САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 519.72

Машарский Сергей Михайлович

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА

01.01.07 — вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор *В. Н. Малоземов*

Санкт-Петербург
2001 г.

Содержание

Введение

Открытие в 1965 г. быстрого преобразования Фурье явилось мощным стимулом для развития дискретного гармонического анализа [36, 15, 5]. Появление цифровой электронной вычислительной техники способствовало проникновению в классический дискретный гармонический анализ других ортогональных преобразований, таких как дискретное преобразование Уолша, дискретное преобразование Хаара, дискретное косинусное, пилообразное и другие преобразования [4, 31, 10, 9, 12]. В их числе стоит и дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона [30, 10].

В последние полтора десятилетия бурно развивается (в основном, за рубежом) новый аппарат обработки сигналов — вейвлеты (всплески) [34, 45, 40]. Отличительной чертой вейвлетов является их способность одновременно характеризовать как частотные, так и временные особенности сигнала. Отправной точкой лавинообразного развития вейвлетной теории принято считать работы И. Добеши [37, 38] (перевод последней книги на русский язык, с некоторыми исправлениями и дополнениями, совсем недавно вышел в свет под редакцией А. П. Петухова [11]). Успехи этого нового направления чистой и прикладной математики столь существенны, что говорят о «вейвлетной революции». Из огромного количества публикаций по этой теме следует выделить монографии [33, 44, 27, 8] и русскоязычные статьи [29, 28, 26, 3, 13].

Одной из последних наработок вейвлетной теории являются вейвлет-пакеты — наборы из нескольких вейвлетных базисов. Вейвлет-пакеты позволяют получать детальные частотно-временные портреты сигналов, варьируя разрешение (масштабность) по времени и по частоте. В этом смысле анализ сигналов с помощью вейвлет-пакетов можно рассматривать как мощное дополнение к традиционному анализу Фурье. С другой стороны, использование сразу всех базисов из вейвлет-пакета приводит к крайне избыточному представлению сигнала. Это обеспечивает возможность выбирать из пакета ортогональный базис, адаптированный к определенному классу сигналов или даже к отдельному сигналу [34, 35, 45].

В последние годы был разработан новый подход к быстрому преобразованию Фурье, при котором результаты промежуточных вычислений интерпретируются как коэффициенты разложений по некоторым ортогональным базисам [21, 20]. При длине периода N, равной 2^s, в пространстве дискретных периодических сигналов построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. В каждом блоке сигналы различаются лишь сдвигом аргумента. Из блоков, принадлежащих *разным базисам* рекуррентной последовательности, формируются обобщенные вейвлетные базисы. Это значительно расширяет возможности цифровой обработки сигналов. В работе [22] с аналогичных позиций проанализировано дискретное преобразование Уолша.

В диссертационной работе рассматривается более общая по сравнению с [22] ситуация, когда длина периода N равна n^s. В пространстве дискретных N-периодических сигналов строятся несколько рекуррентных последовательностей ортогональных базисов. Финальным базисом во всех последовательностях является дискретный базис Виленкина–Крестенсона. Соответствующие обобщения оказались возможными благодаря тому, что удалось разобраться с источником рекуррентных соотношений для базисов. Если в [21, 20, 22] при $N = 2^s$ такие соотношения, по существу, *предъявлялись*, то теперь они *выводятся* на основе различных факторизаций матрицы Виленкина–Крестенсона порядка $N = n^s$. Эффективные расчетные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матрицы. После построения последовательности ортогональных базисов естественным образом формируется обобщенный вейвлет-пакет.

Большинство из описанных выше ортогональных преобразований используется с целью получения спектра сигнала для его дальнейшей цифровой обработки или анализа [12, 2]. Для решения этих задач часто требуется умение устанавливать связь между спектрами исходных сигналов и спектрами их сдвига, свертки и корреляции. В случае дискретных преобразований Фурье, Уолша, Виленкина–Крестенсона это не вызывает затруднений (см., например, [30]). В общем случае этот вопрос рассмотрен в [1, 14]. Полученные в этих работах результаты отражают свойства дискретных ортогональных преобразований, являющихся собственными по отношению к некоторому оператору сдвига. В отличие от классических ортогональных преобразований, вейвлет-преобразования не являются собственными по отношению к традиционным операторам сдвига, и поэтому результаты работ [1, 14] к ним неприменимы. Однако вопрос о спектрах сигналов в вейвлетных базисах остается актуальным. В частном случае (для базисов Хаара) этот вопрос изучался в [17, 18, 42].

Целью диссертационной работы является:

1) *Построить ортогональные вейвлетные базисы в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$.*

2) *Исследовать спектральные свойства дискретных сигналов в этих базисах.*

3) *Установить более тесную связь между дискретным гармоническим анализом и вейвлетной теорией.*

Приведем краткий обзор содержания диссертации. Работа состоит из двух глав, разбитых на тринадцать параграфов, двух таблиц, двух рисунков и списка литературы. Порядок ссылок на теоремы и формулы определяется двумя числами: первое число указывает номер параграфа, второе — номер теоремы или формулы в параграфе. Нумерация параграфов сквозная.

Первая глава посвящена дискретному преобразованию Виленкина–Крестенсона. На основе четырех вариантов факторизации матрицы функций Виленкина–Крестенсона построены четыре рекуррентных последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$. С помощью этих последовательностей базисов получены четыре варианта быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона.

В первом параграфе вводится терминология и описываются основные объекты дискретного гармонического анализа. Дается определение и основные свойства перестановки reverse и операций поразрядного сложения и вычитания по модулю n [30]. Приводятся необходимые сведения о функциях и матрице Виленкина–Крестенсона [6, 32, 30, 10]. Матрица Виленкина–Крестенсона имеет порядок $N = n^s$ и является s-й кронекеровой степенью матрицы Фурье порядка n. Она стандартным приемом раскладывается на множители (факторизуется) [39], причем сомножители в таком разложении допускают перестановку в любом порядке. Выделяются два порядка сомножителей, соответствующие в устоявшейся терминологии прореживанию по частоте и прореживанию по времени. Кроме того, матрица Виленкина–Крестенсона может быть двумя способами представлена в виде обычной степени разреженной матрицы порядка N [39, 24].

Во втором и третьем параграфах на основе представлений матрицы Виленкина–Крестенсона в виде s-й степени большой разреженной матрицы строятся две последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$. Для базисных сигналов указывается явный вид и приводятся рекуррентные формулы пересчета. Особенностью этих формул является постоянство индексации базисных сигналов на каждом уровне.

В четвертом параграфе описаны в явном виде быстрые алгоритмы разложения сигнала по всем промежуточным базисам. На заключительном этапе вычисляются коэффициенты разложения по базису Виленкина–Крестенсона. Дается строго математический анализ понятия частоты для дискретных функций Виленкина–Крестенсона, введенного на интуитивном уровне в монографии [30, с. 79–84].

В пятом и шестом параграфах на основе разложений матрицы Виленкина–Крестенсона на попарно различные множители строятся еще две рекуррентные последовательности ортогональных базисов. Получены явные формулы для базисных сигналов. Показано, что базисные сигналы каждого уровня разбиваются на блоки, в каждом из которых сигналы различаются лишь сдвигом аргумента. Отмечается, что построенные ортогональные базисы с точностью до нумерации сигналов совпадают с базисами, построенными в § 2, 3.

В седьмом параграфе с помощью разложений по построенным выше ортогональным базисам получены два алгоритма быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона (при $n = 2$ аналогичный результат приведен в [22]).

В восьмом параграфе устанавливается связь между четырьмя вариантами факторизации матрицы Виленкина–Крестенсона, представленными в § 1. При этом проясняется роль перестановки reverse в формировании матриц-сомножителей.

Вторая глава посвящена вопросам оснащения дискретного гармонического анализа вейвлетной теорией. Получены вейвлетные разложения пространства дискретных периодических сигналов. Изучаются спектральные свойства сигналов в вейвлетных базисах.

В девятом и десятом параграфах показывается, как, пользуясь последовательностью ортогональных базисов, сформировать обобщенный вейвлет-пакет. Детально исследуются вейвлетные базисы Хаара–Крестенсона, связанные с прореживанием по времени (§ 9) и прореживанием по частоте (§ 10). Выясняется структура вейвлетных подпространств. Выводятся формулы декомпозиции и реконструкции. Предлагается «наивный» подход к построению ортогональных вейвлетных базисов, использующий разложение сигнала по собственным сдвигам. При этом поясняется роль операций поразрядного сложения и вычитания по модулю n при прореживании по частоте. В случае $n = 2$ эти вопросы (за исключением модулярной арифметики) рассматривались в [19, 20].

В одиннадцатом параграфе вводится понятие спектра сигнала в базисах Хаара–Крестенсона. Вычисляются спектры Хаара–Крестенсона сдвигов единичного импульса — элементов естественного ортонормированного базиса в пространстве дискретных периодических сигналов. Доказываются аналоги известных теорем о спектре сдвига, свертки и корреляции в базисах Хаара–Крестенсона. При этом, в зависимости от базиса, в качестве оператора сдвига может выступать циклический или n-ичный сдвиг. Соответственно, свертка и корреляция может быть циклической или n-ичной. Для базиса Хаара–Крестенсона, связанного с прореживанием по частоте, в качестве оператора сдвига выступает n-ичный сдвиг. Устанавливается, что сдвиг сигнала приводит к сдвигам внутри блоков его спектра с одновременным поворотом спектральных коэффициентов в комплексной плоскости, а свертка и корреляция двух сигналов — соответственно к поблочной свертке и корреляции их спектров. В случае базиса Хаара–Крестенсона, связанного с прореживанием по времени, оператором сдвига является циклический сдвиг. Для спектра сдвига в этом базисе получен результат, аналогичный случаю прореживания по частоте. Для спектров свертки и корреляции результаты более тонкие: свертка и корреляция двух сигналов приводят соответственно к модифицированной свертке и корреляции соответствующих блоков их спектров (модификация заключается в том, что при вычислении осуществляется поворот части слагаемых). В случае $n = 2$ (для дискретных базисов Хаара) теоремы о сдвиге и свертке изучались в [18].

В двенадцатом параграфе устанавливается взаимосвязь базисов Хаара–Крестенсона, связанных с прореживанием по частоте и прореживанием по времени. Ключевую роль здесь играет перестановка reverse. Вводится понятие логарифмически автореверсного спектра Хаара–Крестенсона. Устанавливается связь между сигналами, имеющими в различных базисах Хаара–Крестенсона одинаковый спектр, при условии, что этот спектр является логарифмически автореверсным. В качестве иллюстрации вычислен спектр Хаара–Крестенсона кусочно-линейного сигнала, связанный с прореживанием по времени. Подсчитана размерность множества логарифмически автореверсных спектров. Аналогичное исследование в частном случае $n = 2$ проведено в [17].

В тринадцатом параграфе представлены два обобщенных кратномасштабных анализа по основанию n пространства дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$, которые приводят к базисам Хаара–Крестенсона. Тем самым устанавливается связь полученных результатов с общей вейвлетной теорией [11, 26, 27].

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1) *В пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$ построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов.*

2) *С помощью этих последовательностей базисов построены четыре варианта быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона (БПВК).*

3) *Установлено, что в процессе реализации алгоритмов БПВК второго рода вычисляются коэффициенты вейвлетных разложений (в частности, разложений по базисам Хаара–Крестенсона).*

4) *Доказаны теоремы о спектре сдвига, свертки и корреляции дискретных сигналов в базисах Хаара–Крестенсона.*

5) *Установлена связь между базисами Хаара–Крестенсона, связанными с прореживанием по частоте и прореживанием по времени, в том числе с использованием понятия логарифмически автореверсного спектра.*

6) *Построены два обобщенных кратномасштабных анализа по основанию n пространства дискретных N-периодических сигналов при $N = n^s$.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [16, 23, 24, 25, 41, 43].

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В. Н. Малоземову за помощь в постановке задач и анализе результатов, а также за постоянное внимание в течение всего времени работы над диссертацией. Автор также выражает признательность руководителям и участникам С.-Петербургского городского семинара «Всплески и их приложения» (http://www.math.spbu.ru/user/dmp) за конструктивные замечания и обсуждение материала диссертации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00747).

Глава I
Дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами.* В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводится скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал $\delta_N(j)$, равный единице, когда j делится на N, и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. В частности, $\delta_1(j) \equiv 1$.

Система сдвигов $\delta_N(j)$, $\delta_N(j-1)$, …, $\delta_N(j-N+1)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$, так что любой сигнал x допускает представление

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\delta_N(j-k) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Из (1.1) и четности δ_N следует, что при фиксированных $l, l' \in \mathbb{Z}$

$$\bigl\langle \delta_N(\cdot - l),\, \delta_N(\cdot - l')\bigr\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j-l)\,\delta_N(l'-j) = \delta_N(l'-l).$$

Положим $u_k(j) = \omega_N^{kj}$, где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из 1. Сигналы $u_0(j)$, $u_1(j)$, …, $u_{N-1}(j)$ образуют еще один ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, который называется *экспоненциальным.* Ортогональность следует из элементарной формулы

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{pj} = \delta_N(p) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $\|u_k\|^2 = N$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Любой сигнал x можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, u_k(j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z},$$

где $X(k) = N^{-1}\langle x, u_k\rangle$.

1.2. В дальнейшем считаем, что $N = n^s$, где n и s — натуральные числа, отличные от единицы. Положим $N_\nu = N/n^\nu$, $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$. В частности, $N_0 = N$, $N_s = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = n$, $\Delta_{\nu+1} = N_{s-\nu}$ при $\nu = 0, 1, \ldots, s$.

Постоянно будут использоваться следующие обозначения: $\lfloor\alpha\rfloor$ — целая часть вещественного числа α; $\langle k\rangle_n = k - \lfloor k/n\rfloor n$ — остаток от деления целого числа k на натуральное n.

Любое число $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ можно представить в виде

$$j = j_{s-1}n^{s-1} + j_{s-2}n^{s-2} + \ldots + j_0,$$

где $j_\nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$. Для обозначения этого факта будем использовать следующую форму записи:

$$j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n.$$

Пусть также $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $k = (k_{s-1}, \ldots, k_0)_n$. *Поразрядной суммой по модулю* n чисел j и k называется число $l = (l_{s-1}, \ldots, l_0)_n$, такое, что $l_\nu = \langle j_\nu + k_\nu \rangle_n$, $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$. Кратко это соотношение записывается так: $l = j \underset{n}{\oplus} k$. Очевидно, что операция "$\underset{n}{\oplus}$" не выводит из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ и обладает следующими свойствами:

$$j \underset{n}{\oplus} k = k \underset{n}{\oplus} j, \qquad j \underset{n}{\oplus} 0 = j, \qquad j \underset{n}{\oplus} (k \underset{n}{\oplus} l) = (j \underset{n}{\oplus} k) \underset{n}{\oplus} l.$$

Число j^* называется *n-ично противоположным* числу j, если $j \underset{n}{\oplus} j^* = 0$. Нетрудно видеть, что если $j^* = (j^*_{s-1}, \ldots, j^*_0)_n$, то из условия $\langle j_\nu + j^*_\nu \rangle_n = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$, следует

$$j^*_\nu = \langle -j_\nu \rangle_n = \begin{cases} n - j_\nu, & j_\nu \neq 0, \\ 0, & j_\nu = 0. \end{cases}$$

Число $j \underset{n}{\ominus} k := j \underset{n}{\oplus} k^*$ называется *поразрядной разностью по модулю* n.

Приведем некоторые свойства поразрядного сложения и вычитания, которые потребуются в дальнейшем.

(1) $(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\oplus} k = j$, $\quad (j \underset{n}{\oplus} k) \underset{n}{\ominus} k = j$;

(2) $(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\ominus} (l \underset{n}{\ominus} k) = j \underset{n}{\ominus} l$;

(3) $j \underset{n}{\ominus} k = 0$ тогда и только тогда, когда $j = k$;

(4) $\delta_N(j \underset{n}{\ominus} k) = \delta_N(j - k)$.

Проверим, например, свойство (2). Имеем

$$(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\ominus} (l \underset{n}{\ominus} k) = \sum_{\nu=0}^{s} \big\langle \langle j_\nu - k_\nu \rangle_n - \langle l_\nu - k_\nu \rangle_n \big\rangle_n n^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{s} \langle j_\nu - l_\nu \rangle_n \, n^\nu = j \underset{n}{\ominus} l.$$

Свойство (1) следует из определения поразрядной разности, (3) — из (1), (4) — из (3).

Зафиксируем $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Отображения $j \to j \underset{n}{\oplus} q$ и $j \to j \underset{n}{\ominus} q$, $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, называются соответственно *n-сдвигом вправо* и *n-сдвигом влево* на величину q. Отметим, что n-сдвиги, так же как и отображение $j \to j^*$, являются перестановками множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Введем еще одну специальную перестановку. Пусть $p \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ при некотором $\nu \geq 1$. Запишем число p в n-ичном коде: $p = (p_{\nu-1}, p_{\nu-2}, \ldots, p_0)_n$. Обозначим

$$\mathrm{rev}_\nu(p) = (p_0, p_1, \ldots, p_{\nu-1})_n.$$

Операция rev_ν сопоставляет числу p число $\mathrm{rev}_\nu(p)$, n-ичный код которого равен перевернутому n-ичному коду числа p. Идентификатор rev связан со словом *reverse*, а индекс ν у rev указывает на количество ревертируемых n-ичных разрядов. Очевидно, что $\mathrm{rev}_\nu\big(\mathrm{rev}_\nu(p)\big) = p$. По определению $\mathrm{rev}_1(p) = p$ при $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Положим также $\mathrm{rev}_0(0) = 0$.

Операция rev_ν при $\nu \geq 2$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$.

Лемма 1.1. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\mathrm{rev}_0(0) = 0,$$

$$\mathrm{rev}_\nu(nl + \sigma) = \sigma \Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) \tag{1.3}$$

при $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\nu = 1, \ldots, s$.

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (1.3) тривиальна. Пусть $\nu \geq 2$. Имеем $nl + \sigma = l_{\nu-2}n^{\nu-1} + \ldots + l_0 n + \sigma$. Значит,

$$\mathrm{rev}_\nu(nl + \sigma) = \sigma n^{\nu-1} + l_0 n^{\nu-2} + \ldots + l_{\nu-2} = \sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l).$$

Лемма доказана. ■

По существу, лемма 1.1 описывает быстрый алгоритм вычисления $\mathrm{rev}_s(k)$ сразу для всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. В табл. 1 демонстрируется, как, пользуясь леммой 1.1 при $N = 2^3$, вычислить $\mathrm{rev}_3(k)$ для всех $k = 0, 1, \ldots, 7$.

Таблица 1

ν	$\mathrm{rev}_\nu(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, 2^\nu - 1$							
1	0	1						
2	0	2	1	3				
3	0	4	2	6	1	5	3	7

1.3. Напомним, что $N = n^s$. Возьмем $j, k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$, $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$, и положим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu\, j_\nu.$$

Сигналы

$$v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.4}$$

называются *дискретными функциями Виленкина–Крестенсона.* Формулой (1.4) сигналы $v_k(j)$ определены на основном периоде

$j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Далее они продолжаются N-периодически на все целые $j \in \mathbb{Z}$.

Предложение 1.1. *Сигналы* $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ *образуют ортогональный базис в* $\mathbb{C}_N$. *При этом* $\|v_k\|^2 = N$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Доказательство. При $k, l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ согласно (1.2) имеем

$$\langle v_k, v_l \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_n^{\{k,j\}_s - \{l,j\}_s} = \sum_{j_{s-1}=0}^{n-1} \cdots \sum_{j_0=0}^{n-1} \omega_n^{\sum_{\nu=0}^{s-1} (k_\nu - l_\nu) j_\nu} =$$

$$= \prod_{\nu=0}^{s-1} \sum_{j_\nu=0}^{n-1} \omega_n^{(k_\nu - l_\nu) j_\nu} = n^s \prod_{\nu=0}^{s-1} \delta_n(k_\nu - l_\nu).$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. ■

Предложение 1.2. *Базис* $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ *является мультипликативным в том смысле, что при* $k, l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$v_k(j)\, v_l(j) = v_m(j),$$

где $m = k \underset{n}{\oplus} l$.

Действительно, учитывая, что $\omega_n^n = 1$, при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ получаем

$$v_k(j)\, v_l(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s + \{l,j\}_s} = \omega_n^{\sum_{\nu=0}^{s-1} \langle k_\nu + l_\nu \rangle_n j_\nu} = v_m(j).$$

1.4. Введем квадратную матрицу V_N с элементами

$$V_N[k, j] = v_k(j), \qquad k, j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.5}$$

Отметим, что здесь и далее индексы строк и столбцов квадратной матрицы порядка N изменяются от 0 до $N-1$. Нашей ближайшей целью является факторизация матрицы V_N.

Обозначим через F_n матрицу Фурье n-го порядка с элементами $F_n[k,j] = \omega_n^{kj}$, $k,j = 0,1,\ldots,n-1$, и через $F_n^{[s]}$ — ее s-ю кронекерову степень (см., например, [7, с. 80–82]).

Предложение 1.3. *Справедливо равенство* $V_N = F_n^{[s]}$.

