в том числе в 2 статьях.

Статьи [1,2] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

В работах [1–3,5,6] соавторам принадлежит постановка задачи. В работе [1] диссертанту принадлежат теоретические результаты по обоснованию метода для систем с многомерной нелинейностью, реализация алгоритмов и компьютерное моделирование. В работах [2,3,5,6] диссертанту принадлежат реализация алгоритмов и компьютерное моделирование.

**Объем и структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, трех приложений, списка литературы, включающего 110 наименований, изложена на 132 страницах машинописного текста и содержит 80 рисунков.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дается история методов поиска колебаний в многомерных динамических системах (в частности, метода гармонической линеаризации) и представлен обзор литературы, посвященной изучению области применения метода гармонической линеаризации и оценке его погрешности. Также во введении обосновываются актуальность и научная новизна диссертации, формулируются задачи, решаемые в диссертации.

**Первая глава** посвящена описанию и обоснованию многошагового аналитико-численного метода поиска локально устойчивых колебаний в многомерных динамических системах с непрерывной векторной нелинейностью, т.е. в системах вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{P}$  — постоянная  $n \times n$ -матрица,  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$  — непрерывная  $n$ -мерная вектор-функция и  $\boldsymbol{\psi}(0) = 0$ .

Данный многошаговый метод основан на процедуре гармонической линеаризации, т.е. на первом шагом является поиск близкого к гармоническому стартового периодического решения. Для поиска периодического решения, близкого к гармоническому колебанию, рассмотрим матрицу  $\mathbf{K}$  такую, чтобы матрица  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} + \mathbf{K}$  линейной системы

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{z} \quad (2)$$

имела пару чисто мнимых собственных значений  $\pm i\omega_0$  ( $\omega_0 > 0$ ), а остальные ее собственные значения имели отрицательные вещественные части. Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}\mathbf{x}$ .

Введем конечную последовательность непрерывных функций  $\boldsymbol{\varphi}^0(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}^1(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\varphi}^m(\mathbf{x})$  так, чтобы графики соседних функций  $\boldsymbol{\varphi}^j$  и  $\boldsymbol{\varphi}^{j+1}$  в некотором смысле мало отличались друг от друга, функция  $\boldsymbol{\varphi}^0(\mathbf{x})$  была мала и  $\boldsymbol{\varphi}^m(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ .

Малость функции  $\boldsymbol{\varphi}^0(\mathbf{x})$  позволяет обосновать существование близкого к гармоническому устойчивого периодического решения  $\mathbf{x}^0(t)$  для системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}^0(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Все точки этого устойчивого периодического решения  $\mathbf{x}^0(t)$  либо расположены в области притяжения устойчивого периодического решения  $\mathbf{x}^1(t)$  системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}^j(\mathbf{x}) \quad (5)$$

с  $j = 1$ , либо при переходе от системы (4) к системе (5) с  $j = 1$  наблюдается бифуркация потери устойчивости и исчезновения периодического решения. В первом случае можно численно определить  $\mathbf{x}^1(t)$ , выпуская траекторию системы (5) с  $j = 1$  из начальной точки  $\mathbf{x}^0(0)$ . Вычислительная процедура, стартуя из точки  $\mathbf{x}^0(0)$ , после переходного процесса выходит на периодическое решение  $\mathbf{x}^1(t)$  и вычисляет его. Для этого промежуток  $[0, T]$ , на котором происходит вычисление, должен быть достаточно большим.

После вычисления  $\mathbf{x}^1(t)$  можно перейти к следующей системе (5) с  $j = 2$  и организовать процедуру вычисления локально устойчивого колебания  $\mathbf{x}^2(t)$ , выпуская из начальной точки  $\mathbf{x}^2(0) = \mathbf{x}^1(T)$  траекторию, которая при возрастании  $t$  приближается к траектории  $\mathbf{x}^2(t)$ .

Продолжая эту процедуру далее и вычисляя  $\mathbf{x}^j(t)$ , используя траектории системы (5) с начальными данными  $\mathbf{x}^j(0) = \mathbf{x}^{j-1}(T)$ , либо приходим к вычислению локально устойчивого колебания системы (5) с  $j = m$  (т.е.

