САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КАБАРДОВ
Муаед Мусович

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Рябов Виктор Михайлович.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
профессор Меньшиков Григорий Григорьевич
(Санкт-Петербургский государственный университет),

доктор физико-математических наук
Хазанов Владимир Борисович
(Санкт-Петербургский государственный
морской технический университет),

Ведущая организация: Санкт-Петербургский экономико-математический
институт Российской академии наук.

Защита состоится "_____ " _______________ 2009 г. в _____ час. _____ мин. на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9.

Автореферат разослан "_____ " _______________ 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.49 А. А. Архипова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интегральное преобразование Лапласа

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \qquad (1)$$

где функция $F(s)$ — изображение, $f(t)$ — оригинал, представляет собой мощный инструмент для решения широкого класса прикладных задач математической физики. Одним из его главных достоинств является алгебраизация процедур математического анализа, с помощью которой удается свести интегральные и дифференциальные уравнения к более простым. Кроме того, изображение Лапласа является аналитической функцией в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \lambda$, что позволяет привлечь к исследованию решаемой задачи результаты теории функций комплексного переменного.

Как правило, при решении задач операционными методами наиболее трудным этапом является процесс обращения, т. е. возврат от изображения к оригиналу. Существуют таблицы соответствия функций-оригиналов и их изображений, "теоремы разложения", формула обращения Римана–Меллина, позволяющие точно или приближенно находить оригинал. Но решение практических задач приводит к изображениям, к которым не могут быть применены эти "классические" приемы обращения. Например, явный вид изображения может быть неизвестен, если уравнение оказалось неразрешимо в явном виде относительно изображения или содержит не выраженные аналитически компоненты. Если даже получено аналитическое представление изображения, может оказаться нецелесообразным применять точные методы обращения ввиду громоздкости формул для числового обозрения.

В этой связи разными авторами были предложены несколько десятков приближенных методов обращения.

В настоящее время наибольшей популярностью пользуются методы обращения, основанные либо на разложениях оригинала в ряды по специальным функциям либо на построении различных квадратурных формул для интеграла Римана–Меллина. Среди методов обращения, использующих ортогональные разложения, наибольшее количество работ посвящено тем, которые основаны на разложении оригинала в ряд Фурье по многочленам Лагерра.

В диссертации исследованы вопросы ускорения сходимости рядов Лагерра.

Цель работы. Исследовать вопросы сходимости рядов Лагерра и методы ускорения сходимости в применении к задаче обращения преобразования Лапласа.

Методы исследования. В работе использованы результаты теории суммирования рядов, интегральных преобразований, геометрической теории функций комплексного переменного, гармонического анализа, теории ортогональных рядов. Численные эксперименты проведены с использованием систем компьютерной математики Maple и Matlab.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждена доказанными теоремами и совпадением результатов численных экспериментов с выводами теоретических выкладок.

Результаты, выносимые на защиту.

1) Установление области регулярности преобразования Эйлера-Кноппа (ПЭК) и методов выбора параметра преобразования при требовании регулярности преобразования.

2) Обоснование схемы ускорения ряда Лагерра с помощью преобразования Эйлера-Кноппа при комплексных значениях параметра преобразования; предложены способы выбора оптимального значения параметра ряда Лагерра при регулярном и нерегулярном ПЭК.

3) Метод ускорения сходимости ряда Лагерра, равносильный методу ускорения с применением ПЭК; предложен способ выбора оптимальных значений

параметров этого преобразования.

4) Схемы вычисления точек и величин разрыва оригинала и его производных; предложена общая для линейных методов обращения схема получения формул для вычисления скачков оригинала и представления дельта-ядра.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический и практический интерес. Полученные результаты могут быть применены в теории преобразования рядов, ускорения сходимости рядов Лагерра, при разработке методов обращения преобразования Лапласа. Предложенные схемы выбора параметров ПЭК и рядов Лагерра имеют практическую полезность, так как позволяют максимально ускорить сходимость соответствующего метода обращения.

Апробация. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры вычислительной математики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, на международной конференции "Космос, астрономия, программирование" (Лавровские чтения), 20–22 мая 2008 г.

По теме диссертации опубликовано 6 работ [1–6 по автореферату], в том числе в журналах из перечня ВАК — [1–4 по автореферату]. В статье [4] диссертанту принадлежит реализация результатов, соавтору принадлежит идея выхода в комплексную плоскость при выборе параметра p преобразования ряда Лагерра.