Доказательство. Воспользуемся следующим общим фактом: если квадратная матрица B порядка $N = n^s$ равна кронекерову произведению s квадратных матриц $A_1, A_2, \ldots, A_s$ порядка n, т. е. $B = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_s$, то элемент матрицы B с индексами $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$ вычисляется по формуле

$$B[k,j] = A_1[k_{s-1}, j_{s-1}]\, A_2[k_{s-2}, j_{s-2}] \cdots A_s[k_0, j_0]. \tag{1.6}$$

Поскольку $F_n^{[s]} = \underbrace{F_n \otimes F_n \otimes \cdots \otimes F_n}_{s \text{ раз}}$, то в силу (1.4) и (1.5)

$$F_n^{[s]}[k,j] = F_n[k_{s-1}, j_{s-1}]\, F_n[k_{s-2}, j_{s-2}] \cdots F_n[k_0, j_0] =$$

$$= \omega_n^{\{k,j\}_s} = v_k(j) = V_N[k,j].$$

Утверждение доказано. ■

Пусть E_n — единичная матрица n-го порядка. При $\nu = 1, 2, \ldots, s$ положим

$$T_\nu = \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu) \text{ раз}} \otimes F_n \otimes \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1) \text{ раз}}.$$

Предложение 1.4. *Матрица V_N допускает факторизацию*

$$V_N = T_1\, T_2 \cdots T_s. \tag{1.7}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$\begin{gathered}(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_s)(A_{s+1} \otimes A_{s+2} \otimes \cdots \otimes A_{2s}) = \\ = (A_1 A_{s+1}) \otimes (A_2 A_{s+2}) \otimes \cdots \otimes (A_s A_{2s}),\end{gathered} \tag{1.8}$$

справедливой для произвольных квадратных матриц A_1, $A_2, \ldots,$ A_{2s} порядка n. Согласно этой формуле

$$T_1 T_2 = (\underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-1)\ \text{раз}} \otimes F_n)(\underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-2)\ \text{раза}} \otimes F_n \otimes E_n) =$$

$$= \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-2)\ \text{раза}} \otimes F_n \otimes F_n.$$

Теперь ясно, что

$$T_1\, T_2 \cdots T_s = \underbrace{F_n \otimes F_n \otimes \cdots \otimes F_n}_{s\ \text{раз}} = F_n^{[s]}.$$

Остается сослаться на предложение 1.3. ■

Из определения T_ν и (1.8) следует, что $T_\nu T_\mu = T_\mu T_\nu$ при $\nu \neq \mu$. Это значит, что *сомножители в правой части* (1.7) *можно переставить в любом порядке.* В частности,

$$V_N = T_s\, T_{s-1} \cdots T_1. \tag{1.9}$$

Введем квадратную матрицу D порядка $N \times N$, определяемую следующими равенствами:

$$D[lN_1 + p,\, pn + q] = F_n[l, q],$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad l, q = 0, 1, \ldots, n - 1; \tag{1.10}$$

$$D[k, j] = 0 \text{ при остальных } k, j \in \{0, 1, \ldots, N - 1\}.$$

Предложение 1.5. *Справедливо представление*

$$V_N = D^s. \tag{1.11}$$

Доказательство. Два равенства (1.10) можно объединить в одно следующим образом:

$$D[lN_1 + p,\, mn + q] = F_n[l, q]\, E_{N_1}[p, m], \tag{1.12}$$

$$p, m = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad l, q = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Покажем, что соотношение (1.12) допускает обобщение:

$$D^\nu[lN_\nu + p,\, m\Delta_{\nu+1} + q] = F_n^{[\nu]}[l, q]\, E_{N_\nu}[p, m], \tag{1.13}$$

$$p, m = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l, q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Докажем справедливость равенства (1.13) индукцией по ν. Базой индукции служит случай $\nu = 1$ — в этом случае (1.13) совпадает с (1.12). Проделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν. Для $p, m = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, $l, q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1$ имеем

$$D^\nu[lN_\nu + p,\, m\Delta_{\nu+1} + q] = \sum_{r=0}^{N-1} D[lN_\nu + p,\, r]\, D^{\nu-1}[r,\, m\Delta_{\nu+1} + q].$$

Представим индексы l, q, r в следующем виде:

$$l = l'\Delta_\nu + l'', \qquad q = q'\Delta_\nu + q'', \qquad r = r''N_{\nu-1} + r'''n + r',$$

где $l', q', r' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $l'', q'', r'' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $r''' \in$ $\in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. Тогда в силу (1.12) и индукционного предположения получим

$$D^\nu[lN_\nu + p,\, m\Delta_{\nu+1} + q] =$$

$$= \sum_{r'=0}^{n-1} \sum_{r''=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{r'''=0}^{N_\nu-1} D[l'N_1 + (l''N_\nu + p),\, (r''N_\nu + r''')n + r'] \times$$
$$\times D^{\nu-1}[r''N_{\nu-1} + (r'''n + r'),\, (mn + q')\Delta_\nu + q''] =$$
$$= \sum_{r'=0}^{n-1} \sum_{r''=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{r'''=0}^{N_\nu-1} F_n[l', r']\, E_{N_1}[l''N_\nu + p,\, r''N_\nu + r'''] \times$$
$$\times F_n^{[\nu-1]}[r'', q'']\, E_{N_{\nu-1}}[r'''n + r',\, mn + q'] =$$
$$= F_n[l', q']\, F_n^{[\nu-1]}[l'', q'']\, E_{N_\nu}[p, m] = F_n^{[\nu]}[l, q]\, E_{N_\nu}[p, m].$$

Итак, справедливость равенства (1.13) установлена. При $\nu = s$ получаем

$$D^s[l, q] = F_n^{[s]}[l, q], \qquad l, q = 0, 1, \ldots, N-1.$$

В силу предложения 1.3 последнее равенство равносильно (1.11). ■

Как видно из (1.10), строки матрицы D разбиты на n блоков по n^{s-1} строк в каждом. При этом начальной строкой в l-м блоке является l-я строка матрицы F_n, дополненная $(N-n)$ нулями, а каждая следующая строка этого блока получается из предыдущей с помощью циклического сдвига на n позиций вправо.

Аналогичные манипуляции можно произвести и со столбцами матрицы F_n. А именно, построим матрицу C порядка $N \times N$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &C[pn+l,\, qN_1+p] = F_n[l,q],\\ &\qquad\qquad p = 0,1,\ldots,N_1-1, \quad l,q = 0,1,\ldots,n-1; \qquad (1.14)\\ &C[k,j] = 0 \text{ при остальных } k,j \in \{0,1,\ldots,N-1\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что матрица C есть транспонированная матрица D. Действительно, согласно (1.10) имеем

$$\begin{aligned} &D^\top[pn+q,\, lN_1+p] = F_n[l,q],\\ &\qquad\qquad p = 0,1,\ldots,N_1-1, \quad l,q = 0,1,\ldots,n-1;\\ &D^\top[j,k] = 0 \text{ при остальных } j,k \in \{0,1,\ldots,N-1\}, \end{aligned}$$

что совпадает (1.14), если поменять местами l и q (нужно учесть, что $F_n = F_n^\top$). А из симметричности матрицы V_N и представления (1.11) получаем

$$V_N = V_N^\top = (D^s)^\top = (D^\top)^s.$$

Приходим к следующему результату.

Предложение 1.6. *Справедливо равенство*

$$V_N = C^s. \qquad (1.15)$$

§ 2. Первая последовательность ортогональных базисов

2.1. На основе представления (1.11) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ последовательность ортогональных базисов $\{h_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $h_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $h_s(k;j) = v_k(j)$. Сигналы $h_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $h_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $h_\nu = \big(h_\nu(0), h_\nu(1), \ldots, h_\nu(N-1)\big)^\top$. Положим

$$h_\nu = D^\nu h_0, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{2.1}$$

Согласно (1.11), $h_s = V_N h_0$. Пользуясь (1.5) и (1.1), перепишем последнее равенство в развернутом виде:

$$h_s(k;j) = \sum_{l=0}^{N-1} V_N[k,l]\, \delta_N(j-l) = \sum_{l=0}^{N-1} v_k(l)\, \delta_N(j-l) = v_k(j).$$

Разберемся с промежуточными базисами $h_1, \ldots, h_{s-1}$. Прежде чем показать, что это действительно базисы, получим явное представление для базисных сигналов.

Теорема 2.1. *Справедливо равенство*

$$h_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{l,q\}_\nu}\, h_0(p\Delta_{\nu+1} + q), \tag{2.2}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Из (2.1) и (1.13) получаем

$$h_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \sum_{m=0}^{N_\nu - 1} D^\nu[lN_\nu + p, m\Delta_{\nu+1} + q]\, h_0(m\Delta_{\nu+1} + q) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} F_n^{[\nu]}[l,q]\, h_0(p\Delta_{\nu+1}+q),$$

$$p=0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad l=0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1, \quad \nu=1,\ldots,s.$$

Остается отметить, что $F_n^{[\nu]}[l,q]=\omega_n^{\{l,q\}_\nu}$. Теорема доказана. ■

Теорема 2.2. *При каждом* $\nu=1,\ldots,s-1$ *система сигналов* $h_\nu(0)$, $h_\nu(1),\ldots,$ $h_\nu(N-1)$ *образует ортогональный базис в* $\mathbb{C}_N$. *При этом* $\|h_\nu(k)\|^2=n^\nu$ *при всех* $k=0,1,\ldots,N-1$.

Доказательство. Пусть $p,p'\in\{0,1,\ldots,N_\nu-1\}$, $l,l'\in\in\{0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1\}$. Покажем, что если $p\neq p'$ или $l\neq l'$, то

$$\langle h_\nu(lN_\nu+p),\, h_\nu(l'N_\nu+p')\rangle = 0. \tag{2.3}$$

При $p\neq p'$ (2.3) непосредственно следует из (2.2), поскольку в этом случае носители указанных сигналов не пересекаются.

Пусть $p=p'$, тогда в силу (2.2), (1.4) и предложения 1.1 имеем

$$\langle h_\nu(lN_\nu+p),\, h_\nu(l'N_\nu+p)\rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{l,q\}_\nu-\{l',q\}_\nu} = \Delta_{\nu+1}\,\delta_{\Delta_{\nu+1}}(l-l').$$

При $l\neq l'$ приходим к (2.3). При $l=l'$ получаем $\|h_\nu(lN_\nu+p)\|^2 = = \Delta_{\nu+1}=n^\nu$.

Теорема доказана. ■

2.2. Из (1.11) следует, что $h_\nu=Dh_{\nu-1}$, $\nu=1,\ldots,s$. Эта формула и формула (1.12) позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $h_{\nu-1}$ к базису h_ν:

$$h_0(k)=\delta_N(\cdot-k), \quad k=0,1,\ldots,N-1;$$

$$h_\nu(lN_1+p)=\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{lq}\,h_{\nu-1}(pn+q), \tag{2.4}$$

$$p=0,1,\ldots,N_1-1,\quad l=0,1,\ldots,n-1,\quad \nu=1,\ldots,s.$$

Схема (2.4) позволяет строить последовательность ортогональных базисов h_ν рекуррентно, не пользуясь представлением (2.2).

§ 3. Вторая последовательность ортогональных базисов

3.1. На основе представления (1.15) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N=n^s$ еще одну последовательность ортогональных базисов $\{\xi_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu=0,1,\ldots,s$, так, чтобы $\xi_0(k;j)=\delta_N(j-k)$ и $\xi_s(k;j)=v_k(j)$. Сигналы $\xi_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $\xi_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $\xi_\nu=\big(\xi_\nu(0),\xi_\nu(1),\ldots,\xi_\nu(N-1)\big)^\top$ и определим его следующим образом:

$$\xi_\nu=C^\nu\xi_0,\quad \nu=1,\ldots,s. \tag{3.1}$$

Как и в предыдущем параграфе, покажем, что построенные таким образом сигналы образуют ортогональные базисы, предварительно получив для них явное представление.

Теорема 3.1. *Справедливо равенство*

$$\xi_\nu(p\Delta_{\nu+1}+l)=\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}\omega_n^{\{l,q\}_\nu}\,\xi_0(qN_\nu+p), \tag{3.2}$$

$$l=0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1,\quad p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\quad \nu=1,\ldots,s.$$

Доказательство. Как было показано на с. 24, $C = D^\top$. Отсюда, воспользовавшись (1.13), получим

$$C^\nu[p\Delta_{\nu+1}+l, qN_\nu+m] = D^\nu[qN_\nu+m, p\Delta_{\nu+1}+l] = F^{[\nu]}[q,l]\, E_{N_\nu}[m,p], \tag{3.3}$$

$$l,q = 0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1, \quad p,m = 0,1,\ldots,N_\nu-1.$$

Записав с учетом этого выражения формулу (3.1) в развернутом виде и приняв к сведению равенство $F^{[\nu]}[q,l] = \omega_n^{\{q,l\}_\nu} = \omega_n^{\{l,q\}_\nu}$, придем к (3.2). Теорема доказана. ■

Теорема 3.2. *При каждом* $\nu = 1,\ldots,s-1$ *система сигналов* $\xi_\nu(0)$, $\xi_\nu(1)$, …, $\xi_\nu(N-1)$ *образует ортогональный базис в* $\mathbb{C}_N$. *При этом* $\|\xi_\nu(k)\|^2 = n^\nu$ *при всех* $k = 0,1,\ldots,N-1$.

Доказательство. В силу (3.1) утверждение теоремы равносильно тому, что строки матрицы C^ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен n^ν. Это условие коротко можно записать так: $C^\nu(C^\nu)^* = n^\nu E_N$, где $(C^\nu)^*$ — сопряженная к C^ν матрица.

Из теоремы 2.2 и формулы (2.1) следует, что $D^\nu(D^\nu)^* = n^\nu E_N$. А поскольку $C = D^\top$, то

$$C^\nu(C^\nu)^* = (D^\nu)^\top\big((D^\nu)^*\big)^\top = \big[(D^\nu)^* D^\nu)\big]^\top = n^\nu E_N.$$

Теорема доказана. ■

3.2. Запишем формулу (3.3) при $\nu = 1$:

$$C[pn+l, qN_1+m] = F[q,l]\, E_{N_1}[m,p], \tag{3.4}$$

$$l,q = 0,1,\ldots,n-1, \quad p,m = 0,1,\ldots,N_1-1.$$

Из (1.15) следует, что $\xi_\nu = C\xi_{\nu-1}$, $\nu = 1, \ldots, s$. Это равенство в совокупности с формулой (3.4) позволяет записать развернутую схему перехода от базиса $\xi_{\nu-1}$ к базису ξ_ν:

$$\xi_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$\xi_\nu(pn + l) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{lq}\, \xi_{\nu-1}(qN_1 + p), \tag{3.5}$$

$$l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Схема (3.5) позволяет строить последовательность ортогональных базисов ξ_ν рекуррентно, не пользуясь представлением (3.2).

§ 4. Быстрое преобразование Виленкина–Крестенсона первого рода

4.1. Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису $h_\nu(0)$, $h_\nu(1)$, …, $h_\nu(N-1)$ при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, h_\nu(k). \tag{4.1}$$

Здесь $x_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, h_\nu(k)\rangle$. В частности,

$$x_0(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Согласно (2.4)

$$x_\nu(lN_1 + p) = n^{-\nu} \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{-lq} \langle x, h_{\nu-1}(pn + q)\rangle =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{-lq}\, x_{\nu-1}(pn+q).$$

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (4.1):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(lN_1 + p) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{-lq}\, x_{\nu-1}(pn+q), \tag{4.2}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала x по базису Виленкина–Крестенсона (1.2):

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, v_k(j). \tag{4.3}$$

Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам.

Формула (4.2) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}(pn+q) = \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{lq}\, x_\nu(lN_1 + p), \tag{4.4}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Основная роль формулы (4.4) заключается в том, что с ее помощью вычисляются значения сигнала x, заданного в виде (4.3), на основном периоде, а именно: $x(k) = x_0(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

4.2. Аналогично сигнал x можно разложить по ортогональному базису $\xi_\nu(0), \xi_\nu(1), \ldots, \xi_\nu(N-1)$ при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, \xi_\nu(k). \tag{4.5}$$

Здесь $y_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, \xi_\nu(k)\rangle$. Коэффициенты разложений (4.5) в силу (3.5) вычисляются по рекуррентной схеме

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$y_\nu(pn+l) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{-lq}\, y_{\nu-1}(qN_1+p), \tag{4.6}$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1, \quad p = 0, 1, \dots, N_1-1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

При $\nu = s$ получаем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} y_s(k)\, v_k(j),$$

т. е. $y_s(k) = x_s(k)$ при всех $k = 0, 1, \dots, N-1$. Попутно вычисляются коэффициенты разложений по каждому промежуточному базису ξ_ν, которые, конечно, отличны от коэффициентов разложений по промежуточным базисам h_ν.

Формула (4.6) допускает обращение:

$$y_{\nu-1}(qN_1+p) = \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{lq}\, y_\nu(pn+l), \tag{4.7}$$

$$q = 0, 1, \dots, n-1, \quad p = 0, 1, \dots, N_1-1, \quad \nu = s, s-1, \dots, 1.$$

С помощью (4.7) можно вычислить значения сигнала x, заданного в виде (4.5) при некотором $\nu \in \{1, \dots, s\}$, на основном периоде.

Вычислительные схемы (4.2) и (4.6) назовем *быстрыми преобразованиями Виленкина–Крестенсона первого рода*, связанными соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени*.

4.3. Напомним, что

$$v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}, \qquad k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

В этой формуле степень $\{k, j\}_s$ изменяется немонотонно при возрастании j от 0 до $N-1$. Например, при $n = 2$, $s = 3$, $k = 2 = (0, 1, 0)_2$ имеем

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\{k, j\}_3$	0	0	1	1	0	0	1	1

Чтобы добиться монотонности, запишем для $v_k(j)$ другое представление

$$v_k(j) = \omega_n^{\sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu (j_\nu + j_{\nu+1} n + \ldots + j_s n^{s-\nu})}.$$

Обозначим степень через $\varphi_k(j)$. Тогда

$$v_k(j) = \omega_n^{\varphi_k(j)}. \tag{4.8}$$

Считаем, что аргумент j изменяется от 0 до N, так что коэффициент j_s может равняться 0 или 1. При этом, если $j_s = 1$, то $j_{s-1} = j_{s-2} = \ldots = j_0 = 0$.

Положим при $l = 0, 1, \ldots, s-1$

$$a_l = \sum_{\nu=0}^{l} k_\nu n^{l-\nu}.$$

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$\varphi_k(j) = n a_{s-1} j_s + \sum_{l=0}^{s-1} a_l j_l. \tag{4.9}$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_k(j) = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu \sum_{l=\nu}^{s} j_l n^{l-\nu} = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu j_s n^{s-\nu} + \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu \sum_{l=\nu}^{s-1} j_l n^{l-\nu} =$$

$$= n\, j_s a_{s-1} + \sum_{l=0}^{s-1} j_l \sum_{\nu=0}^{l} k_\nu n^{l-\nu} = n a_{s-1} j_s + \sum_{l=0}^{s-1} a_l j_l,$$

что и требовалось установить. ■

Лемма 4.2. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$a_l = (n-1)\sum_{\nu=0}^{l-1} a_\nu + \sum_{p=0}^{l} k_p, \quad l = 1, \ldots, s-1, \tag{4.10}$$

$$a_0 = k_0.$$

Доказательство. Формула (4.10) связана со схемой Горнера, однако ее можно вывести и непосредственно. Запишем

$$\sum_{\nu=0}^{l} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{l}\sum_{p=0}^{\nu} k_p n^{\nu-p} = \sum_{\nu=1}^{l}\sum_{p=0}^{\nu-1} k_p n^{\nu-p} + \sum_{p=0}^{l} k_p. \tag{4.11}$$

Отметим, что

$$\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{p=0}^{\nu-1} k_p n^{\nu-p} = \sum_{\nu'=0}^{l-1}\sum_{p=0}^{\nu'} k_p n^{\nu'+1-p} = n\sum_{\nu'=0}^{l-1} a_{\nu'}. \tag{4.12}$$

Объединяя (4.11) и (4.12), приходим к (4.10). ■

Следствие. При $l \in \{1, \ldots, s-1\}$ выполняется неравенство

$$a_l \geq (n-1)\sum_{\nu=0}^{l-1} a_\nu. \tag{4.13}$$

Теорема 4.1. *При возрастании j от 0 до N функция $\varphi_k(j)$ изменяется от 0 до na_{s-1}, монотонно не убывая.*

Доказательство. Согласно (4.9), $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(N) = na_{s-1}$. Остается проверить, что $\varphi_k(j) \le \varphi_k(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$. Тогда $\varphi_k(j) = \sum_{l=0}^{s-1} a_l j_l$. Если $j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, то

$$\varphi_k(j+1) = a_0(j_0+1) + \sum_{l=1}^{s-1} a_l j_l \ge \varphi_k(j).$$

Предположим, что $j_0 = n-1$. В случае $j_0 = j_1 = \ldots = j_{p-1} = n-1$, $j_p < n-1$ при некотором $p \in \{1, \ldots, s-1\}$ имеем

$$\varphi_k(j+1) = a_p(j_p+1) + \sum_{l=p+1}^{s-1} a_l j_l.$$

Согласно (4.13)

$$\varphi_k(j+1) - \varphi_k(j) = a_p - (n-1)\sum_{l=0}^{p-1} a_l \ge 0.$$

Наконец, если $j = N-1$, то

$$\varphi_k(j+1) - \varphi_k(j) = na_{s-1} - (n-1)\sum_{l=0}^{s-1} a_l =$$

$$= a_{s-1} - (n-1)\sum_{l=0}^{s-2} a_l \ge 0.$$

Теорема доказана. ■

4.4. Перепишем формулу (4.8) в виде

$$v_k(j) = \exp\left(\tfrac{2\pi i}{n}\,\varphi_k(j)\right).$$

При фиксированном j комплексное число $v_k(j)$ лежит на единичной окружности комплексной плоскости и его аргумент равен $(2\pi/n)\varphi_k(j)$. Согласно теореме 4.1 этот аргумент при возрастании j от 0 до N изменяется от 0 до $2\pi a_{s-1}$, монотонно не убывая.