исходной системы (3)), либо на некотором шаге наблюдаем бифуркацию потери устойчивости и останавливаем вычислительный процесс. Отметим, что на некотором шаге вместо периодического решения здесь может возникнуть локально устойчивый аттрактор. Этот эффект подробно описан в настоящей диссертации для систем Чуа.

Наиболее простым и естественным классом функций  $\varphi^j$  в описанной выше процедуре являются функции  $\varphi^0(\mathbf{x}) = \varepsilon\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\varphi^1(\mathbf{x}) = \varepsilon_1\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\dots$ ,  $\varphi^{m-1}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{m-1}\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\varphi^m(x) = \varphi(\mathbf{x})$ , где  $\varepsilon$  - "классический" малый положительный параметр и, например,  $\varepsilon_j = j/m$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим систему (4) с нелинейностью  $\varphi^0(\mathbf{x}) = \varepsilon\varphi(\mathbf{x})$ , где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Будем полагать, что  $\varphi(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию Липшица в некоторой достаточно большой окрестности  $G$  нулевого решения

$$|\varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')| \leq L|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|, \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in G. \quad (6)$$

Неособым линейным преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$  систему (4) приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega_0 y_2 + \varepsilon\varphi_1(y_1, y_2, \mathbf{y}_3), \\ \dot{y}_2 &= \omega_0 y_1 + \varepsilon\varphi_2(y_1, y_2, \mathbf{y}_3), \\ \dot{\mathbf{y}}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{y}_3 + \varepsilon\varphi_3(y_1, y_2, \mathbf{y}_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\varphi(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{y}) \\ \varphi_2(\mathbf{y}) \\ \varphi_3(\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{pmatrix}, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y}_3 \in \mathbb{R}^{n-2},$$

$\varphi_1, \varphi_2$  — непрерывные скалярные функции,  $\varphi_3$  —  $(n - 2)$ -мерная непрерывная вектор-функция,  $\mathbf{A}$  — постоянная  $(n - 2) \times (n - 2)$  матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части.

Согласно (6), функции  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$  также удовлетворяют аналогичным условиям Липшица.

Для случая со скалярной нелинейностью имеем соотношения  $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{q}\varphi(\mathbf{r}^*\mathbf{y})$  и  $\mathbf{K} = k\mathbf{q}\mathbf{r}^*$ , где  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$  —  $n$ -мерные векторы,  $\varphi(\sigma)$  — непрерывная скалярная функция ( $\varphi(0) = 0$ ),  $k$  — коэффициент гармонической линейризации,  $*$  — операция транспонирования. Тогда после применения неособого

линейного преобразования нелинейности системы (7) примут вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(y_1, y_2, \mathbf{y}_3) &= b_1\varphi(y_1 + \mathbf{c}^*\mathbf{y}_3), \\ \varphi_2(y_1, y_2, \mathbf{y}_3) &= b_2\varphi(y_1 + \mathbf{c}^*\mathbf{y}_3), \\ \varphi_3(y_1, y_2, \mathbf{y}_3) &= \mathbf{b}\varphi(y_1 + \mathbf{c}^*\mathbf{y}_3),\end{aligned}\tag{8}$$

где  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  —  $(n - 2)$ -мерные векторы,  $b_1$  и  $b_2$  — некоторые вещественные числа.

Не умаляя общности, можно принять, что для матрицы  $\mathbf{A}$  существует положительное число  $\alpha > 0$ , такое что

$$\mathbf{y}_3^*(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)\mathbf{y}_3 \leq -2\alpha|\mathbf{y}_3|^2, \quad \forall \mathbf{y}_3 \in \mathbb{R}^{n-2}.\tag{9}$$

Рассмотрим следующее множество в фазовом пространстве системы (7)

$$\Omega = \{y_1 \in [a_1, a_2], \quad y_2 = 0, \quad |\mathbf{y}_3| \leq D\varepsilon\},$$

здесь  $a_1, a_2, D$  — некоторые положительные числа.

Из вида системы (7) и условия (6) получим соотношения для решений нелинейной системы (7) с начальными данными  $(y_1(0), y_2(0) = 0, \mathbf{y}_3(0)) \in \Omega$  при  $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \cos(\omega_0 t)y_1(0) + O(\varepsilon), \\ y_2(t) &= \sin(\omega_0 t)y_1(0) + O(\varepsilon), \\ \mathbf{y}_3(t) &= \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{y}_3(0) + \mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon),\end{aligned}\tag{10}$$

где  $\mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon)$  —  $(n - 2)$ -мерный вектор с компонентами  $O(\varepsilon)$ .

