УДК 517.982.254

АДАПТИВНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Л.В.Новиков

Институт аналитического приборостроения РАН

Реферат: Показана связь между согласованной фильтрацией и вейвлет - анализом. Приведена процедура синтеза вейвлетов с учетом априорной информации о форме сигнала (приборной функции) и корреляционной функции шума. Это позволяет адаптировать вейвлет – анализ измерительных данных для максимального подавления шума и дрейфа базовой линии. Приведены результаты моделирования с гауссовой моделью сигнала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Назовем *адаптивным* такой вейвлет – анализ, в котором используются вейвлеты, синтезированные с учетом априорной информации об анализируемых данных. Дискретное преобразование вейвлет является мощным средством для обработки нестационарных сигналов и изображений в физике, химии, биологии, метеорологии и др. областях [1]. Анализ сигналов в таких базисах осуществляется по двум переменным – масштабу и сдвигу. Это позволяет разделить крупные и мелкие детали сигналов и изображений, одновременно локализуя их на временной шкале. Таким образом учитывается то важное для практики обстоятельство, что протяженные объекты анализируемых данных лежат в низкочастотной области спектра, а короткие – в высокочастотной. При обработке данных аналитических приборов широко используется априорная информация о форме полезного сигнала и о корреляционной функции шума, которая позволяет синтезировать для обработки сигналов согласованные фильтры или фильтры Винера. Поэтому в вейвлет – анализе, используемом в ряде приложений, целесообразно согласовать характер сигнала с видом базисной функции, что делает его незаменимым средством при обработке измерительной информации на пороге чувствительности прибора [2].

В работе [3] предлагаются вейвлеты, синтезированные на основе собственных функций интегрального уравнения с ядром типа корреляционной функции, приводящие к разложению Карунена-Лоэва, практическое использование которых эффективно только для шумоподобных сигналов, но теряет свои достоинства при обработке квазидетерминированных сигналов, которые характерны для многих приложений. В настоящей работе, на основе предложенного еще в 1984 г.[4] модифицированного алгоритма ортогонализации Грама-Шмидта, рассматривается метод синтеза вейвлет с использованием априорных данных об измерительной информации (корреляционной функции шума, форме компоненты сигнала), позволяющий получить широкий класс вейвлетов, которые приспособлены к характеру анализируемых данных и названных *адаптивными.*

2.ТЕОРИЯ

В соответствии с мультиразрешающей концепцией Mallat [5,6] базисные функции $\varphi(t)$ вложенных подпространств $V_0 \subset V_1$ связаны соотношением

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \qquad (1а)$$

или в матричном виде

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\mathbf{h}'\,\boldsymbol{\varphi}(2t)$$

где масштабные функции $\varphi(t-n)$ и $\varphi(2t-n)$ образуют базис в V_0 и V_1 соответственно путем целочисленных сдвигов по t.

Пусть функция $\tilde{\varphi}(t)$ образует *дуальный* базис, который аналогично (1а) можно представить в виде:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_n \tilde{h}(n)\sqrt{2}\tilde{\varphi}(2t-n), \qquad (1б)$$

или в матричном виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2}\,\tilde{\mathbf{h}}'\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(2t)$$

Функции (1а) и (1б) отвечают условию биортогональности относительно сдвига. Это означает, что их скалярное произведение равно

$$\langle \varphi(t-k), \tilde{\varphi}(t-n) \rangle = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, \text{ если } k = n, \\ 0, \text{ в других случаях.} \end{cases}$$

С учетом этого из (1) следует, что коэффициенты $h(n)$ и $\tilde{h}(n)$ определяются как

$$h(n) = \sqrt{2}\langle \varphi(t), \tilde{\varphi}(2t-n) \rangle \qquad (2а)$$

$$\tilde{h}(n) = \sqrt{2}\langle \tilde{\varphi}(t), \varphi(2t-n) \rangle \qquad (2б)$$