Структура и объем работы. Работа изложена на 96 страницах, содержит 9 рисунков и 2 таблицы. Состоит из введения, пяти глав и заключения. Список цитируемой литературы включает 85 наименований и расположен в алфавитном порядке. Нумерация формул, лемм, теорем, замечаний, рисунков и таблиц — сквозная.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана постановка задачи обращения преобразования Лапласа и краткая характеристика особенностей ее решения и сформулирована цель диссертации и приведена аннотация глав.

Первая глава содержит обзор современных методов обращения преобразования Лапласа.

Во второй главе обсуждены вопросы регулярности ПЭК и даны рекомендации по устойчивому вычислению коэффициентов этого преобразования. В главе используется

Теорема 1 (Эйлер-Кнопп). *Пусть дана последовательность* $\{a_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *и*

$$A_k(p) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-p)^{k-j} a_j \tag{2}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p) \frac{z^k}{(1 - pz)^{k+1}}\,, \tag{3}$$

для всех значений z *и* p*, при которых элементы сумм существуют и ряды сходятся.*

Необходимо найти множество M значений параметра p, при которых область сходимости преобразованного ряда содержит круг сходимости исходного. При этом мы будем говорить, что преобразование (3) регулярно. Заметим, это понятие шире рассматриваемого обычно в теории суммирования рядов.

Пусть $A(p) = \lim\limits_{k\to\infty} |A_k(p)|^{1/k}$. Тогда область сходимости преобразованного ряда определяется неравенством

$$A(p) \left| \frac{z}{1 - pz} \right| < 1. \tag{4}$$

Лемма 1. *$A(p) = \max_j \left|\frac{1}{z_j} - p\right|$, где z_j — особые точки функции $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.*

С учетом леммы 1 неравенство (4) преобразуется к виду

$$\max_j \left|\frac{1}{z_j} - p\right| \left|\frac{z}{1-pz}\right| < 1\,.$$

Обозначим $t = 1/z$ и запишем наше неравенство в виде $|t-p| > A(p)$. В плоскости (t) оно определяет внешность круга с центром в точке p, содержащего все особые точки $t_j = 1/z_j$. Чем меньше радиус этого круга, тем больше площадь соответствующего круга в плоскости (z).

Лемма 2. *Если при данном значении p суммирование регулярно, то $|a_k| = O\left((|p| + A(p))^k\right)$.*

Теорема 2. *ПЭК с параметром p регулярно тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. $p = \alpha t^0, \qquad 0 \le \alpha \le 1\,,$

2. $|p| + A(p) = |t^0|, \qquad A(p) = \lim_{k\to\infty} |A_k(p)|^{1/k} = \max_j |t_j - p|\,.$

Коэффициенты a_k могут быть получены как коэффициенты разложения Тейлора функции $\varphi(z)$:

$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

Но эта формула неустойчива при вычислениях. Вместо нее обычно применяют приближенные методы вычисления a_k. Значения $A_k(p)$, которые нам и нужны, можно вычислить затем по формуле (2). При этом происходит излишняя потеря точности. Чтобы избежать этого, введем новую переменную $w = z/(1-pz)$ и, пользуясь равенством (3), запишем

$$\Phi(w) = \frac{1}{1+pw}\,\varphi\left(\frac{w}{1+pw}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p) w^k\,.$$

При требовании регулярности ПЭК все точки t_j принадлежат кругу $|t-p| < 1$ и функция $\Phi(w)$ регулярна в круге $|w| \le 1$. Это позволяет применять те же средства нахождения коэффициентов $A_k(p)$, которые используются для вычисления коэффициентов исходного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. При этом сокращается и объем вычислений и погрешность, возникающая при вычислении чисел $A_k(p)$ через медленно сходящиеся a_k.

В третьей главе изложена схема ускорения сходимости метода Пиконе-Трикоми обращения преобразования Лапласа, основанного на разложении оригинала в ряд Фурье по многочленам Лагерра.