Из формул (10) следует, что для любой точки  $(y_1(0), y_2(0) = 0, \mathbf{y}_3(0)) \in \Omega$  существует число

$$T = T(\varepsilon, y_1(0), \mathbf{y}_3(0)) = 2\pi/\omega_0 + O(\varepsilon)$$

при котором

$$y_1(T) > 0, \quad y_2(T) = 0,$$

и одновременно не выполнены соотношения

$$y_1(t) > 0, \quad y_2(t) = 0, \quad \forall t \in (0, T).$$

Введем отображение Пуанкаре  $F$  множества  $\Omega$  для траекторий системы (7)

$$F \begin{pmatrix} \|y_1(0)\| \\ 0 \\ \|\mathbf{y}_3(0)\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|y_1(T)\| \\ 0 \\ \|\mathbf{y}_3(T)\| \end{pmatrix} \quad (11)$$

Введем описывающую функцию

$$\begin{aligned} \Phi(a) = & \int_0^{2\pi/\omega_0} \left[ \cos(\omega_0 t) \varphi_1(a \cos(\omega_0 t), a \sin(\omega_0 t), 0) + \right. \\ & \left. + \sin(\omega_0 t) \varphi_2(a \cos(\omega_0 t), a \sin(\omega_0 t), 0) \right] dt. \end{aligned}$$

В работе доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если выполнены неравенства*

$$\Phi(a_1) > 0, \quad \Phi(a_2) < 0, \quad (12)$$

*то при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  отображение Пуанкаре (11) множества  $\Omega$  является отображением в себя:  $F\Omega \subset \Omega$ .*

**Следствие.** *Если выполнены неравенства (12), то при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  система (7) имеет периодическое решение с периодом*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon).$$

*Это решение устойчиво в том смысле, что его окрестность  $\Omega$  отображается в себя:  $F\Omega \subset \Omega$ .*

**Теорема 2.** *Если неравенства (12) противоположного знака, то при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  отображение Пуанкаре (11) множества  $\Omega$  имеет гиперболический характер: происходит сжатие по  $x_3$  и растяжение по  $x_1$ :  $Fa_1 < a_1$ ,  $Fa_2 > a_2$ .*

Эти результаты являются обобщением на векторный случай результатов Г.А. Леонова и продолжают исследования, начатые Б.В. Булгаковым (см. книгу Б.В. Булгакова “Колебания”, М.: Гостехиздат, 1954).

**Во второй главе** на основе разработанного метода производится численная локализация скрытых аттракторов системы Чуа. Рассмотрим

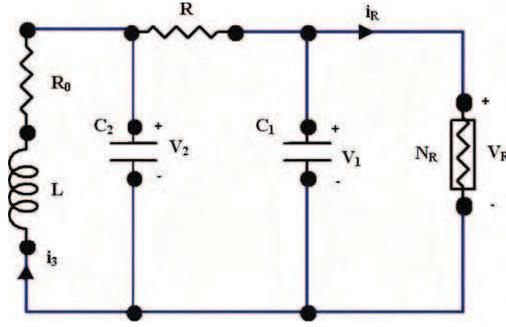


Рис. 1. Цепь Чуа. Электрическая схема с обратной связью.

систему, описывающую поведение цепи Чуа с пятью линейными элементами (см. Рис. 1), записанную в безразмерных координатах

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha f(x), \\ \dot{y} &= (x - y + z), \\ \dot{z} &= -(\beta y + \gamma z),\end{aligned}\tag{13}$$

где  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  - параметры линейной части системы Чуа, функция

$$f(x) = m_1 x + (m_0 - m_1) \text{sat}(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)\tag{14}$$

характеризует нелинейный элемент системы (13), называемый также "диодом Чуа". Поведение такой модели описано в работах Т. Matsumoto, L.O. Chua, C.W. Wu, G.Q. Zhong, A. Huang, G. Chen, M.E. Yalcin, J.A.K. Suykens, J. Vandewalle, R. Barboza, E. Bilotta, P. Pantano и др.

