

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

по физико-математическим наукам

Введение

В основу программы положены следующие дисциплины: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов.

Программа разработана экспертным советом Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации по математике и механике при участии Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

1. Вероятностные меры

1. Алгебры и сигма-алгебры. Конечные и бесконечные измеримые пространства. Теорема Каратеодори о продолжении мер.
2. Примеры наиболее важных для теории вероятностей измеримых пространств $R^1, R^n, R^?, R^T$.
3. Построение вероятностной меры в $R^?$. Теорема Колмогорова. Схема Бернулли с бесконечным числом испытаний. Гауссовские последовательности.
4. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.
5. Измеримые функции. Равномерная сходимости, сходимости почти всюду и сходимости по мере.
6. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега—Стилтьеса в R^1 .
7. Мера, определяемая с помощью интеграла Лебега. Производная Радона—Никодима.
8. Произведения мер. Теорема Фубини.
9. Пространства L_1 и L_2 и их характеристики.
10. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами.
11. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.

2. Случайные величины и распределения в R^n

1. Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсевала. Теорема непрерывности.
2. Центральная предельная теорема. Теорема Берри-Эссеена.
3. Безгранично делимые распределения. Представление Леви—Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.
4. Вероятности больших уклонений.

3. Последовательности случайных величин

1. Закон нуля или единицы.
2. Усиленный закон больших чисел.
3. Закон повторного логарифма.
4. Стационарность, эргодичность, теорема Биркгофа—Хинчина.

4. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах

1. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейств вероятностных мер.
2. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции.
3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
4. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его корреляционной функции. Теорема Бохнера—Хинчина.
5. Линейные преобразования стационарных процессов, интегрирование и дифференцирование. Линейное прогнозирование. Гауссовские процессы.

5. Некоторые виды зависимости

1. Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда.
2. Теоремы о сходимости мартингалов.
3. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
4. Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, скачкообразные процессы.
5. Марковские процессы и полугруппы. Уравнения Колмогорова.

6. Стохастическое исчисление и диффузионные процессы

1. Стохастический интеграл. Формула Ито.
2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
3. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

7. Элементы математической статистики

1. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий факторизации.
2. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства.
3. Теорема Рао—Блекуэлла—Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки.
4. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао—Крамера.
5. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
6. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана—Пирсона.

Основная литература

- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984.
- Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997.
- Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
- Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
- Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
- Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
- Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.

Дополнительная литература

- Энциклопедия «Вероятность и математическая статистика» / Под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Российская энциклопедия, 1999.