Другими словами, при возрастании j от 0 до N точка $v_k(j)$ обегает единичную окружность a_{s-1} раз. Число a_{s-1} естественно принять за частоту дискретной функции $v_k(j)$.

Напомним, что $a_{s-1} = k_0 n^{s-1} + k_1 n^{s-2} + \ldots + k_{s-1}$. Поскольку $k = k_{s-1} n^{s-1} + k_{s-2} n^{s-2} + \ldots + k_0$, то a_{s-1} есть целое число, n-ичный код которого равен перевернутому n-ичному коду числа k. Другими словами, $a_{s-1} = \mathrm{rev}_s(k)$. Таким образом, приходим к следующему результату: *частота функции* $v_k(j)$ *равна* $\mathrm{rev}_s(k)$.

Теперь функции ортогональной мультипликативной системы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ можно упорядочить по возрастанию частоты, положив

$$\mathrm{Pal}_k(j) := v_{\,\mathrm{rev}_s(k)}(j), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Очевидно, что частота $\mathrm{Pal}_k(j)$ равна k. Формула (4.3) принимает вид

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)\,\mathrm{Pal}_k(j).$$

§ 5. Блочные ортогональные базисы, связанные с прореживанием по частоте

5.1. Обратимся к факторизации (1.9). Построим на ее основе в пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $f_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $f_s(k;j) = v_k(j)$. Сигналы $f_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $f_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $f_\nu = \bigl(f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)\bigr)^\top$ и определим его формулой

$$f_\nu = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1 f_0, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{5.1}$$

Согласно (1.9), $f_s = V_N f_0$, или, в развернутом виде, $f_s(k;j) = v_k(j)$.

Разберемся с промежуточными базисами $f_1, \ldots, f_{s-1}$. Обозначим $Q_\nu = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1$.

Лемма 5.1. *При всех $\nu = 1, \ldots, s$ справедлива формула*

$$Q_\nu Q_\nu^* = n^\nu E_N,$$

где Q_ν^* — сопряженная по отношению к Q_ν матрица.

Доказательство. Прежде всего отметим, что согласно (1.2) $F_n F_n^* = nE_n$. Далее в силу (1.8)

$$T_\nu T_\nu^* = (\underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes F_n \otimes \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}}) \times$$

$$\times (\underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes F_n^* \otimes \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}}) =$$

$$= \underbrace{E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(s-\nu)\text{ раз}} \otimes (F_n F_n^*) \otimes \underbrace{E_n \otimes \cdots \otimes E_n}_{(\nu-1)\text{ раз}} = nE_N.$$

Наконец,

$$Q_\nu Q_\nu^* = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1 T_1^* \cdots T_{\nu-1}^* T_\nu^* = n^\nu E_N.$$

Лемма доказана. ■

По существу установлено, что строки матрицы Q_ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен n^ν. Учитывая соотношение $f_\nu = Q_\nu f_0$, приходим к такому выводу.

Теорема 5.1. *При всех* $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *сигналы* $f_\nu(0)$, $f_\nu(1)$, …, $f_\nu(N-1)$ *образуют ортогональный базис в* $\mathbb{C}_N$ *и* $\|f_\nu(k)\|^2 = n^\nu,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$

5.2. Из (5.1) следует, что

$$f_\nu = T_\nu f_{\nu-1}, \qquad \nu = 1, \ldots, s. \tag{5.2}$$

Рассмотрим матрицу T_ν более детально.

Лемма 5.2. *Матрица* T_ν *имеет следующую структуру:*

$$T_\nu[(np+\sigma)\Delta_\nu + l, (np+\tau)\Delta_\nu + l] = \omega_n^{\sigma\tau},$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma, \tau = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$T_\nu[k, j] = 0 \ \text{при остальных}\ k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Доказательство. Согласно определению T_ν и (1.6)

$$T_\nu[k, j] = E_n[k_{s-1}, j_{s-1}] \cdots E_n[k_\nu, j_\nu] \times$$
$$\times F_n[k_{\nu-1}, j_{\nu-1}]\, E_n[k_{\nu-2}, j_{\nu-2}] \cdots E_n[k_0, j_0].$$

Это выражение отлично от нуля только тогда, когда

$$k_\mu = j_\mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, \nu-2,\ \nu,\ \nu+1, \ldots, s-1. \tag{5.3}$$

Зафиксируем $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \dots, k_0)_n = (np + k_{\nu-1})\Delta_\nu + l$, где $l \in \{0, 1, \dots, \Delta_\nu - 1\}$, $p \in \{0, 1, \dots, N_\nu - 1\}$. Условие (5.3) выполняется для индексов j вида $j = (np + j_{\nu-1})\Delta_\nu + l$ и только для них. При этом $T_\nu[k, j] = \omega_n^{k_{\nu-1} j_{\nu-1}}$. Указанные факты соответствуют утверждению леммы. ■

С л е д с т в и е. В строке матрицы T_ν с индексом $k = p\Delta_{\nu+1} + \sigma\Delta_\nu + l$ отличны от нуля лишь n элементов. Ненулевые элементы принимают значения 1, ω_n^σ, $\omega_n^{2\sigma}$, $\dots$, $\omega_n^{(n-1)\sigma}$.

Формула (5.2) и лемма 5.2 позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $f_{\nu-1}$ к базису f_ν:

$$f_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$f_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} f_{\nu-1}\big(l + (np + \tau)\Delta_\nu\big), \tag{5.4}$$

$$l = 0, 1, \dots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \dots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\nu = 1, \dots, s.$$

При $\nu = 1$ формула (5.4) принимает вид

$$f_1(np + \sigma) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} f_0(np + \tau), \tag{5.5}$$

$$\sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad p = 0, 1, \dots, N_1 - 1.$$

5.3. Получим явное представление для базисных сигналов. Для этого потребуется одно вспомогательное утверждение. Обозначим $V_{\Delta_{\nu+1}} = F_n^{[\nu]}$, $\nu = 1, \dots, s$.

Лемма 5.3. *При* $l, q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\nu \in \{2, \ldots, s\}$ *справедливы формулы*

$$V_{\Delta_\nu}[l, q] = V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q] = \omega_n^{-\sigma\tau}\, V_{\Delta_{\nu+1}}[l + \sigma\Delta_\nu, q + \tau\Delta_\nu], \tag{5.6}$$

$$V_{\Delta_\nu}[l, q] = V_{\Delta_{\nu+1}}[nl, nq] = \omega_n^{-\sigma\tau}\, V_{\Delta_{\nu+1}}[nl + \sigma, nq + \tau]. \tag{5.7}$$

Доказательство. Согласно (1.5) и (1.4)

$$V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q] = \omega_n^{\{l,q\}_\nu} \quad \text{при} \quad l, q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}. \tag{5.8}$$

Если $l, q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, то

$$\{l, q\}_{\nu-1} = \{l, q\}_\nu = \{l + \sigma\Delta_\nu,\, q + \tau\Delta_\nu\}_\nu - \sigma\tau =$$

$$= \{nl, nq\}_\nu = \{nl + \sigma,\, nq + \tau\}_\nu - \sigma\tau.$$

Отсюда и из (5.8) следует требуемое. ■

Теорема 5.2. *Имеет место явное представление*

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q]\, f_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{5.9}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (5.9) принимает вид

$$f_1(l + np) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{lq}\, f_0(q + np),$$

$$l = 0, 1, \ldots, n - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1.$$

Это совпадает с (5.5), если заменить l на σ и q на τ. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмем индекс $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и воспользуемся тем, что $l = \sigma\Delta_\nu + l'$ при некоторых $l' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$ и $\sigma \in \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. На основании (5.4), индукционного предположения и (5.6) получаем

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(l' + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} f_{\nu-1}\bigl(l' + (np+\tau)\Delta_\nu\bigr) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \Bigl\{ \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} V_{\Delta_\nu}[l', q']\, f_0\bigl(q' + (np+\tau)\Delta_\nu\bigr) \Bigr\} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l' + \sigma\Delta_\nu, q' + \tau\Delta_\nu]\, f_0(q' + \tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q]\, f_0(q + p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. ■

5.4. Если сравнить правые части формул (5.9) и (2.2), то можно убедиться, что они совпадают. Это следует из равенства (5.8) и определения базисов f_0 и h_0. Таким образом, *при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$ базисы f_ν и h_ν идентичны с точностью до перенумерации базисных сигналов.* Точнее,

$$h_\nu(lN_\nu + p) = f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Главное отличие этих базисов заключается именно в способе индексации их элементов. Нумерация сигналов базиса f_ν позволяет естественным образом их сгруппировать, выделив блоки, которые одинаковым образом преобразуются согласно схеме рекуррентного перехода (5.4).

Поясним эту схему. Предполагается, что базис $f_{\nu-1}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l. Каждый такой блок содержит $N_{\nu-1}$ элементов с внутренней индексацией $np+\tau$. Согласно (5.4) блок с индексом l базиса $f_{\nu-1}$ порождает n блоков базиса f_ν с индексами $l+\sigma\Delta_\nu$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, причем в каждом таком блоке находится N_ν элементов с внутренним индексом p. Рис. 1 иллюстрирует схему ветвления (5.4) при $N = 3^2$. Квадратами выделены блоки. Число внутри квадрата показывает, сколько элементов (сигналов) содержится в данном блоке.

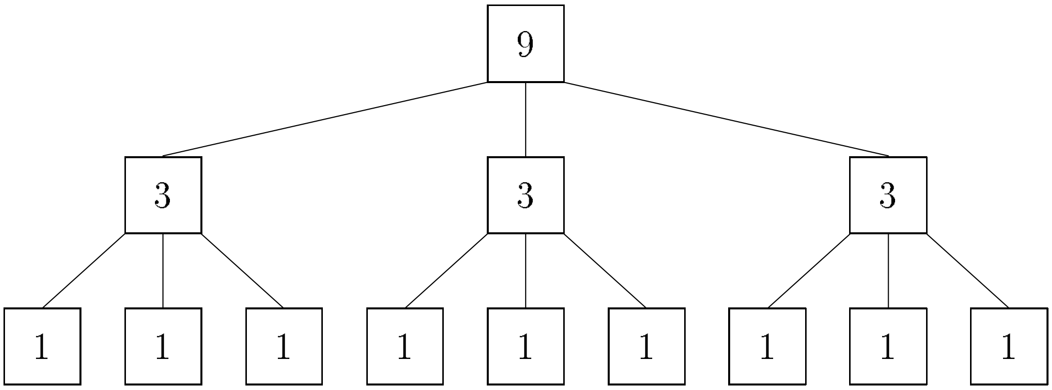

Рис. 1

Деление базисов на блоки называется секционированием. Данный прием играет ключевую роль при построении ортогональных вейвлетных базисов. Подробнее этот вопрос будет освещен в главе II.

5.5. Исследуем базисы f_ν более детально.

Предложение 5.1. *Справедливы формулы*

$$f_\nu(0;j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j-q), \quad \nu = 0,1,\ldots,s; \tag{5.10}$$

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu;j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j-q-\tau\Delta_\nu), \tag{5.11}$$

$$\sigma = 1,\ldots,n-1, \qquad \nu = 1,\ldots,s.$$

Доказательство. Формула (5.10) очевидна. Проверим (5.11). Согласно (5.9) и (5.8) имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu;j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[\sigma\Delta_\nu, q']\, f_0(q';j) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q'=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu-1} \delta_N(j-q') = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j-q-\tau\Delta_\nu),$$

что и требовалось установить. ■

Если ограничиться основным периодом, то формулы (5.10) и (5.11) можно переписать так:

$$f_\nu(0;j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = 0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1, \\ 0 & \text{при} \quad j = \Delta_{\nu+1},\ldots,N-1; \end{cases}$$

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu;j) = \begin{cases} \omega_n^{\sigma\tau} & \text{при} \quad j = \tau\Delta_\nu,\ldots,(\tau+1)\Delta_\nu-1, \\ & \qquad \tau = 0,1,\ldots,n-1; \\ 0 & \text{при} \quad j = \Delta_{\nu+1},\ldots,N-1. \end{cases}$$

Теорема 5.3. *Справедливо тождество*

$$f_\nu(l+p\Delta_{\nu+1};j)=f_\nu(l;j-p\Delta_{\nu+1}), \tag{5.12}$$

$$l=0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1,\quad p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\quad \nu=1,\ldots,s.$$

Доказательство. В соответствии с (5.9) имеем

$$f_\nu(l;j)=\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}V_{\Delta_{\nu+1}}[l,q]\,\delta_N(j-q).$$

Поэтому

$$f_\nu(l;j-p\Delta_{\nu+1})=\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}V_{\Delta_{\nu+1}}[l,q]\,\delta_N\bigl(j-(q+p\Delta_{\nu+1})\bigr)=$$

$$=\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}V_{\Delta_{\nu+1}}[l,q]\,f_0(q+p\Delta_{\nu+1};j)=f_\nu(l+p\Delta_{\nu+1};j).$$

Теорема доказана. ■

Таким образом, сигналы l-го блока в базисе f_ν получаются из сигнала $f_\nu(l;j)$ с помощью сдвига аргумента на число, кратное $\Delta_{\nu+1}$.

Теорема 5.4. *При* $j\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ *выполняется соотношение*

$$f_{\nu+1}(\sigma\Delta_{\nu+1};j)=f_\nu(\sigma\Delta_\nu;\,\lfloor j/n\rfloor), \tag{5.13}$$

$$\sigma=1,\ldots,n-1,\quad \nu=1,\ldots,s-1.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что

$$\delta_N(\lfloor j/n\rfloor)=\sum_{r=0}^{n-1}\delta_N(j-r),\quad j=-N+n,\ldots,N-1. \tag{5.14}$$

При $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ обе части в (5.14) равны единице, а при $j \in \{n, \ldots, N-1\} \cup \{-N+n, \ldots, -1\}$ равны нулю. Отметим, что при $j = N$ и $j = -N+n-1$ равенство (5.14) нарушается.

Согласно (5.11) и (5.14) при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu;\ \lfloor j/n \rfloor) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N\bigl(\lfloor (j - qn - \tau\Delta_{\nu+1})/n \rfloor\bigr) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{r=0}^{n-1} \delta_N\bigl(j - (qn + r) - \tau\Delta_{\nu+1}\bigr) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} \delta_N(j - q' - \tau\Delta_{\nu+1}) = f_{\nu+1}(\sigma\Delta_{\nu+1}; j).$$

Теорема доказана. ■

§ 6. Блочные ортогональные базисы, связанные с прореживанием по времени

6.1. Вторую последовательность ортогональных базисов в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ обозначим $\{g_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Она строится на основе разложения (1.7) так, чтобы $g_0(k; j) = \delta_N(j - k)$ и $g_s(k; j) = v_k(j)$. Сигналы $g_\nu(k; j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $g_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $g_\nu = \bigl(g_\nu(0), g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)\bigr)^\top$ и определим его формулой

$$g_\nu = T_{s-\nu+1}\, T_{s-\nu+2} \cdots T_s\, g_0, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, доказывается следующее утверждение.

Теорема 6.1. *При каждом* $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *сигналы* $g_\nu(0)$, $g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)$ *образуют ортогональный базис в* $\mathbb{C}_N$ *и* $\|g_\nu(k)\|^2 = n^\nu$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

6.2. Согласно лемме 5.2

$$T_{s-\nu+1}[(np+\sigma)\Delta_{s-\nu+1}+l, (np+\tau)\Delta_{s-\nu+1}+l] = \omega_n^{\sigma\tau}, \tag{6.1}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{s-\nu+1}-1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_{s-\nu+1}-1.$$

Отметим, что $\Delta_{s-\nu+1} = N_\nu$ и $N_{s-\nu+1} = \Delta_\nu$. Поменяв в (6.1) местами индексы p и l, получим

$$T_{s-\nu+1}[(nl+\sigma)N_\nu+p, (nl+\tau)N_\nu+p] = \omega_n^{\sigma\tau}, \tag{6.2}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu-1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu-1.$$

Равенство $g_\nu = T_{s-\nu+1}\, g_{\nu-1}$ и формула (6.2) позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $g_{\nu-1}$ к базису g_ν:

$$g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$g_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu+p\big) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p), \tag{6.3}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu-1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu-1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = 1$ формула (6.3) принимает вид

$$g_1(\sigma N_1+p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_0(\tau N_1+p), \tag{6.4}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1-1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

6.3. Получим явное выражение для базисных сигналов.

Теорема 6.2. *Имеет место представление*

$$g_\nu(lN_\nu+p)=\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l,q]\,g_0(qN_\nu+p), \tag{6.5}$$

$$l=0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1,\quad p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\quad \nu=1,\ldots,s.$$

Доказательство. При $\nu=1$ формула (6.5) совпадает с (6.4), если заменить l на σ и q на τ. Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν.

Возьмем индекс $l\in\{0,1,\ldots,\Delta_{\nu+1}-1\}$ и воспользуемся тем, что $l=l'n+\sigma$ при некоторых $\sigma\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ и $l'\in\in\{0,1,\ldots,\Delta_\nu-1\}$. Опираясь на (6.4), индукционное предположение и (5.7), запишем

$$g_\nu(lN_\nu+p)=g_\nu\big((nl'+\sigma)N_\nu+p\big)=$$

$$=\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\,g_{\nu-1}(l'N_{\nu-1}+\tau N_\nu+p)=$$

$$=\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\Big\{\sum_{q'=0}^{\Delta_\nu-1}V_{\Delta_\nu}[l',q']\,g_0(q'N_{\nu-1}+\tau N_\nu+p)\Big\}=$$

$$=\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q'=0}^{\Delta_\nu-1}V_{\Delta_{\nu+1}}[l'n+\sigma,\,q'n+\tau]\,g_0\big((q'n+\tau)N_\nu+p\big)=$$

$$=\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}V_{\Delta_{\nu+1}}[l,q]\,g_0(qN_\nu+p).$$

Теорема доказана. ■

6.4. Если сравнить правые части формул (6.5) и (3.2), то можно убедиться, что они совпадают. Это следует из равенства (5.8) и определения базисов g_0 и ξ_0. Таким образом, *при каждом* $\nu = 0, 1, \ldots, s$ *базисы* g_ν *и* ξ_ν *идентичны с точностью до перенумерации базисных сигналов.* Точнее,

$$\xi_\nu(p\Delta_{\nu+1} + l) = g_\nu(lN_\nu + p),$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Так же, как и в случае с базисами f_ν, нумерация сигналов базиса g_ν позволяет осуществить секционирование, разделяя базисные сигналы на блоки, которые преобразуются согласно схеме рекуррентного перехода (6.3).

Поясним эту схему. Предполагается, что базис $g_{\nu-1}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l. Каждый такой блок содержит $N_{\nu-1}$ элементов с внутренней индексацией $\tau N_\nu + p$. Согласно (6.3) блок с индексом l базиса $g_{\nu-1}$ порождает n блоков базиса g_ν с индексами $nl + \sigma$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, причем в каждом таком блоке находится N_ν элементов с внутренним индексом p. Приведенный ранее рис. 1 иллюстрирует схему ветвления (6.3) при $N = 3^2$.

6.5. Изучим базисы g_ν подробнее.

Предложение 6.1. *Справедливы формулы*

$$g_\nu(0; j) = \delta_{N_\nu}(j), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{6.6}$$

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu), \qquad (6.7)$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (6.6) равносильна очевидному соотношению

$$\sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - qN_\nu) = \delta_{N_\nu}(j). \qquad (6.8)$$

Проверим (6.7). Согласно (6.5), (5.8) и (6.8) имеем

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} V_{\Delta_{\nu+1}}[\sigma,\, qn+\tau]\, g_0\big((qn+\tau)N_\nu; j\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - \tau N_\nu - qN_{\nu-1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu),$$

что и требовалось установить. ■

Формула (6.7) показывает, в частности, что сигнал $g_\nu(\sigma N_\nu; j)$ является $N_{\nu-1}$-периодическим.