Рассмотрим систему Чуа в виде системы Лурье

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^*\mathbf{x}),\tag{15}$$

где

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

и

$$\psi(x) = (m_0 - m_1) \text{sat}(x).\tag{16}$$

Введем коэффициент гармонической линейризации  $k$ , малый параметр  $\varepsilon$  и перепишем систему (15) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}_0\mathbf{x} + \mathbf{q}\varepsilon\varphi(\mathbf{r}^*\mathbf{x}),\tag{17}$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} + k\mathbf{q}\mathbf{r}^* = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1 + k) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi(\sigma) = \psi(\sigma) - k\sigma,$$

$$\lambda_{1,2}^{\mathbf{P}_0} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_3^{\mathbf{P}_0} = A = -d < 0.$$

Далее систему (17) при помощи неособого линейного преобразования  $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$  приведем к виду (7) с нелинейностями (8)

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{b}\varepsilon\varphi(\mathbf{u}^*\mathbf{y}), \quad (18)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}.$$

Выпишем передаточные функции  $W_{\mathbf{P}_0}(p)$  системы (17) и  $W_{\mathbf{H}}(p)$  системы (18)

$$W_{\mathbf{P}_0}(p) = \mathbf{r}^*(\mathbf{P}_0 - p\mathbf{I})^{-1}\mathbf{q},$$

$$W_{\mathbf{H}}(p) = \frac{-b_1p + b_2\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{h}{p + d}. \quad (19)$$

Используя равенство передаточных функций систем (17) и (18), получим соотношения

$$k = \frac{-\alpha(m_1 + m_1\gamma + \gamma) + \omega_0^2 - \gamma - \beta}{\alpha(1 + \gamma)},$$

$$d = \frac{\alpha + \omega_0^2 - \beta + 1 + \gamma + \gamma^2}{1 + \gamma},$$

$$h = \frac{\alpha(\gamma + \beta - (1 + \gamma)d + d^2)}{\omega_0^2 + d^2},$$

$$b_1 = \frac{\alpha(\gamma + \beta - \omega_0^2 - (1 + \gamma)d)}{\omega_0^2 + d^2},$$

$$b_2 = \frac{\alpha((1 + \gamma - d)\omega_0^2 + (\gamma + \beta)d)}{\omega_0(\omega_0^2 + d^2)}.$$

Поскольку система (17) приводится к виду (18) неособым линейным преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ , для матрицы  $\mathbf{S}$  верны следующие соотношения

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{S}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{r}^*\mathbf{S}.$$

Решив эти матричные уравнения, найдем матрицу преобразования

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= 1, & s_{12} &= 0, & s_{13} &= -h, \\ s_{21} &= m_1 + 1 + k, & s_{22} &= -\frac{\omega_0}{\alpha}, & s_{23} &= -\frac{h(\alpha(m_1 + 1 + k) - d)}{\alpha}, \\ s_{31} &= \frac{\alpha(m_1 + k) - \omega_0^2}{\alpha}, & s_{32} &= -\frac{\alpha(\beta + \gamma)(m_1 + k) + \alpha\beta - \gamma\omega_0^2}{\alpha\omega_0}, \\ s_{33} &= h \frac{\alpha(m_1 + k)(d - 1) + d(1 + \alpha - d)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Для достаточно малых  $\varepsilon$  можно получить соотношения для начальных данных системы (18)

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где амплитуда  $a_0$  — это корень уравнения  $\Phi(a) = 0$ .

Используя соотношения (20), запишем соотношения между начальными данными систем (17) и (18)

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{S}\mathbf{y}(0) = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 s_{11} \\ a_0 s_{21} \\ a_0 s_{31} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полученные соотношения для начальных данных позволяют нам численно моделировать систему Чуа, записанную в виде (17), применяя вышеописанный многошаговый алгоритм. Возвращаясь к обозначениям системы Чуа, имеем следующие формулы для определения начальных данных:

$$x(0) = a_0, \quad y(0) = a_0(m_1 + 1 + k), \quad z(0) = a_0 \frac{\alpha(m_1 + k) - \omega_0^2}{\alpha}. \quad (21)$$

Рассмотрим систему Чуа с численными значениями параметров

$$\alpha = 8.4562, \quad \beta = 12.0732, \quad \gamma = 0.0052, \quad m_0 = -0.1768, \quad m_1 = -1.1468. \quad (22)$$

Численное моделирование систем Чуа будем проводить согласно описанному алгоритму, последовательно увеличивая  $\varepsilon$  с шагом 0.1 от значения  $\varepsilon_1 = 0.1$  до  $\varepsilon_{10} = 1$ .