В [6] показано, что для существования однозначного прямого и обратного преобразований вейвлет коэффициенты $h(n)$ и $\tilde{h}(n)$ должны удовлетворять условиям:

$$\sum_n h(n)\tilde{h}(n+2k) = \delta_{k0}$$

$$\sum_n h(n) = \sum_n \tilde{h}(n) = \sqrt{2}$$

Вейвлет $\psi(t)$ и дуальный ему вэйвлет $\tilde{\psi}(t)$ образуются из масштабных функций $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ следующим образом:

$$\psi(t) = \sum_n g(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \qquad (3а)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_n \tilde{g}(n)\sqrt{2}\tilde{\varphi}(2t-n) \qquad (3б)$$

где коэффициенты $g(n)$ и $\tilde{g}(n)$ определяются по формулам [6]:

$$g(n) = (-1)^n \tilde{h}(1-n) \qquad (4а)$$

$$\tilde{g}(n) = (-1)^n h(1-n) \qquad (4б)$$

Функция $\psi(t)$ образует базис (путем ее целочисленных сдвигов – $\psi(t-k)$) в подпространстве W_0, таком, что его дополнение к V_0 образует подпространство $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Из выражений (2), (3) и (4) следует, что вейвлет $\psi(t)$ полностью определяется масштабной функцией $\varphi(t)$, дуальным базисом $\tilde{\varphi}(t)$, а базисные функции в V_0 и W_0 образуются целочисленным сдвигом соответствующих функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. По этой причине функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ называют иногда *материнскими.*

Базисные функции для произвольных подпространств V_j и W_j, таких, что $\ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_j \ldots \subset L^2$ для всех $j \in Z$, образуются масштабированием базисных функций из V_0 и W_0, а именно, базис в V_j имеет вид

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) \qquad (5)$$

базис в W_j имеет вид

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \qquad (6)$$

Аналогично можно выразить и их *дуальные* базисы.

Существующие способы синтеза вейвлетов [6,7,8] не всегда позволяют адаптировать их к условиям эксперимента, когда обрабатывается измерительная информация в условиях шума, помех и т.п. и когда требуется высокая достоверность результатов измерений.

3. СИНТЕЗ МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ

Известно, что для оптимального в смысле максимума отношения сигнал/шум приема сигнала опорная функция приемника (согласованного фильтра) $u(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)u(\tau)d\tau = s(t) \qquad (7)$$

где $s(t)$ – модель сигнала, $K(t)$ - корреляционная функция шума.

Выполняя Фурье – преобразование (7), получим

$$\hat{u}(\omega)=\frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{K}(\omega)}.$$

Для большого класса моделей функция $s(t)$ хорошо дифференцируема, имеет форму пика с быстро затухающими боковыми лепестками. Можно показать, что спектр Фурье такой функции $\hat{s}(\omega)$ также ограничен и достаточно быстро убывает, т.е. функция $s(t)$ принадлежит классу финитных функций, которые ограничены как во временной, так и в спектральной областях.

Это означает, что если спектр Фурье шума $\hat{K}(\omega)$ не имеет нулей в полосе сигнала, то функция $\hat{u}(\omega)$ также ограничена и дифференцируема, т. е. решение уравнения (7) существует. В случае белого шума, когда $\hat{K}(\omega)=const$ для всех ω решение будет тривиальным: $s(t)\equiv u(t)$.

Существенным параметром финитных функций является ширина (например, второй центральный момент μ_0), поэтому их можно представить в виде $s\left(\frac{t-t_0}{\mu_0}\right)$, $u\left(\frac{t-t_0}{\mu_0}\right)$, где t_0 – положение функции (пика) на временной оси.

Если $t_0=k\mu_0, k=0,\pm1,\pm2,\pm3,.....$, то получим набор смещенных на величину μ_0 функций. Можно показать, что эти функции линейно-независимы и, поэтому, образуют базис в L^2 для подмножества функций с ограниченным спектром. Переходя к безразмерным аргументам, получим из функций $s(t)$ и $u(t)$ набор пар функций $\{s(t-k),u(t-k)\}$ $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,.....$, удовлетворяющих интегральному уравнению (7).