Из (6.7) следует также равенство

$$g_{\nu+1}(\sigma N_{\nu+1}; j) = g_\nu(\sigma N_\nu; nj), \qquad (6.9)$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

Действительно,

$$g_\nu(\sigma N_\nu; nj) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}\big(n(j - \tau N_{\nu+1})\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_\nu}(j - \tau N_{\nu+1}) = g_{\nu+1}(\sigma N_{\nu+1}; j).$$

Теорема 6.3. *При $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ выполняются тождества*

$$g_\nu(lN_\nu + p; j) = g_\nu(lN_\nu; j - p), \tag{6.10}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1;$$

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j - kN_\nu) = \omega_n^{-\sigma k}\, g_\nu(\sigma N_\nu; j), \tag{6.11}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Согласно (6.5)

$$g_\nu(lN_\nu; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q]\, \delta_N(j - qN_\nu),$$

так что

$$g_\nu(lN_\nu; j - p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q]\, \delta_N\big(j - (qN_\nu + p)\big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} V_{\Delta_{\nu+1}}[l, q]\, g_0(qN_\nu + p; j) = g_\nu(lN_\nu + p; j).$$

Тождество (6.10) установлено.

Переходя к (6.11), зафиксируем j и введем дискретную функцию $h(\tau) = \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu)$. Эта функция n-периодична, поэтому

$$\sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau + k) = \sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{6.12}$$

С учетом (6.7) получаем

$$g_\nu(\sigma N_\nu; j - kN_\nu) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma(\tau+k)-\sigma k}\, \delta_{N_{\nu-1}}\bigl(j - (\tau + k)N_\nu\bigr) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma k} \sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau + k) = \omega_n^{-\sigma k} \sum_{\tau=0}^{n-1} h(\tau) = \omega_n^{-\sigma k}\, g_\nu(\sigma N_\nu; j).$$

Теорема доказана. ■

§ 7. Быстрое преобразование Виленкина–Крестенсона второго рода

7.1. Любой сигнал x можно разложить по ортогональному базису $f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)$ при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, f_\nu(k). \tag{7.1}$$

Здесь $x_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, f_\nu(k)\rangle$. В частности,

$$x_0(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j - k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Согласно (5.4)

$$x_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \bigl\langle x, f_{\nu-1}\bigl(l + (np + \tau)\Delta_\nu\bigr)\bigr\rangle =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}\bigl(l + (np + \tau)\Delta_\nu\bigr).$$

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (7.1):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}\big(l + (np+\tau)\Delta_\nu\big), \tag{7.2}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала x по базису Виленкина–Крестенсона (1.4):

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, v_k(j). \tag{7.3}$$

Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам.

Формула (7.2) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}\big(l + (np+\tau)\Delta_\nu\big) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \tag{7.4}$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Основная роль формулы (7.4) заключается в том, что с ее помощью вычисляются значения сигнала x, заданного в виде (7.3), на основном периоде, а именно: $x(k) = x_0(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

7.2. Аналогично сигнал x можно разложить по ортогональному базису $g_\nu(0), g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)$ при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, g_\nu(k). \tag{7.5}$$

Здесь $y_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, g_\nu(k)\rangle$. Коэффициенты разложений (7.5) в силу (6.3) вычисляются по рекуррентной схеме

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \qquad (7.6)$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} y_s(k)\, v_k(j),$$

т. е. $y_s(k) = x_s(k)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Попутно вычисляются коэффициенты разложений по каждому промежуточному базису g_ν, которые, конечно, отличны от коэффициентов разложений по промежуточным базисам f_ν.

Формула (7.6) допускает обращение:

$$y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, y_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big), \qquad (7.7)$$

$$l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

С помощью (7.7) можно вычислить значения сигнала x, заданного в виде (7.5) при некотором $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, на основном периоде.

Схемы (7.2) и (7.6) назовем *быстрыми преобразованиями Виленкина–Крестенсона второго рода*, связанными соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени*.

7.3. В § 4 было установлено, что частота дискретной функции Виленкина–Крестенсона v_k равна $\mathrm{rev}_s(k)$, и что функции ортогональной системы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ можно переупорядочить, положив $\mathrm{Pal}_k(j) = v_{\,\mathrm{rev}_s(k)}(j)$. При этом частота функции $\mathrm{Pal}_k(j)$ равна k. В этих обозначениях формула (7.3) примет вид

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)\,\mathrm{Pal}_k(j). \tag{7.8}$$

Для цифровой обработки сигналов следует использовать именно разложение (7.8), поскольку базисные функции Виленкина–Крестенсона в этом разложении упорядочены по возрастанию частоты.

§ 8. Связь четырех вариантов факторизации матрицы Виленкина–Крестенсона

8.1. Введем квадратную матрицу R_ν порядка $\Delta_{\nu+1}$ с элементами

$$R_\nu[k,j] = \begin{cases} 1, \ \text{если } j = \mathrm{rev}_\nu(k), \\ 0 \ \text{при остальных } k, j \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}. \end{cases}$$

В частности, $R_0 = 1,\ R_1 = E_n$. Очевидно, что R_ν — симметричная матрица и

$$R_\nu R_\nu = E_{\Delta_{\nu+1}}. \tag{8.1}$$

Действие R_ν определяется так:

$$y = R_\nu x \quad \Leftrightarrow \quad y(k) = x\big(\mathrm{rev}_\nu(k)\big),\ k \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}.$$

В связи с этим матрица R_ν называется *матрицей реверсных перестановок*. Если A — квадратная матрица порядка $\Delta_{\nu+1}$, то умножение $R_\nu A$ ревертирует строки матрицы A, а умножение AR_ν ревертирует столбцы матрицы A.

Нам потребуется дополнительная информация о перестановке reverse.

Лемма 8.1. *Справедливо соотношение*

$$\mathrm{rev}_\nu(\sigma\Delta_\nu + l) = n\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma \tag{8.2}$$

при $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\nu = 1, \ldots, s$.

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (8.2) тривиальна. Пусть $\nu \geq 2$. Положим $l' = \mathrm{rev}_{\nu-1}(l)$. Согласно (1.3)

$$\mathrm{rev}_\nu(nl' + \sigma) = \sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l'),$$

что равносильно

$$nl' + \sigma = \mathrm{rev}_\nu\bigl(\sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l')\bigr).$$

Учитывая, что $\mathrm{rev}_{\nu-1}(l') = l$, приходим к (8.2). ■

8.2. Установим связь между четырьмя вариантами факторизации (1.7), (1.9), (1.11), (1.15) матрицы функций Виленкина–Крестенсона V_N.

Теорема 8.1. *При каждом* $\nu = 1, \ldots, s$ *справедливо равенство*

$$T_\nu = (R_{s-\nu+1} \otimes R_{\nu-1}) D (R_{s-\nu} \otimes R_\nu). \tag{8.3}$$

Доказательство. Согласно лемме 5.2

$$T_\nu[p\Delta_{\nu+1}+\sigma\Delta_\nu+l, q\Delta_{\nu+1}+\tau\Delta_\nu+m] = E_{N_\nu}[p,q]\, F_n[\sigma,\tau]\, E_{\Delta_\nu}[l,m],$$

$$l,m=0,1,\dots,\Delta_\nu-1, \quad \sigma,\tau=0,1,\dots,n-1, \quad p,q=0,1,\dots,N_\nu-1.$$

Обозначим правую часть равенства (8.3) через Λ_ν и покажем, что $\Lambda_\nu = T_\nu$. При $l,m = 0,1,\dots,\Delta_\nu-1$, $\sigma,\tau = 0,1,\dots,n-1$, $p,q=0,1,\dots,N_\nu-1$ в силу (1.3), (8.1) и (1.12) имеем

$$\Lambda_\nu[p\Delta_{\nu+1}+\sigma\Delta_\nu+l, q\Delta_{\nu+1}+\tau\Delta_\nu+m] =$$

$$= D[\mathrm{rev}_{s-\nu+1}(pn+\sigma)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(l), \mathrm{rev}_{s-\nu}(q)\Delta_{\nu+1}+\mathrm{rev}_\nu(\tau\Delta_\nu+m)] =$$

$$= D\big[\big(\sigma\Delta_{s-\nu+1}+\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(l),$$

$$\mathrm{rev}_{s-\nu}(q)\Delta_{\nu+1}+n\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(m)+\tau\big] =$$

$$= D\big[\sigma N_1+\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)\big),$$

$$\big(\mathrm{rev}_{s-\nu}(q)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(m)\big)n+\tau\big] =$$

$$= F_n[\sigma,\tau]\, E_{N_1}[\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(l), \mathrm{rev}_{s-\nu}(q)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(m)].$$

Осталось заметить, что

$$E_{N_1}[\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(l), \mathrm{rev}_{s-\nu}(q)\Delta_\nu+\mathrm{rev}_{\nu-1}(m)] =$$

$$= E_{N_\nu}[\mathrm{rev}_{s-\nu}(p), \mathrm{rev}_{s-\nu}(q)]\, E_{\Delta_\nu}[\mathrm{rev}_{\nu-1}(l), \mathrm{rev}_{\nu-1}(m)] =$$

$$= E_{N_\nu}[p,q]\, E_{\Delta_\nu}[l,m].$$

Теорема доказана. ■

Покажем, как с помощью (8.3) получить факторизацию (1.7) из (1.11). Нетрудно видеть, что $V_N = R_s V_N R_s$ (это следует из (1.5), (1.4) и определения операции $\{\cdot,\cdot\}_s$). С учетом (8.1) имеем

$$V_N = R_s D^s R_s =$$

$$= R_s D(R_{s-1} \otimes R_1)(R_{s-1} \otimes R_1) D(R_{s-2} \otimes R_2)(R_{s-2} \otimes R_2) D \times \ldots$$

$$\ldots \times (R_2 \otimes R_{s-2}) D(R_1 \otimes R_{s-1})(R_1 \otimes R_{s-1}) D R_s =$$

$$= T_1 T_2 T_3 \cdots T_{s-1} T_s.$$

Далее, транспонируя (8.3) и принимая во внимание симметричность матриц T_ν и R_ν и равенство $C = D^\top$, получаем

$$T_\nu = (R_{s-\nu} \otimes R_\nu) C (R_{s-\nu+1} \otimes R_{\nu-1}). \tag{8.4}$$

С помощью (8.4) можно вывести факторизацию (1.9) из (1.15):

$$V_N = R_s C^s R_s =$$

$$= R_s C(R_1 \otimes R_{s-1})(R_1 \otimes R_{s-1}) C(R_2 \otimes R_{s-2}) \cdots (R_{s-1} \otimes R_1) C R_s =$$

$$= T_s T_{s-1} \cdots T_1.$$

Глава II
Дискретное преобразование Хаара–Крестенсона

§ 9. Базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по времени

9.1. На рис. 1 было показано, как на горизонтальных уровнях $\nu = 0, 1, \ldots, s$ последовательно формируются ортогональные базисы f_0, f_1, ..., f_s и g_0, g_1, ..., g_s. Количество ортогональных базисов в $\mathbb{C}_N$ можно значительно увеличить, если использовать вертикальную составляющую. Это демонстрируется на рис. 2 при $N = 3^3$. Сигналы, находящиеся в висячих блоках, во всех четырех представленных примерах образуют ортогональные базисы. Действительно, ортогональность сигналов ν-го уровня известна. Сигналы каждого висячего блока $(\nu + 1)$-го уровня являются линейными комбинациями сигналов некоторого блока ν-го уровня и поэтому они ортогональны сигналам из остальных блоков ν-го уровня.

Ортогональные базисы в $\mathbb{C}_N$, образованные из блоков всех уровней $\nu = 1, \ldots, s$, будем называть *обобщенными вейвлетными базисами.* Далее мы детально рассмотрим обобщенные вейвлетные базисы, соответствующие схеме ветвления (а) на рис. 2.

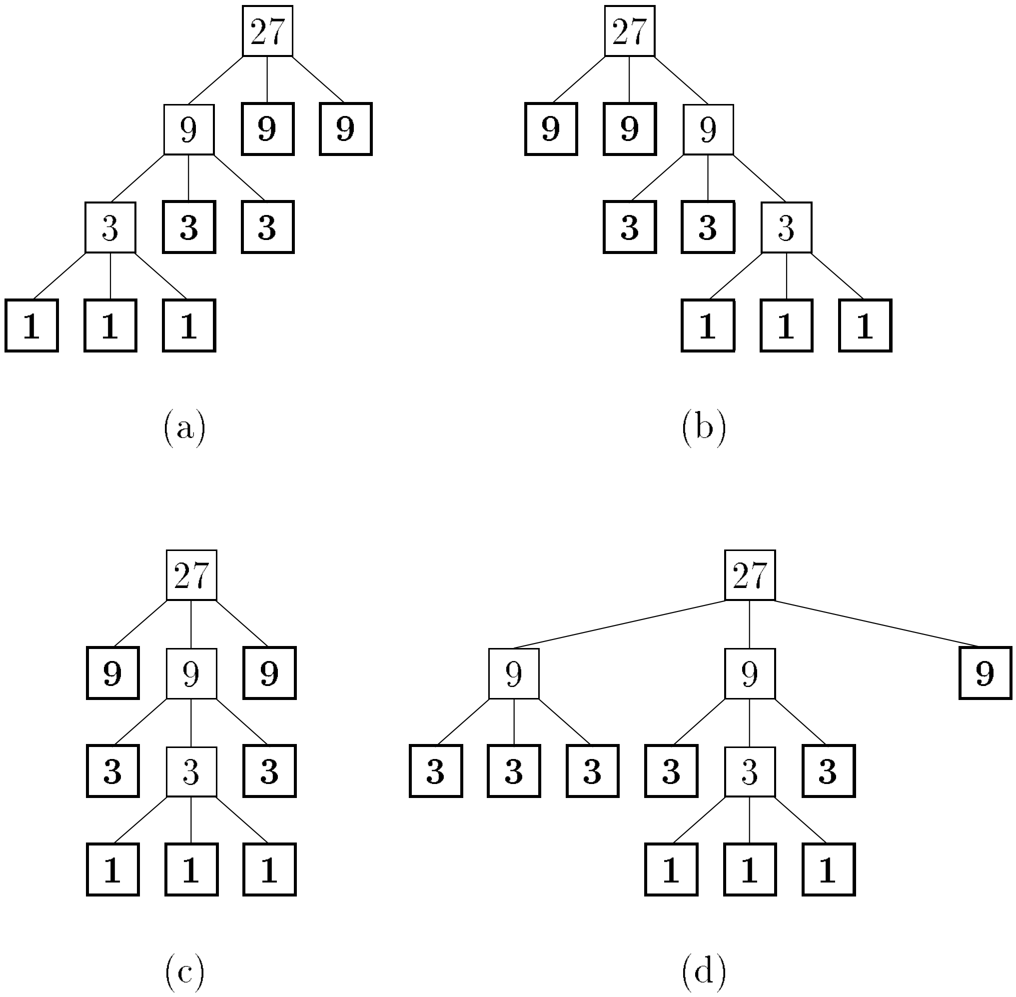

Рис. 2

9.2. Вначале воспользуемся последовательностью базисов g_0, $g_1, \ldots, g_s$. Обозначим через V_ν, $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$, линейную оболочку, натянутую на сигналы $g_\nu(p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, а через $W_\nu^{(\sigma)}$, $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, — линейную оболочку, натянутую на $g_\nu(\sigma N_\nu + p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$. По теореме 6.1 подпространства $V_\nu, W_\nu^{(1)}, \ldots, W_\nu^{(n-1)}$ попарно ортогональны при всех $\nu \in \{1, \ldots, s\}$.

Согласно (6.3) при $l = 0$ имеем

$$g_\nu(\sigma N_\nu + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \tag{9.1}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Отсюда, в частности, следует, что $V_\nu \subset V_{\nu-1}$ и $W_\nu^{(\sigma)} \subset V_{\nu-1}$ при $\sigma = 1, \ldots, n-1$. Если учесть, что размерность всех подпространств V_ν, $W_\nu^{(1)}$, …, $W_\nu^{(n-1)}$ равна N_ν и что сумма этих размерностей равна размерности $V_{\nu-1}$, то придем к представлению

$$V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}. \tag{9.2}$$

Обозначим $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$. Тогда формулу (9.2) можно записать короче:

$$V_{\nu-1} = W_\nu \oplus V_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{9.3}$$

Поскольку

$$V_0 = \operatorname{lin}\left(\left\{g_0(p)\right\}_{p=0}^{N-1}\right) = \operatorname{lin}\left(\left\{\delta_N(\cdot - p)\right\}_{p=0}^{N-1}\right) = \mathbb{C}_N,$$

то в силу (9.3) получаем вейвлетное разложение

$$\mathbb{C}_N = V_0 = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = \ldots =$$

$$= W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s \oplus V_s. \tag{9.4}$$

9.3. Выясним структуру вейвлетных подпространств.

Теорема 9.1. *Справедливы формулы*

$$V_\nu = \mathbb{C}_{N_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{9.5}$$

$$W_\nu^{(\sigma)} = \bigl\{x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}} \bigm| x(j - \tau N_\nu) = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j) \quad \forall\, \tau \in \{1, \ldots, n-1\}\bigr\}, \tag{9.6}$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Согласно (6.10) и (6.6), при $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ имеем

$$g_\nu(p; j) = g_\nu(0; j - p) = \delta_{N_\nu}(j - p).$$

Отсюда очевидным образом следует (9.5). В частности, $V_s := = \operatorname{lin}\bigl(g_s(0)\bigr)$ есть подпространство комплексных констант, так как $g_s(0; j) \equiv 1$ в силу (6.5).

Обозначим правую часть формулы (9.6) через $G_\nu^{(\sigma)}$ и покажем вначале, что $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$. Пусть $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Тогда

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j - p).$$

Как отмечалось в § 6, сигналы $g_\nu(\sigma N_\nu; j)$ являются $N_{\nu-1}$-периодическими, поэтому $x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$. Далее в силу (6.11)

$$x(j - \tau N_\nu) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, \bigl[\omega_n^{-\sigma\tau} g_\nu(\sigma N_\nu; j - p)\bigr] = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j).$$

Получили, что $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. Включение $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$ установлено.

Проверим обратное включение. Возьмем $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. Поскольку $x \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$, то

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_{\nu-1} - 1} a(p)\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - p) = \sum_{p=0}^{nN_\nu - 1} a(p)\, g_{\nu-1}(0; j - p).$$

По определению $G_\nu^{(\sigma)}$ при $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$ имеем

$$x(j) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j - \tau N_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{p=0}^{nN_\nu - 1} a(p)\, g_{\nu-1}(0; j - p - \tau N_\nu) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{p=0}^{nN_\nu - 1} a(p)\, g_{\nu-1}(\tau N_\nu; j - p).$$

Сложив эти равенства и поделив на n, на основании (9.1), (6.11) и (6.10) получим

$$x(j) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{nN_\nu - 1} a(p) \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} g_{\nu-1}(\tau N_\nu; j - p) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{nN_\nu - 1} a(p)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j - p) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=kN_\nu}^{(k+1)N_\nu - 1} a(p)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j - p) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} a(p + kN_\nu)\, g_\nu(\sigma N_\nu; j - p - kN_\nu) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \Bigl(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma k} a(p + kN_\nu) \Bigr) g_\nu(\sigma N_\nu + p; j).$$

Значит, $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Включение $G_\nu^{(\sigma)} \subset W_\nu^{(\sigma)}$, а с ним и теорема, доказаны. ∎

9.4. Согласно (9.4) любой сигнал x допускает представление

$$x = y_s(0)\, g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} y_\nu(\sigma N_\nu + p)\, g_\nu(\sigma N_\nu + p). \tag{9.7}$$

Здесь $y_s(0) = N^{-1}\langle x, g_s(0)\rangle = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1} x(j)$ и

$$y_\nu(\sigma N_\nu + p) = n^{-\nu}\langle x, g_\nu(\sigma N_\nu + p)\rangle.$$

Учитывая (9.1), запишем

$$y_\nu(\sigma N_\nu + p) = n^{-\nu}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\,\langle x, g_{\nu-1}(\tau N_\nu + p)\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\,y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p).$$

При этом

$$y_0(k) = \langle x, g_0(k)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\delta_N(j-k) = x(k),$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Приходим к рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложения (9.7):

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$y_\nu(\sigma N_\nu + p) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\tau}\,y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \tag{9.8}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты $y_\nu(p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, соответствующие индексу $\sigma = 0$, используются для вычисления коэффициентов $(\nu+1)$-го уровня.