На Рис. 2 показаны проекции на плоскость  $\{x, y\}$  решений классической системы Чуа при значениях параметра  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_7 = 0.7$  и  $\varepsilon_{10} = 1$  соответственно. На Рис. 3 изображена нелинейность  $\varepsilon\varphi(x)$  при  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_7 = 0.7$  и  $\varepsilon_{10} = 1$  и сектора устойчивости. Здесь при  $\varepsilon_1 = 0.1$  и  $\varepsilon_7 = 0.7$  нелинейность лежит в секторе неустойчивости, а при  $\varepsilon_{10} = 1.0$  — в секторе устойчивости.

Система (13) с параметрами (22) имеет три положения равновесия: локально устойчивое нулевое  $E_0$  и два симметричных неустойчивых седла  $E_{\pm}$ . Поведение траекторий системы вблизи положений равновесия показано на Рис. 4. В фазовом пространстве системы присутствуют устойчивые сепарирующие многообразия седел. Каждое из этих многообразий сепарирует фазовое пространство системы на траектории, стремящиеся к нулю и к бесконечности. Характеристические ляпуновские экспоненты локализованного аттрактора равны соответственно  $\lambda_1 = 2.2199$ ,  $\lambda_2 = -0.9913$ ,  $\lambda_3 = -0.9928$ . Таким образом, колебание, локализованное с помощью разработанного алгоритма в рассмотренной системе Чуа, является скрытым странным аттрактором, т.е. здесь невозможно классическое возбуждение хаотического колебания из окрестностей положений равновесия, которое изучалось в работах L.O. Chua, G. Chen, M. Komuro, T. Matsumoto, G.N. Lin, Zhong G.Q., E. Bilotta, P. Pantano и др.

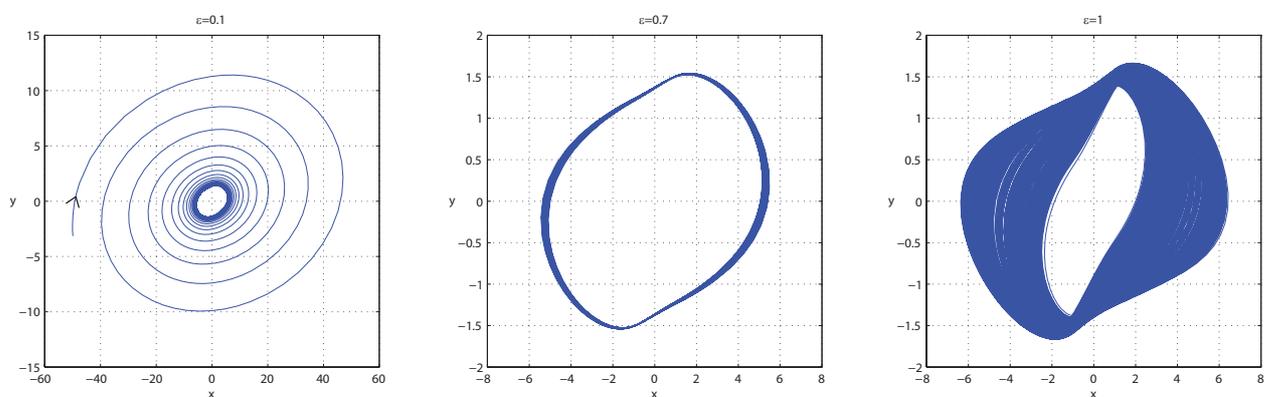


Рис. 2. Локализация скрытого аттрактора в классической системе Чуа.