Чтобы получить биортонормированный базис из функций $\{s(t-k),u(t-k)\}$ для подпространства V_0 выполним процедуру ортогонализации [4,5]. Можно показать, что эта процедура будет сходящейся, т.е. система функций $\{s(t-k),u(t-k)\}$ порождает биортонормированный базис только если $|\hat{s}(\omega)|\neq 0$ и $|\hat{u}(\omega)|\neq 0$ при $|\omega|\leq\pi$. Действительно, для биортогональных систем в Фурье - области для $\hat{\varphi}(\omega)$ и $\hat{\tilde{\varphi}}(\omega)$ справедливы соотношения:

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\hat{s}(\omega)}{\sqrt{\sum_k \hat{s}(\omega+2\pi k)\,\hat{g}^*(\omega+2\pi k)}} \text{ и } \hat{\tilde{\varphi}}(\omega)=\frac{\hat{u}(\omega)}{\sqrt{\sum_k \hat{s}(\omega+2\pi k)\,\hat{g}^*(\omega+2\pi k)}},$$

из которых следует, что $\hat{\varphi}(\omega)$ и $\hat{\tilde{\varphi}}(\omega)$ конечны, при выполнении упомянутых выше ограничений для $\hat{s}(\omega)$ и $\hat{u}(\omega)$. Заметим, что для решения $s(t)\equiv u(t)$ получим ортонормированную систему [5]:

$$\hat{\varphi}(\omega)=\hat{\tilde{\varphi}}(\omega)=\frac{\hat{s}(\omega)}{\sqrt{\sum_k |\hat{s}(\omega+2\pi k)|^2}}$$

Обозначим получаемую при ортогонализации методом Грама-Шмидта биортогональную систему функций как $\{\Phi_k(t),\tilde{\Phi}_k(t)\}$.

Последовательно выполняя процедуру для $k = 0,1,2,3,...$ с учетом (7) получим:

$$\Phi_k(t) = u_k(t) + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{kr} \Phi_r(t), \tag{8а}$$

где коэффициенты ортогонализации

$$\alpha_{kr} = -\frac{\langle u_k, \tilde{\Phi}_r \rangle}{\sigma_r} = -\frac{\langle s_k, \Phi_r \rangle}{\sigma_r}, \quad k > r \tag{8б}$$

и

$$\sigma_r = \langle \Phi_r, \tilde{\Phi}_r \rangle, \quad k > r \tag{8г}$$

Для дуального базиса имеем:

$$\tilde{\Phi}_r(t) = s_r(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \tilde{\Phi}_i(t), \tag{8в}$$

Причем базис и дуальный базис связаны соотношением, аналогичным (7)

$$\tilde{\Phi}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) \Phi_k(\tau) d\tau \tag{9}$$

Коэффициенты ортогонализации α_{kr} образуют нижнюю треугольную матрицу $\boldsymbol{\alpha}$, а элементы $\boldsymbol{\sigma}_r$ - некоторый вектор.

Подставляя в (8б) выражение (8в), с учетом того, что $\alpha_{ri}\sigma_i = -\langle s_r, \Phi_i \rangle$, получим для вычисления α_{kr} рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \alpha_{kr} &= -\frac{1}{\sigma_r}\left\{ \langle u_k, s_r \rangle + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \langle u_k, \Phi_i \rangle \right\} = \\ &= -\frac{1}{\sigma_r}\left\{ \langle u_k, s_r \rangle - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri}\alpha_{ki}\sigma_i \right\} \\ & k = 2,3,.....; \quad r = 1,2,3,...,k-1; \quad \alpha_{11} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя в (8г) выражение (8в) с учетом (8а) и (8б), получим для вычисления σ_r следующую рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \langle s_r, \Phi_r \rangle = \langle s_r, u_r \rangle + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \langle s_r, \Phi_i \rangle = \\ &= \langle s_r, u_r \rangle - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha^2{}_{ri}\, \sigma_i, \\ \sigma_1 &= \langle s_1, u_1 \rangle, \quad r = 2,3,4,... \end{aligned} \tag{11}$$

Благодаря финитности функций $u_k(t)$ и $s_k(t)$, их скалярное произведение $\langle u_m, s_k \rangle \to 0$ при $m - k \to \infty$. Матрица $\boldsymbol{\alpha}$ для значений k больших некоторого m