Пусть дано изображение

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \qquad \operatorname{Re} s > \lambda \quad (\lambda \in \mathrm{R}). \tag{5}$$

Оригинал $f(t)$ разложим в ряд по многочленам Лагерра:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(bt)\,, \tag{6}$$

где b — положительный параметр, $b > 2\lambda$. Подставив (6) в (5), получим формальное равенство

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(s-b)^k}{s^{k+1}}\,. \tag{7}$$

Предположим, что $sF(s)$ регулярна в окрестности бесконечности. Отображением $z = (s-b)/s$ преобразуем ряд (7) в степенной:

$$sF(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(s-b)^k}{s^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \varphi(z)\,. \tag{8}$$

Из предположения регулярности функции $sF(s)$ в окрестности бесконечности и условия $b > \max\{0, 2\lambda\}$ следует, что функция $\varphi(z)$ регулярна в некотором круге $|z| < r$ радиусом $r > 1$.

ПЭК ряда (8) имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p) \frac{z^k}{(1-p\,z)^{k+1}}\,, \quad A_k(p) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-p)^{k-j} a_j\ .$$

Теорема 3. *Пусть функция-оригинал* $f(t)$ *представима в виде* (6), *а параметр* p *удовлетворяет неравенству* $\operatorname{Re} p < 1$. *Тогда*

$$f(t) = \exp\left(\frac{bp\,t}{p-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(p)}{(1-p)^{k+1}}\, L_k\!\left(\frac{bt}{1-p}\right). \tag{9}$$

З а м е ч а н и е 1. Условие теоремы $\operatorname{Re} p<1$ выполнено, если $sF(s)$ регулярна в бесконечности, $b>2\lambda$ и $p \in M$.

Коэффициентом сходимости произвольного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ будем называть величину $KC = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |g_n(z)|^{1/n}$ и рассмотрим вопрос выбора параметра p так, чтобы КС ряда (9) был минимальным. КС ряда (9) равна

$$\frac{A(p)}{|1-p|}\,.$$

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\arg\min_{M} \frac{A(p)}{|1-p\,|} = \arg\min_{M} A(p)\,.$$

Выше было установлено, что p и $A(p)$ суть соответственно центр и радиус замкнутого круга $K(p, A(p))$, который содержит все особенности t_j, причем по крайней мере одна особенность лежит на границе этого круга. Отсюда следует, что $\frac{A(p)}{|1-p|} = \sin\frac{\beta}{2}$, где β – угол, под которым круг $K(p, A(p))$ виден из точки $t=1$. Поэтому $\arg\min \frac{A(p)}{|1-p|}$ есть центр круга $K(p, A(p))$, который виден под наименьшим углом из точки $t=1$. Из теоремы 4 следует, что для этого (при требовании регулярности) достаточно найти круг наименьшего радиуса, который целиком лежит в круге $K(0, |t^0|)$ и содержит все точки t_j.

При отображении $s = bt/(t-1)$ две прямые, проходящие через точку $t=1$ под углом γ друг к другу, перейдут в прямые, проходящие через точку $s=b$ под углом $-\gamma$. Внутренность окружности $\partial K(p, A(p))$ перейдет во внутренность ее образа. Прямые, проходящие через $t=0$, перейдут в окружности, проходящие через точки $s=0$, $s=b$. Окружность $|t|=|t^0|$ перейдет в окружность с диаметром $[b|t^0|/(|t^0|-1), b|t^0|/(|t^0|+1)]$.

С учетом этих замечаний задача нахождения оптимального параметра p, обеспечивающего регулярное ПЭК, может быть решена в плоскости (s). Для этого достаточно выполнить следующее:

1. Найти одну особенность $\tilde{s}$ функции $sF(s)$, лежащую на границе круга B, который содержит все особенности $sF(s)$, имеет наименьший возможный диаметр вида $[bc/(c-1), bc/(c+1)],\ c \in (0,1)$.

2. Найти круг $B_1(\sigma_{\text{мин}}, r_{\text{мин}})$ наименьшего радиуса из всех кругов, обладающих свойствами:

– круг $B_1(\sigma, r)$ касается окружности ∂B в точке $\tilde{s}$,

– $B_1(\sigma, r)$ содержит все особенности $sF(s)$.

3. По радиусу $r_{\text{мин}}$ и центру $\sigma_{\text{мин}}$ найти s_1 и s_2:

$$s_{1,2} = \sigma_{\text{мин}} \pm r_{\text{мин}}\zeta, \quad \zeta = \frac{b - \sigma_{\text{мин}}}{|b - \sigma_{\text{мин}}|}\,.$$

4. Вычислить $p_{\text{опт}} = \dfrac{t(s_1) + t(s_2)}{2}, \quad t(s) = \dfrac{s}{s-b}\,.$

Если мы откажемся от регулярности и поставим задачу безусловной минимизации $\min \frac{A(p)}{|1-p|}$, то круг $K(p, A(p))$ не будет в общем случае принадлежать $K(0, |t^0|)$. Но решение $p'_{\text{опт}}$ удовлетворяет требованию $\operatorname{Re} p'_{\text{опт}} < 1$ теоремы 4.