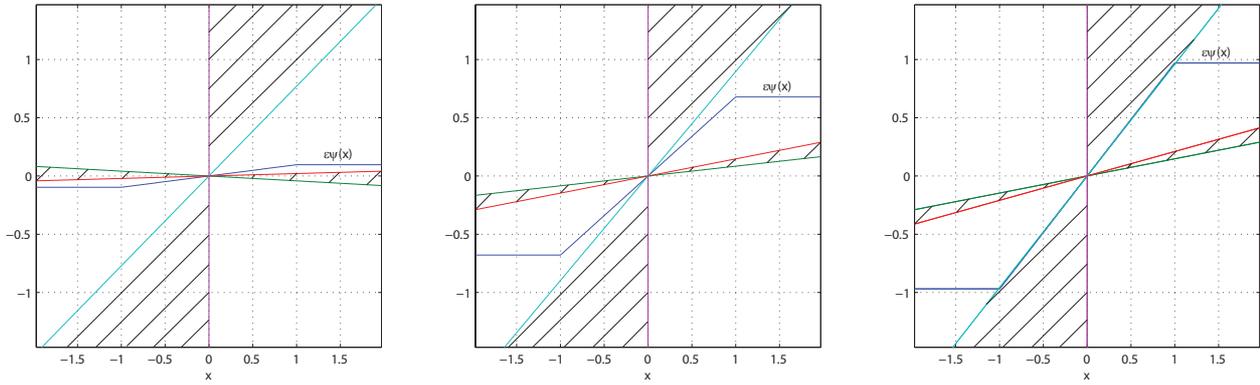


Рис. 3. Нелинейность и сектор устойчивости при  $\varepsilon = 0.1, 0.7, 1.0$ .

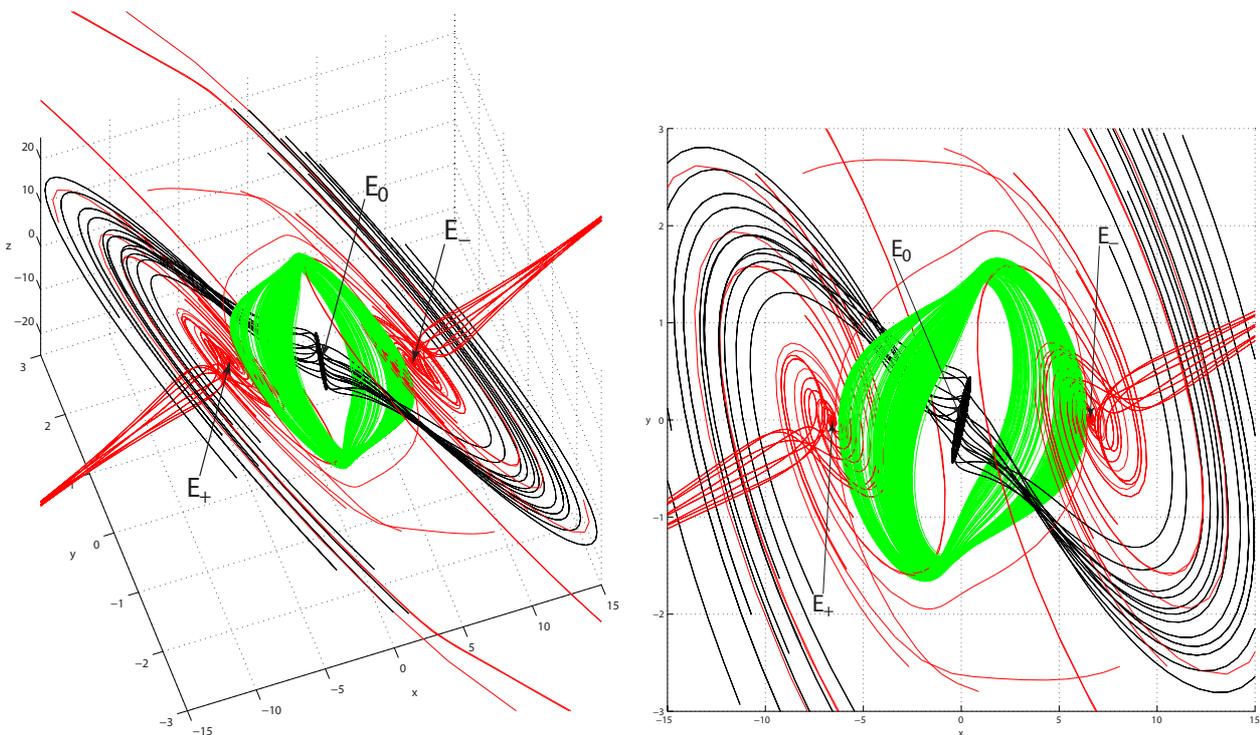


Рис. 4. Скрытый аттрактор в пространстве  $\{x, y, z\}$  и проекция на плоскость  $\{x, y\}$ .