приобретает "ленточный" характер (рис.1.). Причем, элементы разных строк матрицы одинаково удаленных от диагонали равны, т.е. $\alpha_{kr} = \alpha_{k-n,r-n}$, $(k > r)$, и

$$\left| \alpha_{k,k-1} \right| > \left| \alpha_{k,k-2} \right| > \ldots > \left| \alpha_{k,k-m} \right| \approx 0.$$

Аналогично ведет себя нормирующий коэффициент σ_r: при $r > m$ он становится константой, которую обозначим как σ_0 . Поэтому в качестве базисных функций удобно принять функции $\Phi_k(t)$ и $\tilde{\Phi}_k(t)$ при $k > m$, т.е. при $k = m, m+1, m+2, \ldots$, так как при этом они отличаются только сдвигом.

Матрица α с элементами $\alpha_{m+n,n+r}$ имеет вид, показанный на рис 2. Элементы строк этой матрицы отличаются только смещением, т.е. $\alpha_{m+n,n+r} = \alpha_{m+n+i,n+r+i}, i = 0,1,2,3,\ldots$

Поэтому, чтобы образовать базисные функции достаточно воспользоваться элементами одной строки этой матрицы, которые обозначим как $b_r, r = 1,2,3,\ldots,m.$

Тогда

$$b_r = \alpha_{m+n,n+r-1};\ r = 1,\ldots,m-1$$

и

$$\Phi_n(t) = u_n(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{m-r} \Phi_{n-r}(t) \qquad (12а)$$

причем $|b_{m-1}| > |b_{m-1}| > \ldots > |b_1| \approx 0$.

Аналогично

$$\tilde{\Phi}_n(t) = s_n(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{m-r} \tilde{\Phi}_{n-r}(t) \qquad (12б)$$

Из формул (12) получим выражение функций $\{\Phi_n(t), \tilde{\Phi}_n(t)\}$ непосредственно через функции $u(t)$ и $s(t)$, именно

$$\Phi_n(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \beta_{m-r} u_{n-r}(t) \qquad (13а)$$

$$\tilde{\Phi}_n(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \beta_{m-r} s_{n-r}(t) \qquad (13б)$$

$$|\beta_m| > |\beta_{m-1}| > \ldots > |\beta_1| \approx 0.$$

Для определения коэффициентов β, из формул (12) и условия биортогональности функций $\tilde{\Phi}_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ можно получить следующие соотношения:

$$\langle u_n, \tilde{\Phi}_n \rangle = \sigma_0,\ \langle s_n, \Phi_n \rangle = \sigma_0,\ \langle u_{n-k}, \tilde{\Phi}_n \rangle = 0,\ \langle s_{n-k}, \Phi_n \rangle = 0,$$

$$n > k,\ r = 1,2,3,\ldots,m-1;$$

$$\left\langle u_n, \tilde{\Phi}_{n-r} \right\rangle = -b_{m-r}\sigma_0\ ,\left\langle s_n, \Phi_{n-r} \right\rangle = -b_{m-r}\sigma_0$$
$$n > r, \qquad r = 1,2,3,\ldots,m-1$$

Воспользовавшись этими соотношениями, последовательно умножая (13а) скалярно слева и справа на $\tilde{\Phi}_n(t), \tilde{\Phi}_{n-1}(t), \tilde{\Phi}_{n-2}(t)$ и т.д. можно показать, что

$$\beta_m = 1; \quad \beta_{m-n} = b_{m-n} + \sum_{r=1}^{n-1} \beta_{m-r} b_{m-(n-r)}, \qquad (14)$$
$$n = 1,2,3,4,\ldots,m-1$$

Масштабные функции $\varphi_k(t)$ и $\tilde{\varphi}_k(t)$ образуются из функций $\Phi_k(t)$ и $\tilde{\Phi}_k(t)$ нормировкой на $\sqrt{\sigma_0}$. Имея ввиду (13)полагая, что на $\sqrt{\sigma_0}$ нормируются коэффициенты **β,** для $\varphi_k(t)$ и $\tilde{\varphi}_k(t)$ получим окончательно:

$$\varphi_k(t) = \sum_{r=0}^{m-1} c_{m-r} u_{k-r}(t), \qquad (15а)$$

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \sum_{r=0}^{m-1} c_{m-r} s_{k-r}(t), \qquad (15б)$$

где $\mathbf{c} = \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_0}}$.