Обращение преобразования (9.8) приводит к следующей схеме:

$$y_{\nu-1}(\tau N_\nu + p) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, y_\nu(\sigma N_\nu + p),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Эта схема позволяет вычислить значения сигнала x, заданного в виде (9.7), на основном периоде, а именно: $x(k) = y_0(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Разложение (9.7) назовем *разложением Хаара–Крестенсона, связанным с прореживанием по времени*, а схему (9.8) — *быстрым преобразованием Хаара–Крестенсона.*

Отметим, что в (9.7) базисные сигналы $g_\nu(\sigma N_\nu + p)$ можно сформировать из $n-1$ сигнала $g_1(\sigma N_1)$, $\sigma = 1, \ldots, n-1$. Это следует из (6.9) и (6.10). Для образующих сигналов $g_1(\sigma N_1)$ согласно (6.7) имеется явное представление

$$g_1(\sigma N_1; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_N(j - \tau N_1).$$

9.5. Формулу (9.7) можно вывести непосредственно, без привлечения высокой теории. Запишем тождество

$$x(j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \Bigl(\frac{1}{n} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\Bigr) x(j - \tau N_1) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \Bigl(\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, x(j - \tau N_1)\Bigr) =$$

$$= \tfrac{1}{n}\bigl[x(j) + x(j - N_1) + x(j - 2N_1) + \ldots + x\bigl(j - (n-1)N_1\bigr)\bigr] +$$

$$+ \tfrac{1}{n}\bigl[x(j) + \omega_n x(j - N_1) + \omega_n^2 x(j - 2N_1) + \ldots + \omega_n^{n-1} x\bigl(j - (n-1)N_1\bigr)\bigr] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\tfrac{1}{n}\big[x(j)+\omega_n^{n-1}x(j-N_1)+\omega_n^{2(n-1)}x(j-2N_1)+\ldots+$$

$$+\,\omega_n^{(n-1)^2}x\big(j-(n-1)N_1\big)\big] =:$$

$$=: v_1(j)+w_1^{(1)}(j)+\ldots+w_1^{(n-1)}(j).$$

Здесь

$$v_1(j)=\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}x(j-\tau N_1)=\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N-1}x(q)\,\delta_N(j-q-\tau N_1)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_1-1}x(kN_1+p)\,\delta_N\big(j-p-(\tau+k)N_1\big)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{N_1-1}\sum_{k=0}^{n-1}x(kN_1+p)\sum_{\tau=0}^{n-1}\delta_N\big(j-p-(\tau+k)N_1\big)=$$

$$=\sum_{p=0}^{N_1-1}\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_0(kN_1+p)\Big\}\Big\{\sum_{\tau'=0}^{n-1}\delta_N(j-p-\tau' N_1)\Big\}=$$

$$=\sum_{p=0}^{N_1-1}y_1(p)\sum_{\tau'=0}^{n-1}g_0(\tau' N_1+p;j)=\sum_{p=0}^{N_1-1}y_1(p)\,g_1(p;j).$$

Аналогично при $\sigma=1,\ldots,n-1$

$$w_1^{(\sigma)}(j)=\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}x(j-\tau N_1)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\sum_{q=0}^{N-1}x(q)\,\delta_N(j-q-\tau N_1)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_1-1}\omega_n^{\sigma(\tau+k)-\sigma k}x(kN_1+p)\,\delta_N\big(j-p-(\tau+k)N_1\big)=$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma k} y_0(kN_1+p) \Big\} \Big\{ \sum_{\tau'=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau'} g_0(\tau' N_1 + p; j) \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_1(\sigma N_1 + p)\, g_1(\sigma N_1 + p; j).$$

Мы воспользовались формулой (6.12). Слагаемые $w_1^{(\sigma)}(j)$ являются вейвлетными составляющими. Они входят в (9.7) при $\nu = 1$. Сигнал $v_1(j)$ преобразуется по такому же правилу

$$v_1(j) = v_2(j) + w_2^{(1)}(j) + \ldots + w_2^{(n-1)}(j),$$

где

$$v_2(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} v_1(j - \tau N_2) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_1-1} y_1(q)\, g_1(q; j - \tau N_2) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_2-1} y_1(kN_2 + p)\, g_1(kN_2 + p; j - \tau N_2) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{n-1} y_1(kN_2 + p) \sum_{\tau=0}^{n-1} g_1\big(0; j - p - (\tau + k) N_2\big) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_1(kN_2 + p) \Big\} \Big\{ \sum_{\tau'=0}^{n-1} g_1(0; j - p - \tau' N_2) \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} y_2(p) \sum_{\tau'=0}^{n-1} g_1(\tau' N_2 + p; j) = \sum_{p=0}^{N_2-1} y_2(p)\, g_2(p; j)\,;$$

$$w_2^{(\sigma)}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}v_1(j-\tau N_2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_2-1}\omega_n^{\sigma\tau}y_1(kN_2+p)\,g_1\bigl(0; j-p-(\tau+k)N_2\bigr) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1}\Bigl\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma k}y_1(kN_2+p)\Bigr\}\Bigl\{\sum_{\tau'=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau'}g_1(\tau' N_2+p; j)\Bigr\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1}y_2(\sigma N_2+p)\,g_2(\sigma N_2+p; j).$$

Мы воспользовались n-периодичностью дискретной функции $h(\tau) = \omega_n^{\sigma\tau}g_1(0; j-p-\tau N_2)$ и формулой (6.12). Слагаемые $w_2^{(\sigma)}(j)$, $\sigma = 1, \ldots, n-1$, входят в (9.7) при $\nu = 2$. Сигнал $v_2(j)$ подвергается дальнейшему преобразованию.

Общий шаг этого процесса выглядит так:

$$v_\nu(j) = v_{\nu+1}(j) + w_{\nu+1}^{(1)}(j) + \ldots + w_{\nu+1}^{(n-1)}(j), \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

Здесь

$$v_{\nu+1}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}v_\nu(j-\tau N_{\nu+1}),$$

$$w_{\nu+1}^{(\sigma)}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}v_\nu(j-\tau N_{\nu+1}).$$

Осуществив все указанные разложения, придем к (9.7).

§ 10. Базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по частоте

10.1. Проведем аналогичное исследование, используя последовательность базисов $f_0, f_1, \ldots, f_s$. Обозначим через V_ν, $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$, линейную оболочку, натянутую на сигналы $f_\nu(p\Delta_{\nu+1})$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, а через $W_\nu^{(\sigma)}$, $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, — линейную оболочку, натянутую на $f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$. По теореме 5.1 подпространства V_ν, $W_\nu^{(1)}$, $\ldots$, $W_\nu^{(n-1)}$ попарно ортогональны при всех $\nu \in \{1, \ldots, s\}$. Согласно (5.4) при $l = 0$ имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} f_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \tag{10.1}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Отсюда, как и в предыдущем параграфе, следует представление

$$V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu^{(1)} \oplus W_\nu^{(2)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}.$$

Обозначим $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$. Учитывая, что $V_0 = \mathbb{C}_N$, приходим к вейвлетному разложению

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_N = V_0 = W_1 \oplus V_1 = W_1 \oplus (W_2 \oplus V_2) = \ldots = \\ = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s \oplus V_s. \end{aligned} \tag{10.2}$$

10.2. Выясним структуру вейвлетных подпространств. Нам потребуются две леммы, в которых используются операции поразрядного сложения и вычитания по модулю n двух целых неотрицательных чисел, представленных своими n-ичными кодами (см. § 1).

Лемма 10.1. *Пусть* $\nu \in \{1,\dots,s\}$, $\sigma \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $p \in \{0,1,\dots,N_\nu - 1\}$. *При любых* $\tau = 0,1,\dots,n-1$ *и* $j = 0,1,\dots,N-1$ *выполняется равенство*

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j). \tag{10.3}$$

Доказательство. Согласно (5.12) и (5.11) имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = f_\nu\big(\sigma\Delta_\nu;\, (j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) - p\Delta_{\nu+1}\big) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\lambda} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) - p\Delta_{\nu+1} - q - \lambda\Delta_\nu\big). \tag{10.4}$$

Обозначим через τ^* целое число из $\{0,1,\dots,n-1\}$, такое, что $\tau \underset{n}{\oplus} \tau^* = 0$. Тогда

$$\delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) - p\Delta_{\nu+1} - q - \lambda\Delta_\nu\big) = \delta_N\big((j_{s-1}\Delta_s + \ldots + j_\nu\Delta_{\nu+1} +$$

$$+ (j_{\nu-1} \underset{n}{\oplus} \tau)\Delta_\nu + j_{\nu-2}\Delta_{\nu-1} + \ldots + j_0) - p\Delta_{\nu+1} - \lambda\Delta_\nu - q\big) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } j_{s-1}\Delta_s + \ldots + j_\nu\Delta_{\nu+1} = p\Delta_{\nu+1}, \;\; j_{\nu-1} = \lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*, \\ \qquad\qquad j_{\nu-2}\Delta_{\nu-1} + \ldots + j_0 = q; \\ 0 \;\; \text{при остальных } j \in \{0,1,\dots,N-1\} \end{array} \right\} =$$

$$= \delta_N\big(j - p\Delta_{\nu+1} - (\lambda \underset{n}{\oplus} \tau^*)\Delta_\nu - q\big) =$$

$$= \delta_N\big(j - p\Delta_{\nu+1} - (\lambda \underset{n}{\ominus} \tau)\Delta_\nu - q\big). \tag{10.5}$$

Отметим, что

$$\omega_n^{\sigma\lambda} = \omega_n^{\sigma[(\lambda \underset{n}{\ominus} \tau) \underset{n}{\oplus} \tau]} = \omega_n^{\sigma(\lambda \underset{n}{\ominus} \tau) + \sigma\tau}. \tag{10.6}$$

Подставляя (10.5) и (10.6) в (10.4), получаем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma(\lambda \underset{n}{\ominus} \tau)} \delta_N\bigl(j - p\Delta_{\nu+1} - (\lambda \underset{n}{\ominus} \tau)\Delta_\nu - q\bigr) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{\lambda'=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\lambda'} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - \lambda'\Delta_\nu - q) =$$

$$= \omega_n^{\sigma\tau} f_\nu(\sigma\Delta_\nu;\, j - p\Delta_{\nu+1}) = \omega_n^{\sigma\tau} f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j).$$

Мы воспользовались тем, что при фиксированном τ отображение $\lambda \to \lambda \underset{n}{\ominus} \tau$ есть перестановка множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Лемма доказана. ■

Лемма 10.2. *Зафиксируем сигнал x и индекс $\nu \in \{1, \ldots, s\}$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

$$x(j) = x\bigl(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\bigr), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1; \tag{10.7}$$

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x(j), \quad q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1}-1, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10.8}$$

Доказательство. Пусть $j = p\Delta_{\nu+1} + l$, где $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1}-1\}$, $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. Если выполняется условие (10.7), то $x(j) = x(p\Delta_{\nu+1})$. Вместе с тем, при любом $q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1}-1\}$ в силу того же условия (10.7) имеем

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x\bigl(\lfloor (j \underset{n}{\oplus} q)/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\bigr) =$$

$$= x\Bigl(\bigl\lfloor \bigl(p\Delta_{\nu+1} + (l \underset{n}{\oplus} q)\bigr)/\Delta_{\nu+1} \bigr\rfloor \Delta_{\nu+1}\Bigr) = x(p\Delta_{\nu+1}) = x(j),$$

т. е. выполняется условие (10.8).

Наоборот, согласно (10.8)

$$x(j) = x(p\Delta_{\nu+1} + l) = x(p\Delta_{\nu+1} \underset{n}{\oplus} l) = x(p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= x\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big),$$

так что из (10.8) следует (10.7). Лемма доказана. ∎

З а м е ч а н и е. Условие (10.8) равносильно более простому условию

$$x(j \underset{n}{\oplus} \Delta_\mu) = x(j), \quad \mu = 1, \ldots, \nu, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10.9}$$

Достаточно проверить импликацию (10.9) ⇒ (10.8). Сначала отметим, что

$$x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\mu) = x(j), \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10.10}$$

При $\tau = 0$ и $\tau = 1$ это очевидно. При $\tau \geq 2$ на основании (10.9) получаем

$$x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\mu) = x\Big(\big(j \underset{n}{\oplus} (\tau-1)\Delta_\mu\big) \underset{n}{\oplus} \Delta_\mu\Big) = x\big(j \underset{n}{\oplus} (\tau-1)\Delta_\mu\big) =$$

$$= \ldots = x(j \underset{n}{\oplus} \Delta_\mu) = x(j).$$

Учитывая (10.10), запишем

$$x(j \underset{n}{\oplus} q) = x\big(j \underset{n}{\oplus} (q_{\nu-1}\Delta_\nu + \ldots + q_1\Delta_2 + q_0\Delta_1)\big) =$$

$$= x\Big(\big(j \underset{n}{\oplus} (q_{\nu-1}\Delta_\nu + \ldots + q_1\Delta_2)\big) \underset{n}{\oplus} q_0\Delta_1\Big) =$$

$$= x\big(j \underset{n}{\oplus} (q_{\nu-1}\Delta_\nu + \ldots + q_1\Delta_2)\big) = \ldots = x(j \underset{n}{\oplus} q_{\nu-1}\Delta_\nu) = x(j),$$

что и требовалось установить.

Теперь мы готовы охарактеризовать структуру подпространств V_ν и $W_\nu^{(\sigma)}$.

Теорема 10.1. *Сигнал x является элементом подпространства V_ν тогда и только тогда, когда выполняется условие* (10.8).

Доказательство. По определению, V_ν состоит из сигналов вида

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} c(p)\, f_\nu(0; j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Поскольку

$$f_\nu(0;j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \\ 0 & \text{при} \quad j = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N - 1, \end{cases}$$

то элементы V_ν являются кусочно-постоянными функциями, точнее

$$x(j) = x(p\Delta_{\nu+1}) \quad \text{при} \quad j = p\Delta_{\nu+1}, \ldots, (p+1)\Delta_{\nu+1} - 1,$$
$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1.$$

Последнее условие можно записать иначе:

$$x(j) = x\bigl(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\bigr), \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Остается сослаться на лемму (10.2). ■

Теорема 10.2. *Справедлива формула*

$$W_\nu^{(\sigma)} = \Bigl\{ x \in V_{\nu-1} \Bigm| x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j) \quad \textit{при всех} \quad \tau = 1, \ldots, n-1 \;\; \textit{и} \;\; j = 0, 1, \ldots, N - 1 \Bigr\}. \tag{10.11}$$

Доказательство. Обозначим через $G_\nu^{(\sigma)}$ множество, стоящее в правой части (10.11), и покажем сначала, что $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$.

Пусть $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Так как $W_\nu^{(\sigma)} \subset W_\nu \subset V_{\nu-1}$, то $x \in V_{\nu-1}$. Далее

$$x = \sum_{p=0}^{N_\nu-1} c(p)\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

Согласно (10.3)

$$x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \sum_{p=0}^{N_\nu-1} c(p)\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) = \omega_n^{\sigma\tau} x(j).$$

Значит, $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. Включение $W_\nu^{(\sigma)} \subset G_\nu^{(\sigma)}$ установлено.

Проверим обратное включение. Пусть $x \in G_\nu^{(\sigma)}$. В частности, $x \in V_{\nu-1}$. Учитывая, что $V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$, запишем

$$x = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} c(\lambda, p)\, f_\nu(\lambda\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

В силу определения $G_\nu^{(\sigma)}$ и (10.3) при $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$ имеем

$$x(j) = \omega_n^{-\sigma\tau} x(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_\nu) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma\tau} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} c(\lambda, p)\, \omega_n^{\lambda\tau} f_\nu(\lambda\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j).$$

Сложив эти равенства и поделив на n, получим

$$x = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{\lambda\tau} c(\lambda, p)\, f_\nu(\lambda\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} c(\lambda, p)\, f_\nu(\lambda\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{(\lambda-\sigma)\tau} \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} c(\sigma, p)\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),$$

т. е. $x \in W_\nu^{(\sigma)}$. Включение $G_\nu^{(\sigma)} \subset W_\nu^{(\sigma)}$, а с ним и теорема, доказаны. ■

10.3. Согласно (10.2) любой сигнал x допускает представление

$$x = x_s(0)\, f_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}). \tag{10.12}$$

Здесь $x_s(0) = N^{-1}\langle x, f_s(0)\rangle = \dfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)$ и

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\langle x, f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\rangle.$$

Учитывая (10.1), запишем

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = n^{-\nu}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, \langle x, f_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

При этом $x_0(k) = \langle x, f_0(k)\rangle = x(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Приходим к рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложения (10.12):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \tag{10.13}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты $x_\nu(p\Delta_{\nu+1})$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, соответствующие индексу $\sigma = 0$, используются для вычисления коэффициентов $(\nu+1)$-го уровня.

Обращение преобразования (10.13) приводит к следующей схеме:

$$x_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),$$

$$p = 0, 1, \dots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \dots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \dots, 1.$$

Эта схема позволяет вычислить значения сигнала x, заданного в виде (10.12), на основном периоде, а именно: $x(k) = x_0(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Разложение (10.12) назовем *разложением Хаара–Крестенсона, связанным с прореживанием по частоте*, а схему (10.13) — *быстрым преобразованием Хаара–Крестенсона.*

Отметим, что в (10.12) базисные сигналы $f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})$ можно сформировать из $n-1$ сигнала $f_1(\sigma\Delta_1)$, $\sigma = 1, \dots, n-1$. Это следует из (5.12) и (5.13). Для образующих сигналов $f_1(\sigma\Delta_1)$ согласно (5.11) имеется явное представление

$$f_1(\sigma\Delta_1; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_N(j - \tau).$$

10.4. Формулу (10.12) можно вывести непосредственно. При этом проясняется роль операций поразрядного сложения и вычитания по модулю n при прореживании по частоте.

Начнем с одного вспомогательного утверждения.

Лемма 10.3. *Справедливо равенство*

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1};\, j) = f_\nu(0;\, j \underset{n}{\ominus} p\Delta_{\nu+1}), \tag{10.14}$$

$$p = 0, 1, \dots, N_\nu - 1, \quad \nu = 0, 1, \dots, s, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,.$$

Доказательство. При $\nu = s$ формула (10.14) тривиальна, поскольку $f_s(0; j) \equiv 1$. Пусть $\nu \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. В силу (5.10)

$$f_\nu(0;\, j \underset{n}{\ominus} p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(0;\, j \underset{n}{\oplus} p^*\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} p^*\Delta_{\nu+1}) - q\big),$$

где через p^* обозначено целое число из $\{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, определяемое условием $p \underset{n}{\oplus} p^* = 0$. При этом

$$\delta_N\big((j \underset{n}{\oplus} p^*\Delta_{\nu+1}) - q\big) = \delta_N\big((\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor \underset{n}{\oplus} p^*)\Delta_{\nu+1} + \langle j\rangle_{\Delta_{\nu+1}} - q\big) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 1, \text{ если } \ \lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor = p \ \text{ и } \ \langle j\rangle_{\Delta_{\nu+1}} = q\,; \\ \\ 0 \ \text{ при остальных } \ j \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \end{array}\right\} =$$

$$= \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q).$$

Значит,

$$f_\nu(0;\, j \underset{n}{\ominus} p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) =$$

$$= f_\nu(0; j - p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Лемма доказана. ■

Из (10.14) следует, что

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1};\, j \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1}) = f_\nu\big((p \underset{n}{\ominus} k)\Delta_{\nu+1};\, j\big), \tag{10.15}$$

$$p, k = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \nu = 0, 1, \ldots, s, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Действительно,

$$f_\nu(p\Delta_{\nu+1};\, j \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(0;\, j \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1} \underset{n}{\ominus} p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= f_\nu\bigl(0;\, j \underset{n}{\oplus} (k \underset{n}{\ominus} p)\Delta_{\nu+1}\bigr) = f_\nu\bigl((p \underset{n}{\ominus} k)\Delta_{\nu+1};\, j\bigr).$$

Мы воспользовались тем, что $(k \underset{n}{\ominus} p)^* = p \underset{n}{\ominus} k$.