Следуя работам J.A.K. Suykens, L.O. Chua, A. Huang, J. Vandewalle, M.E. Yalcin, F.A. Savaci, Tang K.S., Man K.F., Zhong G.Q., Chen G., в диссертации также рассмотрена обобщенная система Чуа, т.е. система (13) с модифицированной нелинейностью

$$\psi(x) = f(x) + \frac{1}{2}(s - m_0)(|x + \delta_0| - |x - \delta_0|). \quad (23)$$

Здесь  $\delta_0$  и  $s$  — параметры, отвечающие за устойчивость нулевого положе-

ния равновесия. Параметр  $s$  выбирается так, чтобы линейная часть обобщенной системы Чуа была устойчивой, параметр  $\delta_0$  определяет область устойчивости нулевого положения равновесия.

Для обобщенной системы Чуа также проведен аналог построения матрицы  $\mathbf{S}$  неособого линейного преобразования, обоснована актуальность применения многошаговой процедуры, вычислены характеристические ляпуновские экспоненты и получены аналогичные результаты локализации скрытых аттракторов.

Далее в диссертации рассмотрена модифицированная система Чуа с векторной нелинейностью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha f(x), \\ \dot{y} &= x - y + z + g(y), \\ \dot{z} &= -(\beta y + \gamma z), \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$f(x) = k_1 x + k_3 x^3 + k_5 x^5, \tag{25}$$

$$g(y) = cy^2. \tag{26}$$

Отметим, что матрицу  $\mathbf{K}$  в описанном в первой главе алгоритме можно сразу выбрать так, чтобы матрица  $\mathbf{P}_0$  имела нужный блочно-диагональный вид, т.е. чтобы  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}$ . В таком случае отпадает необходимость в построении матрицы преобразования  $\mathbf{S}$  для систем с векторной нелинейностью.

Для модифицированной системы Чуа на основе разработанного в 1 главе метода также проведена численная локализация скрытых аттракторов.

### **Приложения.**

В Приложении 1 представлен компьютерный код алгоритма локализации скрытых аттракторов классической системы Чуа.

В Приложении 2 представлен компьютерный код алгоритма локализации скрытых аттракторов обобщенной системы Чуа.

В Приложении 3 представлен компьютерный код алгоритма локализации скрытых аттракторов модифицированной системы Чуа с векторной нелинейностью.

**Публикации по теме диссертации.**

**Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:**

1. Леонов Г.А., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В. Алгоритм локализации аттракторов Чуа на основе метода гармонической линеаризации // Доклады Академии наук, 2010, сер. Теория управления, Том 433, Вып. 3, С. 323–327.

2. Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Локализация скрытых аттракторов обобщенной системы Чуа на основе метода гармонического баланса // Вестник С.-Петерб. ун-та, 2010, Сер. 1, Вып. 4, С. 62–76.

**Другие публикации:**

3. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Vagaitsev V.I. Algorithms for Localization of Chua Attractors // Proceedings of The Third International Conference on Dynamics, Vibration and Control, ICDVC-2010, 2010, Hangzhou, China, p. 247.

4. Вагайцев В.И. Аттракторы Чуа // XI Международная конференция “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” им. Пятницкого, Тезисы докладов, 2010, Москва, Россия, С. 81.

5. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Vagaitsev V.I. Analytical-Numerical Method for Attractor Localization of Generalized Chua’s System. // Abstracts of the International Conference “PSYCO2010”, 2010, Antalya, Turkey, p. 7–8.

6. Bragin V.O., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Vagaitsev V.I. Analytical-Numerical Methods for the Localization of Hidden Oscillations: Aizerman and Kalman Problems, Hidden Attractor in Chua Circuits // Abstracts of the International Workshop “Mathematical and Numerical Modelling in Science and Technology”, 2010, Jyväskylä, Finland.