Выполняя в (15) замену индексов $k - r = n$, получим для $\varphi_k(t)$ выражение в матричном виде:

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=k}^{k-m+1} c_{m+n-k} u_n(t) = \sum_{n=k-m+1}^{k} \gamma_{k,n} u_n(t) \qquad (16а)$$

и для $\tilde{\varphi}_k(t)$

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \sum_{n=k}^{k-m+1} c_{m+n-k} s_n(t) = \sum_{n=k-m+1}^{k} \gamma_{k,n} s_n(t) \qquad (16б)$$

$$k = 1,2,3,\ldots,$$

где $\gamma_{k,n} = c_{m+n-k}$ – элементы матрицы размера $3m \times 4m$ (обозначим ее $\boldsymbol{\gamma}$), вид которой аналогичен показанной на рис.2. Тогда в матричном виде (16) имеет вид

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{u}(t), \qquad (17а)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{s}(t), \qquad (17б)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{s}(t)$ – векторы-столбцы соответствующих функций.

Получим выражения для масштабных функций с учетом свойства вложенности подпространств (1). С учетом (1) выражение (16) можно представить в виде:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\ \mathbf{h}'\boldsymbol{\gamma}\mathbf{u}(2t) = \sqrt{2}\ \boldsymbol{\varsigma}'\mathbf{u}(2t) \qquad (18а)$$

и

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2}\ \tilde{\mathbf{h}}'\boldsymbol{\gamma}\mathbf{s}\ (2t+\mathrm{m}) = \sqrt{2}\ \tilde{\boldsymbol{\xi}}'\mathbf{s}(2t), \qquad (18б)$$

где $$\boldsymbol{\zeta}' = \mathbf{h}'\boldsymbol{\gamma}; \qquad (18в)$$

и $$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}' = \tilde{\mathbf{h}}'\boldsymbol{\gamma} \qquad (18г)$$

– векторы-строки размером $4m$, а векторы-строки $\mathbf{h}'$ и $\tilde{\mathbf{h}}'$ размером $3m$ получены по формулам (2),

В развернутом виде

$$\varphi(t) = \sum_{r=-3m+1}^{m} \varsigma_r \sqrt{2}\, u_r(2t)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{r=-3m+1}^{m} \tilde{\varsigma}_r \sqrt{2}\, s_r(2t)$$

Тогда с учетом (1) окончательно выражения для масштабных функций в V_j можно представить в виде:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_{r=-3m+1}^{m} \varsigma_r \sqrt{2}\, u_r(2^{j+1} t - 2k) \qquad (19а)$$

$$\tilde{\varphi}(2^j t - k) = \sum_{r=-3m+1}^{m} \tilde{\varsigma}_r \sqrt{2}\, s_r(2^{j+1} t - 2k) \qquad (19б)$$

4. Синтез вейвлет

В матричном виде выражение (3а) имеет вид:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\, \mathbf{g}'\boldsymbol{\varphi}(2t),$$

где $\mathbf{g}'$ - вектор – строка размером $4m$.

Учитывая (17), получим материнский вейвлет

$$\psi(t) = \sqrt{2}\ \mathbf{g}'\boldsymbol{\gamma}\mathbf{u}\ (2t-1) = \sqrt{2}\,\boldsymbol{\eta}'\mathbf{u}(2t-1), \qquad (20а)$$

где $$\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{g}'\boldsymbol{\gamma}$$

-вектор – строка размером $4m$.

Аналогично, для $\tilde{\psi}(t)$

$$\tilde{\psi}(t)=\sqrt{2}\ \tilde{\mathbf{g}}'\boldsymbol{\gamma}\mathbf{s}\ \ (2t\text{-}1)=\sqrt{2}\,\tilde{\boldsymbol{\eta}}'\mathbf{s}\,(2t\text{-}1), \tag{20б}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\eta}}'=\tilde{\mathbf{g}}'\boldsymbol{\gamma}$.