Переходим к непосредственному выводу формулы (10.12). При $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ имеем

$$x(j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \Bigl\{\frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\Bigr\} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) =$$

$$= v_1(j) + w_1^{(1)}(j) + \ldots + w_1^{(n-1)}(j).$$

Здесь

$$v_1(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N-1} x(q)\, f_0(q;\, j \underset{n}{\oplus} \tau).$$

Пользуясь формулой (10.15) при $\nu = 0$ и (10.1), получаем

$$v_1(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N-1} x(q)\, f_0(q \underset{n}{\ominus} \tau;\, j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q'=0}^{N-1} x(q' \underset{n}{\oplus} \tau)\, f_0(q';\, j) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_1-1}\sum_{k=0}^{n-1} x\bigl(np + (k \underset{n}{\oplus} \tau)\bigr)\, f_0(np + k;\, j) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \Bigl\{\sum_{k=0}^{n-1} f_0(k\Delta_1 + p\Delta_2;\, j)\Bigr\}\Bigl\{\frac{1}{n}\sum_{\tau'=0}^{n-1} x_0(\tau'\Delta_1 + p\Delta_2)\Bigr\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} x_1(p\Delta_2)\, f_1(p\Delta_2;\, j).$$

Аналогично при $\sigma = 1, \ldots, n-1$

$$w_1^{(\sigma)}(j) := \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} x(j \underset{n}{\oplus} \tau) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N-1} \omega_n^{-\sigma\tau} x(q \underset{n}{\oplus} \tau)\, f_0(q;\, j) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma(k \underset{n}{\oplus} \tau)+\sigma k} x\big(np + (k \underset{n}{\oplus} \tau)\big)\, f_0(np+k;\, j) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma k} f_0(k\Delta_1 + p\Delta_2;\, j) \Big\} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{\tau'=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau'} x_0(\tau'\Delta_1 + p\Delta_2) \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} x_1(\sigma\Delta_1 + p\Delta_2)\, f_1(\sigma\Delta_1 + p\Delta_2;\, j).$$

Слагаемые $w_1^{(\sigma)}(j)$ являются вейвлетными составляющими. Они входят в (10.12) при $\nu = 1$. Сигнал $v_1(j)$ преобразуется по такому же правилу

$$v_1(j) = v_2(j) + w_2^{(1)}(j) + \ldots + w_2^{(n-1)}(j).$$

Здесь

$$v_2(j) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} v_1(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_2) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_1-1} x_1(q\Delta_2)\, f_1(q\Delta_2;\, j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_2) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_1-1} x_1(q\Delta_2)\, f_1\big((q \underset{n}{\ominus} \tau)\Delta_2;\, j\big) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{N-1} x_1\big((q' \underset{n}{\oplus} \tau)\Delta_2\big)\, f_1(q'\Delta_2;\, j) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_1\big(p\Delta_3 + (k \underset{n}{\oplus} \tau)\Delta_2\big)\, f_1(p\Delta_3 + k\Delta_2;\, j) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_1(k\Delta_2 + p\Delta_3;\, j) \Big\} \Big\{ \frac{1}{n} \sum_{\tau'=0}^{n-1} x_1(\tau'\Delta_2 + p\Delta_3) \Big\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} x_2(p\Delta_3)\, f_2(p\Delta_3;\, j)\,;$$

$$w_2^{(\sigma)}(j) := \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} v_1(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_2) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_2-1} x_2(\sigma\Delta_2 + p\Delta_3)\, f_2(\sigma\Delta_2 + p\Delta_3;\, j)\,.$$

Общий шаг этого процесса выглядит так:

$$v_\nu(j) = v_{\nu+1}(j) + w_{\nu+1}^{(1)}(j) + \ldots + w_{\nu+1}^{(n-1)}(j), \quad \nu = 1, \ldots, s-1,$$

где

$$v_{\nu+1}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} v_\nu(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_{\nu+1}),$$

$$w_{\nu+1}^{(\sigma)}(j) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} v_\nu(j \underset{n}{\oplus} \tau\Delta_{\nu+1}).$$

Осуществив все указанные разложения, придем к (10.12).

§ 11. Спектральные теоремы в базисах Хаара–Крестенсона

11.1. В двух предыдущих параграфах были построены ортогональные вейвлетные базисы Хаара–Крестенсона

$$\big\{f_s(0);\; f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),$$
$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\;\; \sigma = 1, \ldots, n-1,\;\; \nu = 1, \ldots, s\big\},$$

$$\big\{g_s(0);\; g_\nu(\sigma N_\nu + p),$$
$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,\;\; \sigma = 1, \ldots, n-1,\;\; \nu = 1, \ldots, s\big\},$$

связанные соответственно с прореживанием по частоте и прореживанием по времени. Способ нумерации базисных сигналов был связан с рекуррентными соотношениями, используемыми для построения этих базисов. Указанные соотношения, в свою очередь, были получены как частный случай более общих рекуррентных соотношений, предназначенных для построения последовательностей ортогональных базисов, ведущих от базиса из сдвигов единичного импульса к базису функций Виленкина–Крестенсона. Для получения результатов, представленных в этом и двух последующих параграфах, никаких рекуррентных соотношений не требуется, поэтому необходимость в столь специфическом способе нумерации базисных сигналов отпадает.

Базисы Хаара–Крестенсона имеют древовидную блочно-уровневую структуру (см. рис. 2а), и для идентификации базисного сигнала достаточно указать его уровень, блок и номер внутри блока (именно для этого и используются индексы ν, σ и p соответственно). Излишняя сложность в индексации может вызвать дополнительные трудности в формулировке или трактовке дальнейших результатов. В связи с этим, начиная с данного параграфа, будем использовать новый, «облегченный» способ нумерации сигналов в базисах Хаара–Крестенсона. Будем писать $f_\nu(\sigma)$ вместо $f_\nu(\sigma\Delta_\nu)$ и $g_\nu(\sigma)$ вместо $g_\nu(\sigma N_\nu)$. При этом, с учетом тождеств (5.12) и (6.10), сигналу $f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j)$ будет соответствовать запись $f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1})$, а сигналу $g_\nu(\sigma N_\nu + p;\, j)$ — запись $g_\nu(\sigma;\, j-p)$. Сигналы $f_s(0)$ и $g_s(0)$ выделим особо: поскольку $f_s(0;j) \equiv g_s(0;j) \equiv 1$, то для этих сигналов будет использоваться одно общее обозначение $c(j)$.

В новых обозначениях базисы Хаара–Крестенсона будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}\bigl\{c(j);\ f_\nu(\sigma;\, j-p\Delta_{\nu+1}),\\ p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\ \ \sigma=1,\ldots,n-1,\ \ \nu=1,\ldots,s\bigr\},\end{gathered}\tag{11.1}$$

$$\begin{gathered}\bigl\{c(j);\ g_\nu(\sigma;\, j-p),\\ p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\ \ \sigma=1,\ldots,n-1,\ \ \nu=1,\ldots,s\bigr\}.\end{gathered}\tag{11.2}$$

Здесь в соответствии с (5.11) и (6.7)

$$f_\nu(\sigma;\, j)=\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\sum_{q=\tau\Delta_\nu}^{(\tau+1)\Delta_\nu-1}\delta_N(j-q),\tag{11.3}$$

$$g_\nu(\sigma;\, j)=\sum_{\tau=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\delta_{N_{\nu-1}}(j-\tau N_\nu).\tag{11.4}$$

11.2. Изучим подробнее базис Хаара–Крестенсона, связанный с прореживанием по частоте.

Лемма 11.1. *При $\sigma=1,\ldots,n-1$ справедлива формула*

$$f_\nu(\sigma;\, j)=\omega_n^{\sigma\lfloor j/\Delta_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}\bigl(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor\bigr),\quad j\in\mathbb{Z}.\tag{11.5}$$

Доказательство. Правая часть (11.5) равна $\omega_n^{\sigma\tau}$ при $j\in\in\{\tau\Delta_\nu,\ \tau\Delta_\nu{+}1,\ \ldots,\ (\tau{+}1)\Delta_\nu{-}1\}$, $\tau=0,1,\ldots,n{-}1$, и равна 0 при $j\in\{\Delta_{\nu+1},\ \Delta_{\nu+1}{+}1,\ \ldots,\ N-1\}$ (следует учесть, что $N=\Delta_{\nu+1}N_\nu$). Те же значения при указанных j принимает согласно (11.3) и $f_\nu(\sigma;\, j)$. Таким образом, при $j\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ равенство (11.5) верно. Остается проверить N-периодичность правой части (11.5).

Она следует из того, что при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{j+kN}{\Delta_\nu} = \frac{j}{\Delta_\nu} + nkN_\nu, \qquad \frac{j+kN}{\Delta_{\nu+1}} = \frac{j}{\Delta_{\nu+1}} + kN_\nu.$$

Лемма доказана. ■

С л е д с т в и е. При $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ справедливо равенство

$$f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}) = \omega_n^{\sigma\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p\big). \tag{11.6}$$

Формулы (11.5) и (11.6) несколько упрощаются при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. А именно, если $j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_n$, то

$$\left\lfloor \frac{j}{\Delta_\nu} \right\rfloor = j_{s-1} n^{s-\nu} + \ldots + n\, j_\nu + j_{\nu-1},$$

так что

$$\omega_n^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} = \omega_n^{j_{\nu-1}}. \tag{11.7}$$

Лемма 11.2. *При фиксированном* $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $q = (q_{s-1}, \ldots, q_0)_n$, *справедливо равенство*

$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} q) = \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu\big(\sigma;\, j - \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}\big), \tag{11.8}$$

$$j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $j = \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + j_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle j \rangle_{\Delta_\nu}$, $q = \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle q \rangle_{\Delta_\nu}$. Значит,

$$j \underset{n}{\ominus} q = \left(\left\lfloor \frac{j}{\Delta_{\nu+1}} \right\rfloor \underset{n}{\ominus} \left\lfloor \frac{q}{\Delta_{\nu+1}} \right\rfloor \right) \Delta_{\nu+1} \; + \\ + \; \langle j_{\nu-1} - q_{\nu-1} \rangle_n\, \Delta_\nu + \Big(\langle j \rangle_{\Delta_\nu} \underset{n}{\ominus} \langle q \rangle_{\Delta_\nu} \Big).$$

Согласно (11.5) и (11.7) получаем

$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} q) = \omega_n^{\sigma(j_{\nu-1}-q_{\nu-1})}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor \underset{n}{\ominus} \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big). \qquad (11.9)$$

Как отмечалось в § 1, при $a,\, b \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$ справедливо соотношение $\delta_{N_\nu}(a \underset{n}{\ominus} b) = \delta_{N_\nu}(a-b)$, поэтому равенство (11.9) принимает вид

$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} q) = \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}} \big[\omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, \delta_{N_\nu}\big(\lfloor j/\Delta_{\nu+1}\rfloor - \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big)\big].$$

Учитывая (11.6) и (11.7), приходим к (11.8). Лемма доказана. ■

С л е д с т в и е. При $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ справедливо равенство

$$f_\nu(\sigma;\, j \underset{n}{\ominus} p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}), \qquad (11.10)$$

$$j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Лемма 11.3. *При $j = 0, 1, \ldots, N-1,\ \sigma = 1, \ldots, n-1$ справедливо равенство*

$$f_\nu(\sigma;\, j^*) = \overline{f_\nu}(\sigma;\, j). \qquad (11.11)$$

Здесь, как обычно через j^* обозначено число, n-ично противоположное числу j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $j \in \{\Delta_{\nu+1},\, \Delta_{\nu+1}+1,\, \ldots,\, N-1\}$, то и $j^* \in \{\Delta_{\nu+1},\, \Delta_{\nu+1}+1,\, \ldots,\, N-1\}$, поэтому при таких j (11.11) превращается в тождество $0 = 0$. Пусть теперь $j \in \{\tau\Delta_\nu,\, \tau\Delta_\nu + 1, \ldots, (\tau+1)\Delta_\nu - 1\}$ при некотором $\tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Это значит, что $j = (\tau, j_{\nu-2}, \ldots, j_0)_n$, поэтому $j^* = (\tau^*, j^*_{\nu-2}, \ldots, j^*_0)_n$. Согласно (11.5) и (11.7) при таком j имеем

$$f_\nu(\sigma;\, j^*) = \omega_n^{\sigma\tau^*} = \omega_n^{-\sigma\tau} = \overline{f_\nu}(\sigma;\, j).$$

Лемма доказана. ■

11.3. Перейдем к базису Хаара–Крестенсона, связанному с прореживанием по времени.

Лемма 11.4. *При* $\sigma = 1, \ldots, n-1$ *справедлива формула*

$$g_\nu(\sigma;\, j) = \omega_n^{\sigma \lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11.12}$$

Доказательство. Сигнал $g_\nu(\sigma;\, j)$ в силу (11.4) является $N_{\nu-1}$-периодическим. Тем же свойством обладает и сигнал, стоящий в правой части (11.12). Значит, равенство (11.12) достаточно проверить на основном периоде $\{0, 1, \ldots, N_{\nu-1} - 1\}$.

Пусть $j = \tau N_\nu$ при некотором $\tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Тогда правая часть (11.12) принимает значение $\omega_n^{\sigma\tau}$. Это же значение согласно (11.4) принимает и $g_\nu(\sigma;\, j)$. При остальных $j \in \in \{0, 1, \ldots, N_{\nu-1} - 1\}$ равенство (11.12) превращается в $0 = 0$. Лемма доказана. ■

Следствие. При $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ справедливо равенство

$$g_\nu(\sigma;\, j-p) = \omega_n^{\sigma \lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11.13}$$

Доказательство. Покажем, что

$$\omega_n^{\sigma \lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p) = \omega_n^{\sigma \lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p). \tag{11.14}$$

Поскольку в обеих частях этого равенства стоят $N_{\nu-1}$-периодические по j сигналы, то достаточно проверить его на периоде $\{p, p+1, \ldots, p + N_{\nu-1} - 1$. При $j = p + \tau N_\nu$, $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$, равенство (11.14) верно. Но оно также верно и при остальных j из указанного периода, поскольку в этом случае обе части (11.14) равны нулю. Таким образом, равенство (11.14) при $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$ и $j \in \mathbb{Z}$ установлено.

Теперь (11.13) следует из (11.12) и (11.14). ∎

Формулы (11.12) и (11.13) принимают более простой вид при $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. А именно, если $j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_n$, то

$$\left\lfloor \frac{j}{N_\nu} \right\rfloor = j_{s-1} n^{\nu-1} + \ldots + j_{s-\nu+1}\, n + j_{s-\nu},$$

так что

$$\omega_n^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} = \omega_n^{j_{s-\nu}}. \tag{11.15}$$

Лемма 11.5. *При всех целых j и p*

$$g_\nu(\sigma;\, j-p) = \omega_n^{\sigma \lfloor p/N_\nu \rfloor}\, g_\nu\big(\sigma;\, j - \langle p \rangle_{N_\nu}\big). \tag{11.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (11.12) при $j,\, k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$g_\nu(\sigma;\, j - kN_\nu) = \omega_n^{\sigma k}\, g_\nu(\sigma;\, j). \tag{11.17}$$

Поскольку $p = \lfloor p/N_\nu \rfloor N_\nu + \langle p \rangle_{N_\nu}$, то

$$j - p = \big(j - \langle p \rangle_{N_\nu}\big) - \lfloor p/N_\nu \rfloor N_\nu.$$

Остается воспользоваться формулой (11.17). ∎

Лемма 11.6. *При $\sigma = 1, \ldots, n-1$ справедливы тождества*

$$g_\nu(\sigma;\, -j) = \overline{g_\nu}(\sigma;\, j) = g_\nu(n-\sigma;\, j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что

$$\omega_n^{\sigma \lfloor -j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j) = \omega_n^{-\sigma \lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z} \tag{11.19}$$

Действительно, если $j = kN_\nu$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, то левая и правая часть (11.19) равна $\omega_n^{-\sigma k}$. При остальных $j \in \mathbb{Z}$ обе части равенства (11.19) равны нулю.

Перейдем к доказательству равенства (11.18). Согласно (11.12) и (11.19) имеем

$$g_\nu(\sigma;\,-j) = \omega_n^{\sigma\lfloor -j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(-j) = \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j) = \overline{g_\nu}(\sigma;\,j).$$

С другой стороны,

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j) = \omega_n^{(n-\sigma)\lfloor j/N_\nu\rfloor}\,\delta_{N_\nu}(j) = g_\nu(n-\sigma;\,j).$$

Лемма доказана. ■

11.4. Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису (11.1):

$$x(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,p)\,f_\nu(\sigma;\,j-p\Delta_{\nu+1}), \quad j\in\mathbb{Z}. \qquad (11.20)$$

Коэффициенты этого разложения суть коэффициенты Фурье:

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j), \qquad x_\nu(\sigma,p) = \frac{1}{n^\nu}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{f_\nu}(\sigma;\,j-p\Delta_{\nu+1}).$$

Совокупность этих коэффициентов

$$H_f(x) = \bigl\{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p),$$
$$p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\ \sigma=1,\ldots,n-1,\ \nu=1,\ldots,s\bigr\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала x, *связанный с прореживанием по частоте*. Преобразование $x\to H_f(x)$ называется *дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте*.

Аналогично, любой сигнал $y\in\mathbb{C}_N$ допускает представление

$$y(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma,p)\,g_\nu(\sigma;\,j-p), \quad j\in\mathbb{Z}. \qquad (11.21)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j), \qquad y_\nu(\sigma,p) = \frac{1}{n^\nu}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{g_\nu}(\sigma;\, j-p).$$

Совокупность коэффициентов разложения (11.21)

$$H_g(y) = \big\{\alpha;\ y_\nu(\sigma,p),$$
$$p = 0,1,\ldots,N_\nu - 1,\ \ \sigma = 1,\ldots,n-1,\ \ \nu = 1,\ldots,s\big\}$$

образует *спектр Хаара–Крестенсона* сигнала y, *связанный с прореживанием по времени.* Преобразование $y \to H_g(y)$ называется *дискретным преобразованием Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени.*

Вычислим спектры Хаара–Крестенсона сигналов естественного ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{C}_N$ — сдвигов единичного импульса.

Зафиксируем число $q \in \{0,1,\ldots,N-1\}$, $q = (q_{s-1},\ldots,q_0)_n$.

Теорема 11.1. *Сигнал $\delta_N(\cdot - q)$ допускает следующее представление в базисе Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте:*

$$\delta_N(j-q) = \frac{1}{N} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1} n^{-\nu}\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}} f_\nu(\sigma;\, j - p_\nu^0(q)\Delta_{\nu+1}),$$

где $p_\nu^0(q) = \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor$.

Доказательство. Представим сигнал $x = \delta_N(\cdot - q)$ в соответствии с (11.20):

$$\delta_N(j-q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,p)\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Тогда $\alpha = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\delta_N(j-q) = \dfrac{1}{N}\,,$

$$x_\nu(\sigma,p) = n^{-\nu}\sum_{j=0}^{N-1}\delta_N(j-q)\,\overline{f_\nu}(\sigma;\,j-p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= n^{-\nu}\,\overline{f_\nu}(\sigma;\,q-p\Delta_{\nu+1}).$$

Учитывая (11.6) и (11.7), получаем

$$x_\nu(\sigma,p) = n^{-\nu}\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\delta_{N_\nu}\big(\lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor - p\big) =$$

$$= \begin{cases} n^{-\nu}\omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}, \text{ если } p = \lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor, \\ 0 \quad \text{при остальных } p\in\{0,1,\ldots,N_\nu-1\}. \end{cases}$$

Теорема доказана. ■

Теорема 11.2. *Сигнал $\delta_N(\cdot - q)$ допускает следующее представление в базисе Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени:*

$$\delta_N(j-q) = \frac{1}{N} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1} n^{-\nu}\omega_n^{-\sigma q_{s-\nu}} g_\nu(\sigma;\,j-p_\nu^1(q)),$$

где $p_\nu^1(q) = \langle q\rangle_{N_\nu}$.

Доказательство. Представим сигнал $y=\delta_N(\cdot-q)$ в соответствии с (11.21):

$$\delta_N(j-q) = \beta + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma,p)\,g_\nu(\sigma;\,j-p).$$

Тогда $\beta = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\delta_N(j-q) = \dfrac{1}{N}$,

$$y_\nu(\sigma,p) = n^{-\nu}\sum_{j=0}^{N-1}\delta_N(j-q)\,\overline{g_\nu}(\sigma;\,j-p) = n^{-\nu}\,\overline{g_\nu}(\sigma;\,q-p).$$

Учитывая (11.13) и (11.15), получаем

$$y_\nu(\sigma,p) = n^{-\nu}\omega_n^{-\sigma q_{s-\nu}}\delta_{N_\nu}(q-p) =$$

$$= \begin{cases} n^{-\nu}\omega_n^{-\sigma q_{s-\nu}}, \text{ если } p = \langle q\rangle_{N_\nu}, \\ 0 \quad \text{при остальных } p\in\{0,1,\ldots,N_\nu-1\}. \end{cases}$$

Теорема доказана. ■

11.5. Выясним, как выглядят теоремы о спектре сдвига, свертки и корреляции в базисах Хаара–Крестенсона.

Начнем с базиса (11.1). Установим связь между спектрами исходного и n-ично сдвинутого сигнала.

Теорема 11.3. *Зафиксируем* $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $q = (q_{s-1},\ldots,q_0)_n$. *Наряду с сигналом* $x\in\mathbb{C}_N$ *рассмотрим сигнал* $\tilde{x}(j) = x(j \underset{n}{\ominus} q)$, $j=0,1,\ldots,N-1$. *Пусть* $H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(\tilde{x}) = \{\tilde{\alpha};\ \tilde{x}_\nu(\sigma,p)\}$. *Тогда* $\tilde{\alpha}=\alpha$ *и*

$$\tilde{x}_\nu(\sigma,p) = \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\,x_\nu\big(\sigma,\,p\underset{n}{\ominus}\lfloor q/\Delta_{\nu+1}\rfloor\big),$$

$$p=0,1,\ldots,N_\nu-1,\quad \sigma=1,\ldots,n-1,\quad \nu=1,\ldots,s.$$

Доказательство. Согласно (11.20) и (11.10)

$$x(j\underset{n}{\ominus}q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_\nu-1}x_\nu(\sigma,k)\,f_\nu\big(\sigma;\,(j\underset{n}{\ominus}q)\underset{n}{\ominus}k\Delta_{\nu+1}\big).$$

Так как

$$(j \underset{n}{\ominus} q) \underset{n}{\ominus} k\Delta_{\nu+1} = j \underset{n}{\ominus} (q \underset{n}{\oplus} k\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= j \underset{n}{\ominus} \big((\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \underset{n}{\oplus} k)\Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \langle q \rangle_{\Delta_\nu} \big),$$

то в силу (11.8) имеем

$$x(j \underset{n}{\ominus} q) = \alpha +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, k)\, \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu\big(\sigma;\, j - (\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \underset{n}{\oplus} k)\Delta_{\nu+1}\big).$$

Произведя замену $p = k \underset{n}{\oplus} \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor$, получим

$$x(j \underset{n}{\ominus} q) = \alpha +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor)\, \omega_n^{-\sigma q_{\nu-1}}\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Остается учесть единственность разложения по ортогональному базису. ■

Перейдем к вопросу о спектре свертки. Пусть x, $y \in \mathbb{C}_N$; сигнал z, формируемый по правилу

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j \underset{n}{\ominus} k), \tag{11.22}$$

$$j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

называется *n-ичной сверткой* сигналов x и y.