В плоскости (s) задача нахождения $p_{\text{опт}} = \arg\min \frac{A(p)}{|1-p|}$ решается следующим образом:

1. Найти круг $K(\sigma_{\text{мин}}, r_{\text{мин}})$, который виден под наименьшим углом из точки $s = b$ и содержит все особенности $sF(s)$.

2. Выполнить пункты 3 и 4 предыдущего алгоритма.

В четвертой главе строится метод ускорения сходимости ряда Лагерра, который основан на минимизации угла обзора круга локализации особенностей изображения Лапласа (т. е. круга, содержащего все особые точки изображения).

КС исходного ряда (6) равна $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1/|z_0| = \sin \frac{\beta_{\text{мин}}}{2}$, где $\beta_{\text{мин}}$ — угол, под которым из точки $s = b$ видна окружность M_r наименьшего радиуса, обладающая свойствами:

– на M_r или внутри нее содержатся все особенности $sF(s)$;

– касательные к M_r, проведенные в точках пересечения с мнимой осью, проходят через точку $s = b$.

Заключим теперь все особенности $sF(s)$ в круг $K(\sigma, r)$, который виден под наименьшим углом β из точки $s = b$. Пусть ξ — точка пересечения прямых, одна из которых проходит через центр $s = \sigma$ круга $K(\sigma, r)$ и точку $s = b$, а другая — через точки касания к кругу $K(\sigma, r)$ прямых, проходящих через $s = b$. Заменой $w = \dfrac{s-\xi}{b-\xi}\, b$ перенесем указанные прямые на координатные оси плоскости (w), так что точка $s = \xi$ перейдет в начало координат, а точка $s = b$ останется на месте. Новому изображению $G(w) = F\left(\frac{b-\xi}{b}\, w + \xi\right)$ соответствует оригинал

$$g(x) = \frac{b}{b-\xi} \exp\left(-\frac{b\xi}{b-\xi}\, x\right) f\left(\frac{b}{b-\xi}\, x\right).$$

Разложив функцию $g(x)$ по многочленам Лагерра $L_k(bx)$, найдем

$$f(t) = \frac{b-\xi}{b} \exp(\xi t) \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k((b-\xi)t)\,. \tag{10}$$

Коэффициенты c_k определяются из разложения функции

$$\psi(z) = \frac{b}{1-z}\, F\left(\frac{b-\xi}{1-z} + \xi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\,.$$

З а м е ч а н и е 2. Для вычисления коэффициентов c_k нужно найти ξ. Вместо этого удобнее найти сначала центр σ и радиус $r = \max\limits_j |\sigma - s_j|$ соответствующего круга $K(\sigma, r)$ и выразить ξ через эти числа. Соответствующая формула имеет вид

$$\xi = \frac{r^2_{\text{мин}}}{|b - \sigma_{\text{мин}}|^2}(b - \sigma_{\text{мин}}) + \sigma_{\text{мин}}.$$

Обсуждаемый в этой главе метод ускорения сходимости равносилен применению ПЭК с параметром суммирования p, определяемым из условия минимума функции $\frac{A(p)}{|1-p|}$.

Погрешности округлений и усечения ряда Лагерра представляются в виде (погрешностью, возникающей при вычислении коэффицентов c_k пренебрегаем)

$$E(b,\xi) = \exp\left(\frac{b+\xi}{2}\,t\right)\frac{b-\xi}{b}\left(\sum_{k=N}^{\infty}|c_k| + \varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}|c_k|\right). \tag{11}$$

Алгоритм выбора оптимального параметра b в случае восстановления вещественных оригиналов (в этом случае $\xi_{\text{опт}}(b) \in \mathrm{R}$) состоит в минимизации функции

$$\widetilde{E}(b,\xi) = \exp\left(\frac{b+\xi}{2}\,t\right)\frac{b-\xi}{b}\left(\sum_{k=N}^{2N-1}|c_k| + \varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}|c_k|\right) \tag{12}$$

при заданных $F(s)$, t, N. По заданным N и $F(s)$ нужно выбрать произвольно начальное значение $b > 2\lambda$ и вычислить $\xi_{\text{опт}}(b)$ по описанному выше алгоритму. Затем вычислить коэффициенты c_k и $\widetilde{E}(b, \xi_{\text{опт}}(b))$. На каждом шаге алгоритма минимизации нужно вычислять $\xi_{\text{опт}}(b)$, коэффициенты c_k и функцию $\widetilde{E}(b, \xi_{\text{опт}}(b))$.