Тогда окончательно базисные функции вейвлет для подпространств W_j с учетом свойства вложенности (3)определяются выражениями

$$\psi(2^j t-k)=\sum_{r=-2m+1}^{2m}\eta_r\sqrt{2}\,u_r(2^{j+1}t-2k) \tag{21а}$$

$$\tilde{\psi}(2^j t-k)=\sum_{r=-2m+1}^{2m}\tilde{\eta}_r\sqrt{2}\,s_r(2^{j+1}t-2k) \tag{21б}$$

Таким образом, также как масштабные функции (19),базисные функции вейвлет можно выразить через исходные функции $\{s(t-k),u(t-k)\}$, связанные интегральным уравнением (7).

5. Анализ

Анализ сигналов с помощью вейвлет аналогичен полосовой фильтрации сигналов с помощью фильтра нижних частот и полосовых фильтров, разбивающих частотный диапазон на полосы: первым является фильтр нижних частот с частотой отсечки $2\pi\,2^{J_0}$, выделяющий сигналы подпространства V_{J_0}), второй – полосовой фильтр с полосой $\left(2\pi 2^{J_0},2\pi 2^{J_0-1}\right)$, выделяющих сигналы подпространства W_{J_0} и т.д.(рис. 3). В пределе таким образом могут быть охвачены все сигналы из L^2, т.е.

$$L^2=V_{J_0}\oplus W_{J_0}\oplus W_{J_0+1}\oplus\cdots$$

Причем, базисом в V_{J_0} являются функции $\{\varphi_{J_0,k}(t)\}$, базисом в W_{J_0} являются функции $\{\psi_{J_0,k}(t)\}$ и т.д.

Тогда любую функцию $x(t)$ из L_2 можно представить в виде [7]

$$x(t)=\sum_k c_{J_0}(k)\tilde{\varphi}_{J_0,k}(t)+\sum_k\sum_{j=J_0}^{\infty}d_j(k)\tilde{\psi}_{j,k}(t), \tag{22}$$

где c_{J_0} и d_j являются коэффициентами разложения в соответствующих базисах.

Определим эти коэффициенты. После замены переменных $\mathrm{n}=2\mathrm{k}+\mathrm{r}$ в (19) и (21) получим:

$$\varphi(2^j t-k)=\sum_n \zeta_{n-2k}\sqrt{2}\,u(2^{j+1}t-n) \qquad (23а)$$

$$\tilde{\varphi}(2^j t-k)=\sum_n \hat{\zeta}_{n-2k}\sqrt{2}\,s(2^{j+1}t-n) \qquad (23б)$$

$$\psi(2^j t-k)=\sum_n \eta_{n-2k}\sqrt{2}\,u(2^{j+1}t-n) \qquad (24а)$$

$$\tilde{\psi}(2^j t-k)=\sum_n \tilde{\eta}_{n-2k}\sqrt{2}\,s(2^{j+1}t-n) \qquad (24б)$$

Для коэффициентов $c_{J_0}(k)$ с учетом выражений (5) и (23) будем иметь

$$c_{J_0}(k)=\left\langle x(t),\varphi_{J_0,k}(t)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,2^{J_0/2}\,\varphi(2^{J_0}t-k)\,dt= \\ =\sum_n \varsigma_{n-2k}X_{J_0+1}(n) \qquad (25)$$

Для коэффициентов вейвлет получим аналогично:

$$d_j(k)=\left\langle x(t),\psi_{j,k}(t)\right\rangle=\sum_n \eta_{n-2k}X_{j+1}(n) \qquad (26)$$

где $X(n)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,u(t-n)\,dt$ представляет собой функцию взаимной корреляции между обрабатываемым сигналом $x(t)$ и опорной функцией оптимального приемника $u(t)$ в дискретные моменты времени.