Теорема 11.4. *Пусть z — n-ичная свертка сигналов x и y, $H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma, p)\}$, $H_f(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma, p)\}$, $H_f(z) = \{\gamma;\ z_\nu(\sigma, p)\}$. Тогда $\gamma = \alpha\beta N$ и*

$$z_\nu(\sigma, p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, q)\, y_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} q),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей теореме

$$y(j \underset{n}{\ominus} k) = y(k^* \underset{n}{\ominus} j^*) =$$

$$= \beta + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{N_\nu - 1} \omega_n^{-\sigma j^*_{\nu-1}} \, y_\nu(\sigma, \, l \underset{n}{\ominus} \lfloor j^*/\Delta_{\nu+1} \rfloor) \, f_\nu(\sigma; \, k^* - l\Delta_{\nu+1}). \tag{11.23}$$

Согласно (11.10) и (11.11)

$$f_\nu(\sigma; \, k^* - l\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(\sigma; \, k^* \underset{n}{\ominus} l\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \overline{f_\nu}(\sigma; \, k \underset{n}{\ominus} l^* \Delta_{\nu+1}) = \overline{f_\nu}(\sigma; \, k - l^* \Delta_{\nu+1}).$$

Произведя в (11.23) замену $q = l^*$, с учетом предыдущего равенства получим

$$y(j \underset{n}{\ominus} k) = \beta + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \omega_n^{\sigma j_{\nu-1}} \, y_\nu(\sigma, \, q^* \underset{n}{\oplus} \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) \, \overline{f_\nu}(\sigma; \, k - q\Delta_{\nu+1}). \tag{11.24}$$

Как уже упоминалось, базис (1.1) является ортогональным; кроме того, согласно теореме 5.1 $\|f_\nu(\sigma; \cdot - q\Delta_{\nu+1})\|^2 = n^\nu$. Учитывая эти факты, а также формулы (11.20), (11.24) и определение (11.22), запишем

$$z(j) = \alpha\beta N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, q) \, \omega_n^{\sigma j_{\nu-1}} \, y_\nu(\sigma, \, q^* \underset{n}{\oplus} \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) \, n^\nu.$$

Но в силу (11.6)

$$\omega_n^{\sigma j_{\nu-1}} \, y_\nu(\sigma, \, q^* \underset{n}{\oplus} \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma,\, q^* \underset{n}{\oplus} p)\, \omega_n^{\sigma j_{\nu-1}}\, \delta_{N_\nu}\bigl(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p\bigr) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} q)\, f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Значит,

$$z(j) = \alpha\beta N +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \Bigl\{ n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma, q)\, y_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} q) \Bigr\} f_\nu(\sigma;\, j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. ■

Пусть $x,\, y \in \mathbb{C}_N$. Сигнал r, формируемый по правилу

$$r(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, \overline{y}(k \underset{n}{\ominus} j), \tag{11.25}$$
$$j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

называется *n-ичной корреляцией* сигналов x и y.

Теорема 11.5. *Пусть r — n-ичная корреляция сигналов x и y, $H_f(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma,p)\}$, $H_f(r) = \{\varrho;\ r_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\varrho = \alpha\overline{\beta}N$ и*

$$r_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, q \underset{n}{\ominus} p),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Сигнал (11.25) представляет собой n-ичную свертку сигналов x и v, где

$$v(j) = \overline{y}(j^*), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Согласно (11.10) и (11.11)

$$v(j) = \overline{\beta} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \overline{y_\nu}(\sigma,p)\, \overline{f_\nu}(\sigma;\, j^* - p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \overline{\beta} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \overline{y_\nu}(\sigma,p)\, f_\nu(\sigma;\, j - p^*\Delta_{\nu+1}).$$

Отсюда по теореме 11.4 получаем $\varrho = \alpha\overline{\beta}N$,

$$r_\nu(\sigma,p) = n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, v_\nu(\sigma,\, p \underset{n}{\ominus} q) =$$

$$= n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, q \underset{n}{\ominus} p),$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu - 1, \quad \sigma = 1,\ldots,n-1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

Теорема доказана. ■

11.6. Обратимся к вейвлетному базису (11.2).

Установим связь между спектрами исходного и циклически сдвинутого сигнала.

Теорема 11.6. *Зафиксируем* $q \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. *Наряду с сигналом* $x \in \mathbb{C}_N$ *рассмотрим сигнал* $\tilde{x}(j) = x(j-q)$. *Пусть* $H_g(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(\tilde{x}) = \{\tilde{\alpha};\ \tilde{x}_\nu(\sigma,p)\}$. *Тогда* $\tilde{\alpha} = \alpha$ *и*

$$\tilde{x}_\nu(\sigma,p) = \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, x_\nu\big(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\big),$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu - 1, \quad \sigma = 1,\ldots,n-1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

Доказательство. Согласно (11.20) и (11.16) имеем

$$x(j-q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,k)\, g_\nu(\sigma;\, j-q-k) =$$

$$= \alpha + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,k)\, \omega_n^{\sigma\lfloor (q+k)/N_\nu \rfloor}\, g_\nu\bigl(\sigma;\, j - \langle q+k\rangle_{N_\nu}\bigr).$$

Произведем замену $p = \langle q+k\rangle_{N_\nu}$. В этом случае $k = \langle p-q\rangle_{N_\nu}$ и

$$\Big\lfloor \frac{q+k}{N_\nu} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{q + \langle p-q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \Big\rfloor = \lfloor q/N_\nu \rfloor + \Big\lfloor \frac{\langle q\rangle_{N_\nu} + \langle p-q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \Big\rfloor.$$

Отметим, что

$$\Big\lfloor \frac{\langle q\rangle_{N_\nu} + \langle p-q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \Big\rfloor = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } p \ge \langle q\rangle_{N_\nu} \\ \\ 1, \text{ если } p < \langle q\rangle_{N_\nu} \end{array} \right\} = -\Big\lfloor \frac{p - \langle q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \Big\rfloor.$$

Значит,

$$\Big\lfloor \frac{q+k}{N_\nu} \Big\rfloor = \lfloor q/N_\nu \rfloor - \Big\lfloor \frac{p - \langle q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \Big\rfloor =$$

$$= -\left(\Big\lfloor \frac{p - \langle q\rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \Big\rfloor - \lfloor q/N_\nu \rfloor \right) = -\Big\lfloor \frac{p-q}{N_\nu} \Big\rfloor.$$

Окончательно получаем

$$x(j-q) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} x_\nu\bigl(\sigma, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\bigr)\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, g_\nu(\sigma;\, j-p).$$

Теорема доказана. ∎

Перейдем к вопросу о спектре свертки. Напомним, что циклической сверткой сигналов x и y из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал $z = x * y$ с компонентами

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j-k), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11.26}$$

Теорема 11.7. *Пусть z — циклическая свертка сигналов x и y, $H_g(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(z) =$*

$= \{\gamma;\ z_\nu(\sigma,p)\}$. *Тогда* $\gamma = \alpha\beta N$ *и*

$$z_\nu(n-\sigma,\, p) = n^\nu \Big\{ \sum_{q=0}^{p} x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu(\sigma,\, p-q) +$$

$$+\, \omega_n^\sigma \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu(\sigma,\, N_\nu+p-q) \Big\},$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \sigma = 1,\ldots,n-1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

Доказательство. По теореме 11.6

$$y(j-k) = y\big(-k-(-j)\big) =$$

$$= \beta + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (l+j)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma, \langle l+j\rangle_{N_\nu}\big)\, g_\nu(\sigma;\, -k-l).$$

Сделаем замену $q = \langle -l\rangle_{N_\nu}$. Тогда $l = \langle -q\rangle_{N_\nu}$.

При $q = 1,\ldots,N_\nu-1$ получаем $\big\langle \langle -q\rangle_{N_\nu} + j\big\rangle_{N_\nu} = \langle j-q\rangle_{N_\nu}$,

$$\Big\lfloor \frac{\langle -q\rangle_{N_\nu}+j}{N_\nu} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{N_\nu-q+j}{N_\nu} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{j-q}{N_\nu} \Big\rfloor + 1.$$

Кроме того, в силу (11.17)

$$g_\nu\big(\sigma;\, -k-\langle -q\rangle_{N_\nu}\big) = g_\nu(\sigma;\, -k-N_\nu+q) = \omega_n^\sigma\, g_\nu(\sigma;\, q-k).$$

Таким образом, слагаемое с индексом q имеет вид

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big)\, g_\nu(\sigma;\, q-k). \tag{11.27}$$

При $q = 0$ получаем $\langle -q\rangle_{N_\nu} = 0$; слагаемое с индексом $q = 0$ имеет вид $\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma, \langle j\rangle_{N_\nu}\big)\, g_\nu(\sigma;\, -k)$, что формально совпадает с (11.27).

Учитывая сказанное выше и лемму 11.6, приходим к равенству

$$y(j-k) = \beta + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, k-q). \tag{11.28}$$

Как уже упоминалось, базис (1.2) является ортогональным; кроме того, согласно теореме 6.1 $\|g_\nu(\sigma; \cdot - q)\|^2 = n^\nu$. Опираясь на эти факты, а также на формулы (11.20), (11.28) и определение (11.26), запишем

$$z(j) = \alpha\beta N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma, q)\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma,\, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big)\, n^\nu.$$

Но

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma,\, \langle j-q\rangle_{N_\nu}\big) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (\langle j\rangle_{N_\nu}-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma,\, \big\langle \langle j\rangle_{N_\nu} - q\big\rangle_{N_\nu}\big) =$$

$$= \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\big)\, \delta_{N_\nu}\big(\langle j\rangle_{N_\nu} - p\big).$$

Согласно (11.13) и (11.18)

$$\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}\big(\langle j\rangle_{N_\nu} - p\big) = \omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu \rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p) = g_\nu(n-\sigma;\, j-p),$$

поэтому

$$z(j) = \alpha\beta N + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \Big\{ n^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma, q)\; \times$$

$$\times\, \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, y_\nu\big(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\big) \Big\}\, g_\nu(n-\sigma;\, j-p).$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_n^{-\sigma\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor}\, x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu\bigl(\sigma,\, \langle p-q\rangle_{N_\nu}\bigr) =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu(\sigma,p-q) + \omega_n^{\sigma} \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, y_\nu(\sigma,N_\nu+p-q).$$

Теорема доказана. ■

Напомним, что циклической корреляцией сигналов x и y из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал r с компонентами

$$r(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, \overline{y}(k-j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{11.29}$$

Теорема 11.8. *Пусть r — циклическая корреляция сигналов x и y, $H_g(x) = \{\alpha;\ x_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(y) = \{\beta;\ y_\nu(\sigma,p)\}$, $H_g(r) = \{\varrho;\ r_\nu(\sigma,p)\}$. Тогда $\varrho = \alpha\overline{\beta}N$ и*

$$r_\nu(n-\sigma,\, p) = n^\nu \biggl\{ \sum_{q=p}^{N_\nu-1} x_\nu(\sigma,q)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, q-p) +$$

$$+ \omega_n^{-\sigma} \sum_{q=0}^{p-1} x_\nu(\sigma,q)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, N_\nu+q-p) \biggr\},$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad \sigma = 1,\ldots,n-1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

Доказательство. Сигнал (11.29) есть циклическая свертка сигнала x с сигналом

$$v(j) := \overline{y}(-j) = \overline{\beta} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \overline{y_\nu}(\sigma,p)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, -j-p) =$$

$$= \overline{\beta} + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} \overline{y_\nu}(\sigma, p)\, g_\nu(\sigma;\, j+p).$$

Мы воспользовались формулой (11.18).

Найдем спектр Хаара–Крестенсона сигнала v, связанный с прореживанием по времени. При $p = 1, \ldots, N_\nu - 1$ согласно (11.17) имеем

$$g_\nu(\sigma;\, j+p) = \omega_n^{-\sigma}\, g_\nu(\sigma;\, j+p-N_\nu) = \omega_n^{-\sigma}\, g_\nu\big(\sigma;\, j-(N_\nu - p)\big),$$

поэтому

$$v_\nu(\sigma, p) = \omega_n^{-\sigma}\, \overline{y_\nu}(\sigma, N_\nu - p),$$

$$p = 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

При этом, очевидно, $v_\nu(\sigma, 0) = \overline{y_\nu}(\sigma, 0)$, $\sigma = 1, \ldots, n-1$, $\nu = 1, \ldots, s$.

По теореме 11.7 получаем $\varrho = \alpha\overline{\beta}N$,

$$r_\nu(n-\sigma,\, p) = n^\nu \Big\{ \sum_{q=0}^{p-1} x_\nu(\sigma, q)\, v_\nu(\sigma,\, p-q) + x_\nu(\sigma, p)\, v_\nu(\sigma,\, 0) +$$

$$+ \omega_n^{\sigma} \sum_{q=p+1}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, q)\, v_\nu(\sigma,\, N_\nu + p - q) \Big\} =$$

$$= n^\nu \Big\{ \omega_n^{-\sigma} \sum_{q=0}^{p-1} x_\nu(\sigma, q)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, N_\nu + q - p) + x_\nu(\sigma, p)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, 0) +$$

$$+ \sum_{q=p+1}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma, q)\, \overline{y_\nu}(\sigma,\, q-p) \Big\}.$$

Теорема доказана. ■

§ 12. Логарифмически автореверсные спектры

12.1. В этом параграфе будет установлена связь между базисами Хаара–Крестенсона (11.1) и (11.2).

Теорема 12.1. *Пусть* $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. *Справедливо тождество*

$$f_\nu\bigl(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - p\Delta_{\nu+1}\bigr) = g_\nu\bigl(\sigma;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\bigr), \tag{12.1}$$

$$j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Доказательство. Пусть $j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_n$, $p = (p_{s-\nu-1}, \ldots, p_0)_n$. Согласно (11.13) $g_\nu(\sigma;\, j-p)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\langle j \rangle_{N_\nu} = p$, т.е. когда $j_k = p_k$, $k = 0, 1, \ldots, s-\nu-1$. При таких j в силу (11.15) имеем $g_\nu(\sigma;\, j-p) = \omega_n^{\sigma j_{s-\nu}}$.

Пусть $l = (l_{s-1}, \ldots, l_0)_n$, $q = (q_{s-\nu-1}, \ldots, q_0)_n$. Согласно (11.6) $f_\nu(\sigma;\, l - q\Delta_{\nu+1})$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\lfloor l/\Delta_{\nu+1} \rfloor = q$, т.е. когда $l_\mu = q_{\mu-\nu}$, $\mu = \nu, \nu+1, \ldots, s-1$. При таких l в силу (11.7) имеем $f_\nu(\sigma;\, l - q\Delta_{\nu+1}) = \omega_n^{\sigma l_{\nu-1}}$.

Возьмем $l = \mathrm{rev}_s(j)$, $q = \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)$. Тогда

$$l_\mu = j_{s-1-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, s-1;$$

$$q_\mu = p_{s-\nu-1-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, s-\nu-1.$$

В частности, $l_{\nu-1} = j_{s-\nu}$. Получаем, что $f_\nu(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1})$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $j_{s-1-\mu} = p_{s-1-\mu}$, $\mu = \nu, \nu+1, \ldots, s-1$, или, что то же самое, когда $j_k = p_k$, $k = 0, 1, \ldots, s-\nu-1$. При этом $f_\nu(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1}) = \omega_n^{\sigma j_{s-\nu}}$.

Итак, мы показали, что

$$f_\nu(\sigma;\ \mathrm{rev}_s(j) - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1}) = g_\nu(\sigma;\ j-p).$$

Равенство (12.1) получается отсюда заменой p на $\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)$. Теорема доказана. ■

Определение. Спектр

$$H = \bigl\{\eta;\ h_\nu(\sigma,p),$$
$$p = 0,1,\ldots,N_\nu-1,\ \ \sigma=1,\ldots,n-1,\ \ \nu=1,\ldots,s\bigr\}$$

назовем *логарифмически автореверсным*, если

$$h_\nu(\sigma,p) = h_\nu\bigl(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\bigr), \tag{12.2}$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu-1,\ \ \sigma=1,\ldots,n-1,\ \ \nu=1,\ldots,s-1.$$

При $s=1$ и $s=2$ любой спектр по определению является логарифмически автореверсным. При $\nu = s-1$ равенство (12.2) выполняется автоматически.

Теорема 12.2. *Пусть сигналы x и y из $\mathbb{C}_N$ таковы, что $H_f(x) = H_g(y) =: H$, и пусть при этом спектр H является логарифмически автореверсным. Тогда необходимо*

$$y(j) = x\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr), \tag{12.3}$$

$$j = 0,1,\ldots,N-1.$$

Доказательство. Для сигнала y имеем

$$y(j) = \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma,q)\, g_\nu(\sigma;\ j-q).$$

Напомним, что $c(j) \equiv 1$. Сделаем замену $p = \mathrm{rev}_{s-\nu}(q)$ и воспользуемся (12.2) и (12.1):

$$y(j) = \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu\big(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big)\, g_\nu\big(\sigma;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) =$$

$$= \eta c\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma, p)\, f_\nu\big(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - p\Delta_{\nu+1}\big) =$$

$$= x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big).$$

Теорема доказана. ■

Эта теорема в определенном смысле обратима.

Теорема 12.3. *Пусть* x, y *— сигналы, удовлетворяющие условию* (12.3), *и пусть* $H_f(x) = H_g(y) =: H$. *Тогда спектр* H *является логарифмически автореверсным.*

Доказательство. Согласно (12.1)

$$x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) =$$

$$= \eta c\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma, p)\, f_\nu\big(\sigma;\, \mathrm{rev}_s(j) - p\Delta_{\nu+1}\big) =$$

$$= \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma, p)\, g_\nu\big(\sigma;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big) =$$

$$= \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu\big(\sigma, \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big)\, g_\nu(\sigma;\, j - p).$$

Но по условию теоремы

$$x\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) = y(j) = \eta c(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{p=0}^{N_\nu-1} h_\nu(\sigma, p)\, g_\nu(\sigma;\, j - p).$$

В силу единственности разложения по ортогональному базису (11.2) приходим к (12.2). Теорема доказана. ■

12.2. Рассмотрим в качестве примера кусочно-линейный сигнал $\widehat{y}$, задаваемый на основном периоде равенством

$$\widehat{y}(j) = j, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Вычислим спектр Хаара–Крестенсона сигнала $\widehat{y}$, связанный с прореживанием по времени. Пусть $H_g(\widehat{y}) = \{\widehat{\beta};\, \widehat{y}_\nu(\sigma, p)\}$. Тогда

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \widehat{y}(j) = \frac{N-1}{2};$$

$$\widehat{y}_\nu(\sigma, p) = n^{-\nu}\sum_{j=0}^{N-1} \widehat{y}(j)\, \overline{g_\nu}(\sigma;\, j-p) = n^{-\nu}\sum_{j=0}^{N-1} j\omega_n^{-\sigma\lfloor j/N_\nu\rfloor}\, \delta_{N_\nu}(j-p).$$

Мы воспользовались формулой (11.13).

Представим j в виде $j = lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + q$, где $q \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$. Получим

$$n^\nu\, \widehat{y}_\nu(\sigma, p) = \sum_{l=0}^{\Delta_\nu-1}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{N_\nu-1} (lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + q)\, \omega_n^{-\sigma\tau}\, \delta_{N_\nu}(q-p) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\Delta_\nu-1}\sum_{\tau=0}^{n-1} (\tau N_\nu + lN_{\nu-1} + p)\, \omega_n^{-\sigma\tau}.$$

Так как $\sigma \in \{1, \ldots, n-1\}$, то $\sum\limits_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} = 0$. С учетом этого факта приходим к выражению

$$\widehat{y}_\nu(\sigma, p) = n^{-\nu}\sum_{l=0}^{\Delta_\nu-1}\sum_{\tau=0}^{n-1} \tau N_\nu\, \omega_n^{-\sigma\tau} = N_{\nu+1}\sum_{\tau=0}^{n-1} \tau\omega_n^{-\sigma\tau}.$$

Введем обозначение $z(\sigma) = \sum\limits_{\tau=0}^{n-1} \tau\omega_n^{-\sigma\tau}$, $\sigma = 1, \ldots, n-1$. Имеем

$$z(\sigma) = \sum_{\tau=1}^{n-1} \tau\omega_n^{-\sigma\tau} = \sum_{\tau=0}^{n-1} (\tau+1)\,\omega_n^{-\sigma(\tau+1)} - n =$$

$$= \omega_n^{-\sigma}\Big\{\sum_{\tau=0}^{n-1} \tau\omega_n^{-\sigma\tau} + \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\Big\} - n = \omega_n^{-\sigma} z(\sigma) - n,$$

откуда

$$z(\sigma) = \frac{n}{\omega_n^{-\sigma} - 1} = \frac{n}{2}\big(i \operatorname{ctg}\frac{\pi\sigma}{n} - 1\big).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\widehat{y}_\nu(\sigma, p) = N_{\nu+1}\, z(\sigma) = \frac{N_\nu}{2}\big(i \operatorname{ctg}\frac{\pi\sigma}{n} - 1\big),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \;\; \sigma = 1, \ldots, n-1, \;\; \nu = 1, \ldots, s.$$

Отметим, что $\widehat{y}_\nu(\sigma, p)$ не зависит от p, поэтому спектр $H_g(\widehat{y})$ является по определению логарифмически автореверсным. Если мы обозначим через $\widehat{x}$ сигнал, имеющий такой же спектр в базисе Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте, то в силу теоремы 12.2 для $\widehat{x}$ будем иметь

$$\widehat{x}(j) = \operatorname{rev}_s(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Непосредственно этот результат было бы получить нелегко.