В пятой главе построены дельта-ядро метода обращения преобразования Лапласа, описанного в четвертой главе и формулы для вычисления скачков оригинала Лапласа и его производных. Ядро $\delta_{mn}(x,t)$ находится с учетом следующих замечаний.

При нахождении оригинала вычисляют только начальный отрезок ряда. Точные значения коэффициентов c_k находятся либо по производным изображения, либо посредством вычисления некоторого комплексного интеграла. Оба способа, как правило, неосуществимы и вместо них используются приближенные методы. Например, вместо c_k берут c_{km}, где c_{km} — коэффициенты полинома

$$c_{0m} + c_{1m}z + \ldots + c_{mm}z^m, \tag{13}$$

интерполирующего функцию $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ в некотором круге с центром в начале координат. При выборе узлов интерполирования нужно обеспечить равномерную сходимость интерполяционного процесса. В нашем случае подойдут узлы Вандермонда

$$\left\{ z_j^{(m)} = r \exp\left(i\frac{2\pi(j+0.5)}{m+1} \right), \quad r > 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m \right\}. \tag{14}$$

При этом коэффициенты c_{km} могут быть представлены формулой

$$c_{km} = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^{(k)} \psi(z_j^{(m)}), \qquad \text{где} \quad \alpha_j^{(k)} = \frac{(z_j^{(m)})^{-k}}{m+1}. \tag{15}$$

Собирая все факты, получаем, что вместо $f(t)$ мы вычисляем функцию

$$f_{mn}(t) = \frac{b-\xi}{b} \exp(\xi t) \sum_{k=0}^{n} c_{km} L_k((b-\xi)t). \tag{16}$$

Дельта-ядро метода может быть представлено в виде

$$\delta_{mn}(x,t) = \frac{b-\xi}{b} \exp(\xi t) \sum_{k=0}^{n} L_k((b-\xi)t) \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j^{(k)} b}{1 - z_j^{(m)}} \exp\left(-\frac{b - \xi z_j^{(m)}}{1 - z_j^{(m)}} x \right),$$

а соответствующая дельта-последовательность — в виде

$$f_{mn}(t) = \int_0^\infty \delta_{mn}(x,t) f(x) dx. \tag{17}$$

Пусть оригинал терпит разрыв в точке t, но имеет односторонние производные всех порядков и разложи́м в ряды

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_-^{(l)}(t)}{l!}(x-t)^l, \quad f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_+^{(l)}(t)}{l!}(x-t)^l \tag{18}$$

на промежутках $(0,t)$ и (t,∞), соответственно.

Разобьем промежуток интегрирования в формуле (17) на $(0,t)$ и (t,∞) и запишем

$$f_{mn}(t) = \int_0^t \delta_{mn}(x,t) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_-^{(l)}(t)}{l!}(x-t)^l dx + \int_t^\infty \delta_{mn}(x,t) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_+^{(l)}(t)}{l!}(x-t)^l dx.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{e^{-\xi t}}{b-\xi} f_{mn}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_-^{(l)}(t)}{l!} \sum_{k=0}^{n} L_k\Big((b-\xi)t\Big) \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j^{(k)}}{1 - z_j^{(m)}} I_1^{\{l\}}(t) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_+^{(l)}(t)}{l!} \sum_{k=0}^{n} L_k\Big((b-\xi)t\Big) \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j^{(k)}}{1 - z_j^{(m)}} I_2^{\{l\}}(t), \tag{19}$$

где

$$s_j^{(m)}=\frac{b-\xi z_j^{(m)}}{1-z_j^{(m)}}\,,\ I_1^{\{l\}}(t)=\int_0^t e^{-s_j^{(m)}x}(x-t)^l dx\,,\ I_2^{\{l\}}(t)=\int_t^\infty e^{-s_j^{(m)}x}(x-t)^l dx\,.$$