Из последних двух формул, кроме того, следует, что коэффициенты разложения по масштабным функциям $c_{J_0}(k)$ и коэффициенты вейвлет $d_j(k)$ могут быть получены как взвешенная сумма выхода согласованного фильтра с переходной функцией $h_0(t)=u(-t)$, взятого в дискретные моменты времени $t=n$. Действительно

$$X(t)\big|_{t=n}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_0(t-\tau)\,d\tau\,\big|_{t=n}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(\tau-n)\,d\tau=X(n).$$

Изменяя масштаб можно получить все значения $X_j(n)$.

Условие вложенности подпространств порождает достаточно простой алгоритм вейвлет-анализа, суть которого заключается в вычислении коэффициентов $c_{J_0}(k)$ и $d_j(k)$ сначала с самым высоким разрешением, а затем – с понижающимся в 2, 4 и т.д. раз. Математически он вытекает из соотношений (1) и (3), а именно [7]:

$$c_{J_0-1}(k)=\sum_n h(n-2k)\,c_{J_0}(n) \qquad (27а)$$

и

$$d_{J_0-1}(k)=\sum g(n-2k)\,d_{J_0}(n) \qquad (27б)$$

В формулах (27) коэффициенты c_{J_0}, d_{J_0} – результат анализа на "тонкой" шкале, т.е. анализ в целом ведется от “более тонкого к более грубому”. Это означает, что анализ, в принципе, может начинаться с временных отсчетов, которые можно считать результатом наиболее "тонкого" представления сигнала.

Трехуровневая схема вейвлет – анализа с использованием согласованного фильтра на первой стадии совместно с традиционной схемой на последующих этапах показана на рис 4. Анализ ведется, начиная с самого широкополосного фильтра – фильтра нижних частот, которым является согласованный фильтр. При этом оптимальным образом выделяются из шума наиболее тонкие детали сигнала, из которых затем с помощью фильтров $\eta(-n)$ и $\varsigma(-n)$ выделяется высокочастотная часть спектра d_{J_0-2} (подпространство W_2) и низкочастотная часть спектра $c_{J_0-2}\,(V_2)$. Эта часть спектра затем снова разбивается на две: $d_{J_0-1}\,(W_1)$ и $c_{J_0-1}\,(V_2)$ и т. д. Таким образом, на выходе трехуровневой схемы анализа будем иметь коэффициенты разложения сигнала по масштабным функциям $c_{J_0}\,(V_0)$ и высокочастотное дополнение $d_{J_0}\,(W_0)$

6.МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для проверки приведенной выше методики синтеза вейвлет выбрана гауссова модель $s(t) = exp\{-t^2 / \mu_0{}^2\}$, случай самодуального, когда $s(t) \equiv u(t)$. В таблице приведены коэффициенты ортогонализации **b** при $\mu_0 = 8$.

Табл.

$\sigma_0 = 5.05766047, m = 20.$

m	m	m-1	m-2	m-3	m-4	m-5
b	0	-0.95951739	-0.24760725	-0.02138981	-0.00065790	-0.0000073

m	m-6	m-7….1
b	0.00000003	0.0

Используя эти коэффициенты по формуле (14) получены коэффициенты **β**, по формулам (15) и (2) – коэффициенты **h,** и по формулам (18) **–** коэффициенты **ζ.** Наконец, по формулам (20) определяются коэффициенты **η,** которые позволяют построить функции вейвлет. По формулам (19) и (21) построены графики масштабных функций и вейвлет, которые приведены на рис.5 и 6. На рис. 7 показаны Фурье – преобразования масштабной функции и вейвлет при трех значениях масштаба.

Из рис.7 хорошо видно, что вейвлет – анализ представляет собой полосовую фильтрацию с помощью набора фильтров, с расширяющейся полосой.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, благодаря гибкости преобразований вейвлет, обработку сигналов с помощью этих функций, с целью максимального подавления шума и повышения достоверности измерений, можно приспособить (адаптировать) к условиям эксперимента, а именно использовать априорную информацию о шумах и форме сигнала. Это позволяет совместить широко используемую процедуру согласованной фильтрации и вейвлет – анализа при обработке сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьева . Н.М., Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения//УФН-1996.-Том 166 №11-с.1145-1170.