12.3. Обозначим через $\mathcal{L}_N$ линейное множество логарифмически автореверсных спектров и через $\dim \mathcal{L}_N$ — его размерность. Напомним, что $N = n^s$.

Теорема 12.4. *Справедливо равенство*

$$\dim \mathcal{L}_N = \frac{n}{2}\left[n^{s-1} + \Big(2 + \frac{n-1}{2}\big(1 + (-1)^s\big)\Big) n^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1\right]. \qquad (12.4)$$

Доказательство. При $s = 1$ и $s = 2$ теорема верна. Пусть $s \geq 3$ и $\nu \in \{2, \ldots, s-1\}$. Обозначим через ζ_ν количество тех $p \in \{0, 1, \ldots, n^\nu - 1\}$, для которых $\mathrm{rev}_\nu(p) = p$. Очевидно, что $\zeta_{2k} = n^k$, $\zeta_{2k+1} = n^{k+1}$, т. е. $\zeta_\nu = n^{\lfloor(\nu+1)/2\rfloor}$.

Условия (12.2) с учетом замечания к определению логарифмически автореверсного спектра можно переписать так:

$$h_{s-\nu}\big(\sigma, p\big) - h_{s-\nu}\big(\sigma, \mathrm{rev}_\nu(p)\big) = 0,$$

$$p = 0, 1, \ldots, n^\nu - 1, \;\; \sigma = 1, \ldots, n-1, \;\; \nu = 2, \ldots, s-1.$$

Эти условия представляют собой линейную однородную систему, состоящую из $\frac{n-1}{2}\sum\limits_{\nu=2}^{s-1}(n^\nu - \zeta_\nu)$ уравнений с линейно независимыми строками коэффициентов. Поэтому

$$\dim \mathcal{L}_N = N - \frac{n-1}{2}\sum_{\nu=2}^{s-1}(n^\nu - \zeta_\nu) =$$

$$= n^s - \frac{n(n-1)}{2}\sum_{\nu=1}^{s-2}\big(n^\nu - n^{\lfloor \nu/2 \rfloor}\big).$$

При $s = 2l+1$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} n^{\lfloor \nu/2 \rfloor} = \sum_{k=0}^{l-1} n^{\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor} + \sum_{k=1}^{l-1} n^{\left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor} = 2\sum_{k=0}^{l-1} n^k - 1 = 2\frac{n^l - 1}{n-1} - 1.$$

В этом случае

$$\dim \mathcal{L}_N = n^s - \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n^{s-1}-1}{n-1} - 1 - \left(2\frac{n^l - 1}{n-1} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{n^s}{2} + n^{l+1} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\big[n^{s-1} + 2n^{\left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor} - 1\big],$$

что соответствует (12.4).

При $s = 2l + 2$

$$\sum_{\nu=1}^{s-2} n^{\lfloor \nu/2 \rfloor} = 2\frac{n^l - 1}{n-1} - 1 + n^l = \frac{(n+1)n^l - 2}{n-1} - 1.$$

Поскольку $l = \lfloor (s-1)/2 \rfloor$, то

$$\dim \mathcal{L}_N = \frac{n}{2}\big[n^{s-1} + (n+1)n^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} - 1\big],$$

что также соответствует (12.4).

Теорема доказана. ■

В табл. 2 приведены значения $\dim \mathcal{L}_N$ при некоторых n и s.

Таблица 2

$n \diagdown s$	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	7	13	25	43	79
3	3	9	21	57	147	417	1173
4	4	16	46	166	574	2206	8446
5	5	25	85	385	1685	8185	39685

§ 13. Три подхода к построению ортогональных вейвлетных базисов

13.1. В § 9, 10 на примере базисов Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени и прореживанием по частоте были продемонстрированы два подхода к построению ортогональных вейвлетных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$. Первый подход основан на построении рекуррентной последовательности ортогональных базисов в $\mathbb{C}_N$. Второй («наивный») подход использует разложение сигнала по собственным сдвигам.

В классическом вейвлет-анализе для построению вейвлетных базисов используется специальная последовательность вложенных подпространств, которая называется кратномасштабным анализом [11, 40, 44, 29, и др.]. Покажем, что ортогональные базисы Хаара–Крестенсона (11.1), (11.2) также можно получить с помощью кратномасштабного анализа пространства $\mathbb{C}_N$ по основанию n. Это и будет третим подходом к построению ортогональных вейвлетных базисов в $\mathbb{C}_N$.

13.2. Введем сигналы

$$\varphi_\nu(j) = \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} \delta_N(j-k).$$

Обозначим $\mathcal{V}_\nu = \operatorname{lin}\left(\{\varphi_\nu(\cdot - qN_\nu)\}_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}\right)$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Очевидно, что $\mathcal{V}_\nu \subset \mathbb{C}_N$ — подпространство кусочно-постоянных сигналов с ортогональным базисом $\{\varphi_\nu(\cdot - qN_\nu)\}_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}$, причем

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_s = \mathbb{C}_N. \tag{13.1}$$

Найдем ортогональное дополнение $\mathcal{W}_1$ подпространства $\mathcal{V}_0$ до $\mathcal{V}_1$. Для этого построим ортогональный базис в $\mathcal{V}_1$, содержащий сигнал φ_0. Положим

$$\psi_1^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \varphi_1(j - qN_1), \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Сигналы $\psi_1^{(\sigma)}$ принадлежат $\mathcal{V}_1$ и попарно ортогональны, поскольку

$$\langle \psi_1^{(\sigma_1)},\, \psi_1^{(\sigma_2)} \rangle = N_1 \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{(\sigma_1-\sigma_2)q} = N\delta_n(\sigma_1-\sigma_2).$$

К тому же их количество совпадает с размерностью $\mathcal{V}_1$. Значит, $\{\psi_1^{(\sigma)}\}_{\sigma=0}^{n-1}$ — ортогональный базис подпространства $\mathcal{V}_1$. При этом

$$\psi_1^{(0)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \varphi_1(j-qN_1) \equiv 1 \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \delta_N(j-k) = \varphi_0(j).$$

Обозначим $\mathcal{W}_1 = \mathrm{lin}\bigl(\{\psi_1^{(\sigma)}\}_{\sigma=1}^{n-1}\bigr)$. Учитывая, что $\mathcal{V}_0 = \mathrm{lin}(\varphi_0)$, получаем $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_1$.

В общем случае при $\nu = 2,\dots,s$ положим

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \varphi_\nu(j-qN_\nu), \quad \sigma = 0,1,\dots,n-1.$$

Нетрудно проверить, что при фиксированном ν

$$\begin{aligned}\Bigl\langle \psi_\nu^{(\sigma_1)}(\cdot - k_1N_{\nu-1}),\, \psi_\nu^{(\sigma_2)}(\cdot - k_2N_{\nu-1})\Bigr\rangle &= \\ &= N_{\nu-1}\,\delta_n(\sigma_1-\sigma_2)\,\delta_{\Delta_\nu}(k_1-k_2)\end{aligned} \tag{13.2}$$

для $\sigma_1,\sigma_2 \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $k_1,k_2 \in \{0,1,\dots,\Delta_\nu-1\}$. Действительно, обозначим через S левую часть формулы (13.2) и преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned}S = \Bigl\langle \sum_{q_1=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma_1 q_1}\, \varphi_\nu(\cdot - k_1N_{\nu-1} - q_1N_\nu),\\ \sum_{q_2=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma_2 q_2}\, \varphi_\nu(\cdot - k_2N_{\nu-1} - q_2N_\nu)\Bigr\rangle =\end{aligned}$$

$$= \sum_{q_1,q_2=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma_1 q_1 - \sigma_2 q_2} \big\langle \varphi_\nu\big(\,\cdot - (k_1 n + q_1) N_\nu\big),\, \varphi_\nu\big(\,\cdot - (k_2 n + q_2) N_\nu\big)\big\rangle.$$

При $k_1 \neq k_2$ согласно определению φ_ν имеем $S = 0$, что соответствует (13.2). Пусть $k_1 = k_2$. Тогда

$$S = N_\nu \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{(\sigma_1 - \sigma_2) q} = N_{\nu-1}\, \delta_n(\sigma_1 - \sigma_2),$$

что также соответствует (13.2).

Определим подпространство $\mathcal{W}_\nu^{(\sigma)}$ как линейную оболочку системы ортогональных сигналов $\{\psi_\nu^{(\sigma)}(\cdot - kN_{\nu-1})\}_{k=0}^{\Delta_\nu - 1}$. В силу (13.2) подпространства $\mathcal{W}_\nu^{(0)}, \mathcal{W}_\nu^{(1)}, \ldots, \mathcal{W}_\nu^{(n-1)}$ ортогональны. Поскольку сигналы $\psi_\nu^{(\sigma)}(j - kN_{\nu-1})$, $k = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежат $\mathcal{V}_\nu$ и их количество $\Delta_{\nu+1}$ совпадает с размерностью $\mathcal{V}_\nu$, то

$$\mathcal{V}_\nu = \mathcal{W}_\nu^{(0)} \oplus \mathcal{W}_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_\nu^{(n-1)}. \tag{13.3}$$

Отметим, что

$$\psi_\nu^{(0)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \varphi_\nu(j - qN_\nu) = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big(j - (qN_\nu + k)\big) =$$

$$= \sum_{k'=0}^{N_{\nu-1}-1} \delta_N(j - k') = \varphi_{\nu-1}(j).$$

Как следствие, получаем $\mathcal{W}_\nu^{(0)} = \mathcal{V}_{\nu-1}$. Если обозначить $\mathcal{W}_\nu = \mathcal{W}_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_\nu^{(n-1)}$, то (13.3) примет вид $\mathcal{V}_\nu = \mathcal{V}_{\nu-1} \oplus \mathcal{W}_\nu$, $\nu = 2, \ldots, s$. Как отмечалось, последнее равенство верно и при $\nu = 1$.

Теперь имеем

$$\mathbb{C}_N = \mathcal{V}_s = \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{V}_{s-1} = \mathcal{W}_s \oplus (\mathcal{W}_{s-1} \oplus \mathcal{V}_{s-2}) = \ldots =$$

$$= \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{W}_{s-1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{V}_0.$$

Это значит, что любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = \alpha\varphi_0(j) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} \alpha_\nu^{(\sigma)}(k)\, \psi_\nu^{(\sigma)}(j - kN_{\nu-1}). \qquad (13.4)$$

Сравним формулы (13.4) и (11.20). Прежде всего отметим, что $\varphi_0(j) \equiv c(j) \equiv 1$. Далее, в силу равенства $N_\nu = \Delta_{s-\nu+1}$ и соотношения (11.3)

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q} \sum_{k=0}^{\Delta_{s-\nu+1}-1} \delta_N(j - k - q\Delta_{s-\nu+1}) = f_{s-\nu+1}(\sigma;\, j),$$

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j - kN_{\nu-1}) = f_{s-\nu+1}(\sigma;\, j - k\Delta_{s-\nu+2}).$$

Приходим к другой форме записи разложения (13.4):

$$x = \alpha c + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{N_{s-\nu+1}-1} \alpha_\nu^{(\sigma)}(k)\, f_{s-\nu+1}(\sigma;\, \cdot - k\Delta_{s-\nu+2}). \qquad (13.5)$$

Видно, что формула (13.5) лишь порядком слагаемых по ν отличается от (11.20).

Таким образом, цепочка вложенных подпространств (13.1) обеспечивает обобщенный кратно-масштабный анализ пространства $\mathbb{C}_N$, приводящий к разложению сигналов по базису Хаара–Крестенсона с прореживанием по частоте.

13.3. Рассмотрим случай прореживания по времени. Положим

$$\varphi_\nu(j) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j),$$

$$V_\nu = \operatorname{lin}\left(\{\varphi_\nu(\cdot - k)\}_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1}\right), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s;$$

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \varphi_\nu(j - q\Delta_\nu),$$

$$W_\nu^{(\sigma)} = \operatorname{lin}\left(\{\psi_\nu^{(\sigma)}(\cdot - k)\}_{k=0}^{\Delta_\nu - 1}\right), \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, s.$$

Очевидно, что $V_\nu = \mathbb{C}_{\Delta_{\nu+1}}$. В частности, $V_s = \mathbb{C}_N$ и $V_0 = \operatorname{lin}(\varphi_0)$, где $\varphi_0(j) \equiv 1$. При этом

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_s = \mathbb{C}_N. \tag{13.6}$$

Далее, при фиксированном $\nu \in \{2, \ldots, s\}$

$$\left\langle \psi_\nu^{(\sigma_1)}(\cdot - k_1),\, \psi_\nu^{(\sigma_2)}(\cdot - k_2) \right\rangle = N_{\nu-1}\, \delta_n(\sigma_1 - \sigma_2)\, \delta_{\Delta_\nu}(k_1 - k_2)$$

для $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$. Это доказывается по той же схеме, что и (13.2). Поскольку сигналы $\psi_\nu^{(\sigma)}(j-k)$, $k = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежат V_ν, попарно ортогональны и их количество $\Delta_{\nu+1}$ совпадает с размерностью V_ν, то

$$V_\nu = W_\nu^{(0)} \oplus W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}. \tag{13.7}$$

Отметим, что

$$\psi_\nu^{(0)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \varphi_\nu(j - q\Delta_\nu) = \sum_{q=0}^{n-1} \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j - q\Delta_\nu) = \delta_{\Delta_\nu}(j) = \varphi_{\nu-1}(j).$$

Как следствие, получаем $W_\nu^{(0)} = V_{\nu-1}$. Если обозначить $W_\nu = W_\nu^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_\nu^{(n-1)}$, то (13.7) примет вид $V_\nu = V_{\nu-1} \oplus W_\nu$, $\nu = 2, \ldots, s$. Эта формула верна и при $\nu = 1$.

Теперь имеем $\mathbb{C}_N = V_s = W_s \oplus V_{s-1} = \ldots = W_s \oplus W_{s-1} \oplus \ldots \oplus W_1 \oplus \oplus V_0$. Это значит, что любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ допускает представление

$$x(j) = \beta\varphi_0(j) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{\Delta_\nu-1} \beta_\nu^{(\sigma)}(k)\,\psi_\nu^{(\sigma)}(j-k). \tag{13.8}$$

Сравним формулы (13.8) и (11.21). Прежде всего отметим, что $\varphi_0(j) \equiv c(j) \equiv 1$. Далее, согласно (11.4)

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\,\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j - q\Delta_\nu) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\,\delta_{N_{s-\nu}}(j - qN_{s-\nu+1}) =$$

$$= g_{s-\nu+1}(\sigma;\, j),$$

$$\psi_\nu^{(\sigma)}(j-k) = g_{s-\nu+1}(\sigma;\, j-k).$$

Приходим к другой форме записи разложения (13.8):

$$x = \beta c + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N_{s-\nu+1}-1} \beta_\nu^{(\sigma)}(k)\,g_{s-\nu+1}(\sigma;\,\cdot - k). \tag{13.9}$$

Видно, что формула (13.9) лишь порядком слагаемых по ν отличается от (11.21).

Таким образом, цепочка вложенных подпространств (13.6) обеспечивает обобщенный кратно-масштабный анализ пространства $\mathbb{C}_N$, приводящий к разложению сигналов по базису Хаара–Крестенсона с прореживанием по времени.

Литература

1. Айзенберг Н. Н., Трофимлюк О. Т. *Сдвиг, свертка и корреляционная функция дискретных сигналов в произвольном базисе* // ДАН СССР. 1980. Т. 250. № 1. С. 47–51.
2. Алексеев А. А., Кириллов А. Б. *Технический анализ сигналов и распознавание радиоизлучений.* СПб.: ВАС, 1998. 368 с.
3. Астафьева Н. М. *Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения* // Успехи физ. наук. 1998. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
4. Ахмед Н., Рао К. Р. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.* М.: Связь, 1980. 248 с.
5. Блейхут Р. *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.* М.: Мир, 1989. 448 с.
6. Виленкин Н. Я. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 4. С. 363–400.
7. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984. 318 с.
8. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. *Теория и практика вейвлет-преобразования.* СПб.: Изд-во ВУС, 1999. 208 с.
9. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша.* М.: Наука, 1987. 344 с.
10. Дагман Э. Е., Кухарев Г. А. *Быстрые дискретные ортогональные преобразования.* Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.

11. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

12. Залманзон Л. А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 496 с.

13. Кирушев В. А., Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Вейвлетное разложение пространства дискретных периодических сплайнов* // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 5. С. 712–720.

14. Кухарев Г. А. *Основные теоремы сдвига, свертки и корреляции для задач цифровой обработки сигналов* // Изв. вузов. Радиотехника. 1985. Т. 28. № 8. С. 26–31.

15. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов.* М.: Радио и связь, 1983. 264 с.

16. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 111–157.

17. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.

18. Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Хааровские спектры дискретных сверток* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 954–960.

19. Малоземов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А. *Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений* // Проблемы передачи информации. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.

20. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Алгоритм Кули–Тьюки и дискретное преобразование Хаара* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№ 15). С. 31–34.

21. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Новый подход к алгоритму Кули–Тьюки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 3 (№ 15). С. 57–60.

22. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Секционирование, ортогональность и перестановки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1 (№ 1). С. 16–21.

23. Машарский С. М. *Автореверсные спектры Хаара–Крестенсона* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2001. Вып. 2 (№ 9). С. 57–65.

24. Машарский С. М. *Быстрое преобразование Виленкина–Крестенсона на основе факторизации Гуда* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского Мат. Общества. Препринт № 2000–14. 10 с.
`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2000/index.html#14`

25. Машарский С. М. *Свертка и корреляция дискретных сигналов в базисах Хаара–Крестенсона* // Вестник молодых ученых. Прикл. матем. и механика. 2000. № 4. С. 31–40.

26. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. *Основы теории всплесков* // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 6 (324). С. 53–128.

27. Петухов А. П. *Введение в теорию базисов всплесков.* СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 132 с.

28. Петухов А. П. *Периодические всплески* // Матем. сборник. 1997. Т. 188. № 10. С. 69–94.

29. Петухов А. П. *Периодические дискретные всплески* // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 3. С. 151–183.

30. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975. 208 с.

31. Хармут Х. *Теория секвентного анализа. Основы и применения.* М.: Мир, 1980. 576 с.

32. Chrestenson H. E. *A class of generalized Walsh functions* // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5. No. 1. P. 17–31.

33. Chui C. K. *An Introduction to Wavelets.* Academic Press, San Diego, CA, 1992. 264 p.

34. Coifman R. R., Meyer I., Wickerhauser M. V. *Adapted waveform analysis, wavelet packets and applications* // Proc. ICIAM'91. Philadelphia, 1992. P. 41–50.

35. Coifman R. R., Wickerhauser M. V. *Entropy-based algorithms for best basis selection* // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. Vol. 38. No. 2. P. 712–718.

36. Cooley J. W., Tukey J. W. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series* // Math. Comput. 1965. Vol. 19. No. 90. P. 297–301.

37. Daubechies I. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets* // Comm. Pure and Appl. Math., № 41, 1988. P. 909–996.

38. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM/CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61, 1992. 378 p.

39. Good I. J. *The interaction algorithm and practical Fourier analysis* // J. Royal Stat. Soc. (London). 1958. Vol. B-20. No. 2. P. 361–372.

40. Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, 1998. 578 p.

41. Malozemov V. N., Masharsky S. M. *Adaptive signal processing based on discrete Vilenkin–Chrestenson transform* // Proc. Int. Conf. "Neural Networks and Artificial Intelligence". Minsk, Belarus, 2001. P. 211–213.

42. Malozemov V. N., Masharsky S. M. *Haar spectra of discrete signals* // Abstracts of the 2nd Int. Conf. "Tools for Mathematical Modelling". St. Petersburg, 1999. P. 86–87.

43. Masharsky S. M. *Haar–Chrestenson spectra of discrete signals* // Abstracts of the Int. Conf. "Optimization of Finite Element Approximations & Splines and Wavelets". St. Petersburg, 2001. P. 153–154.

44. Strang G., Nguyen T. *Wavelets and Filter Banks.* Wellesley-Cambridge Press, 1996. 512 p.

45. Wickerhauser M. V. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software.* IEEE Press, New York, 1994. 504 p.