Интегралы $I_1^{\{l\}}(t)$ и $I_2^{\{l\}}(t)$ вычисляются просто:

$$I_1^{\{l\}}(t) = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{(-t)^{l-\mu} l!}{(l-\mu)!(s_j^{(m)})^{\mu+1}} - \frac{l!\, e^{-s_j^{(m)}t}}{(s_j^{(m)})^{l+1}}\,, \quad I_2^{\{l\}}(t) = \frac{l!\, e^{-s_j^{(m)}t}}{(s_j^{(m)})^{l+1}}\,.$$

Подставив эти значения в равенство (19), получим основную формулу для вычисления скачков оригинала и ее производных

$$\frac{e^{-\xi t}}{b-\xi} f_{mn}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_-^{(l)}(t)\Big(B_{mn}^{\{l\}}(t) - C_{mn}^{\{l\}}(t)\Big) + \sum_{l=0}^{\infty} f_+^{(l)}(t) C_{mn}^{\{l\}}(t)\,, \tag{20}$$

где

$$B_{mn}^{\{l\}}(t) = \sum_{k=0}^{n} L_k\Big((b-\xi)t\Big) \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j^{(k)}}{1-z_j^{(m)}} \sum_{\mu=0}^{l} \frac{(-t)^{l-\mu}}{(l-\mu)!(s_j^{(m)})^{\mu+1}}\,, \tag{21}$$

$$C_{mn}^{\{l\}}(t) = \sum_{k=0}^{n} L_k\Big((b-\xi)t\Big) \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_j^{(k)}}{1-z_j^{(m)}} \frac{e^{-s_j^{(m)}t}}{(s_j^{(m)})^{l+1}}\,. \tag{22}$$

Пусть требуется найти разрывы производных оригинала в точке t до h-го порядка включительно. Выберем произвольно $2(h+1)$ индексов $\{n_\nu\}$ и вычислим $f_{mn_\nu}(t)$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2h+1$ по формуле (16) и $B_{mn_\nu}^{\{l\}}(t)$, $C_{mn_\nu}^{\{l\}}(t)$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2h+1$, $l = 0, 1, \ldots, h$ по формулам (21) и (22). Пренебрегая остатком ряда, запишем вытекающую из (20) систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{e^{-\xi t}}{b-\xi} f_{mn_\nu}(t) = \sum_{l=0}^{h} f_-^{(l)}(t)\Big(B_{mn_\nu}^{\{l\}}(t) - C_{mn_\nu}^{\{l\}}(t)\Big) + \sum_{l=0}^{h} f_+^{(l)}(t) C_{mn_\nu}^{\{l\}}(t), \\ \nu = 0, 1, \ldots, 2h+1\,. \end{gathered} \tag{23}$$

Решив эту систему, мы получим односторонние производные оригинала $f(t)$ в точке t.

Для нахождения неизвестной точки разрыва нужно приписать к полученной системе еще одно аналогичное уравнение и решить нелинейную систему относительно искомых производных и точки разрыва t. Можно также искать точку разрыва производной оригинала j-го порядка из условия максимума выражения

$$|f_+^{(j)}(t) - f_-^{(j)}(t)|.$$

Для вычисления $f_+^{(j)}(t)$, $f_-^{(j)}(t)$ при каждой итерации произвольного метода решения этой оптимизационной задачи нужно решать систему относительно всех односторонних производных до h-го порядка включительно.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Кабардов М. М.* Об обращении преобразования Лапласа методом разложения оригинала в ряд Фурье-Лежандра // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2008. Сер. 1. Вып. 1. С. 144–148.
2. *Кабардов М. М.* О суммировании ряда Лагерра методом Эйлера-Кноппа в задаче обращения преобразования Лапласа // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2008. Сер. 1. Вып. 4. С. 84–89.
3. *Кабардов М. М.* Геометрическая интерпретация метода суммирования Эйлера-Кноппа в задаче обращения преобразования Лапласа // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2009. Сер. 1. Вып. 2. С. 31–36.
4. *Кабардов М. М., Рябов В. М.* Ускорение сходимости рядов Лагерра в задаче обращения преобразования Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 4. С. 601–610.

Другие публикации:

5. *Кабардов М. М.* О применении метода суммирования Эйлера-Кноппа к ряду Лагерра // Методы вычислений. Вып. 22. СПб., 2008. С. 77–81.
6. *Кабардов М. М.* Об обращении преобразования Лапласа методом разложения оригинала в ряд по многочленам Лагерра // "Космос, астрономия, программирование". Тез. докл. СПб., 2008. С. 166–171.