2. Barclay V.J., Bonner R.F.and .Hamilton I.P, Application of Wavelet Transforms to Experimental Spectra: Smoothing, Denoising and Data Set Compression//Anal.Chem.1997.-V.69,No.1,-PP.78-90.

3. Norgun Erdol and Filiz Basbug, Use of the wavelet transform in optimal receiver design// Applied Optics,-1994.-V.33, N23,-PP.5303 – 5307.

4. Русинов Л.А.,.Новиков Л.В. Спектральный подход к первичной обработке сигналов. Изд. Ленинградского университета, 1984, Ленинград, 156 с.

5. Mallat S.G., Multiresolution Approximations and Wavelet of orthonormal Bases of $L^2(R)$//Transactions of the American Mathematical Society,-1989.-Vo.315, N1,-PP.69-87.

6. Cohen A., Doubechies I. and .Feanveau J.-C, Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets//Communications on Pure and Applied Mathematics,-1992-Vol.XLV,-PP.485-560.

7. Burrus C.Sidney, Ramesh A. Gopinath and Haitao Guo. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. Prentice Hall, New Jersey, 1998, 268.p.

8. Vetterli Martin, Kovacevic Jelena. Wavelets and Subband Coding. Prentice Hall, New Jersey, 1995, 430 p.

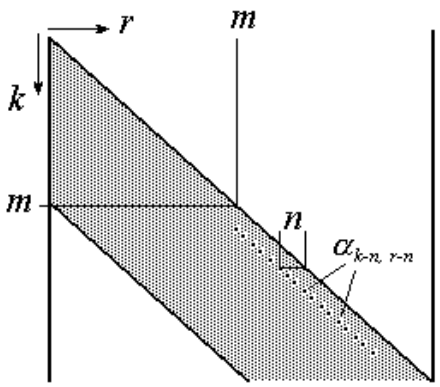

Рис.1.
Вид матрицы α *(k>m, r<n)*

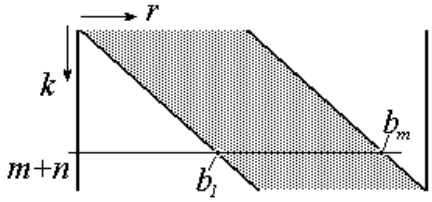

Рис.2.
Матрица α *с элементами* $\alpha_{n+m,\ n+r-1}$
(r=1, 2, …, m).

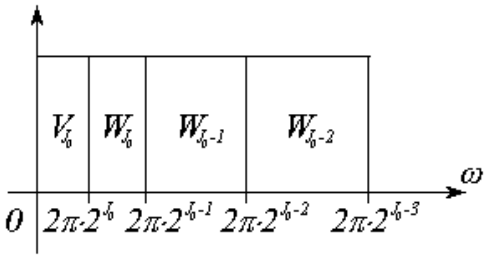

Рис.3.
Разбиение частотного диапазона на полосы при вейвлет-анализе.

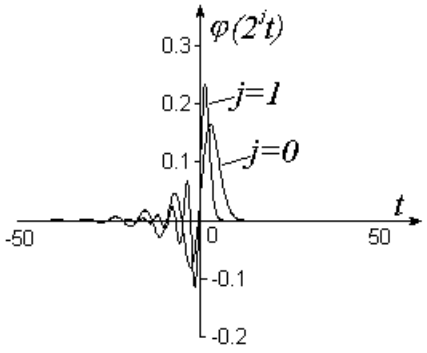

Рис.5.
Масштабные функции при (j=0,1; k=0).

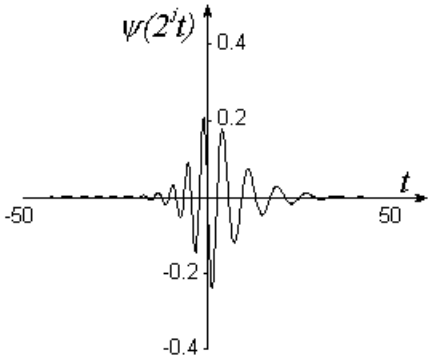

Рис.6.
Материнский вейвлет (j=0; k=0).

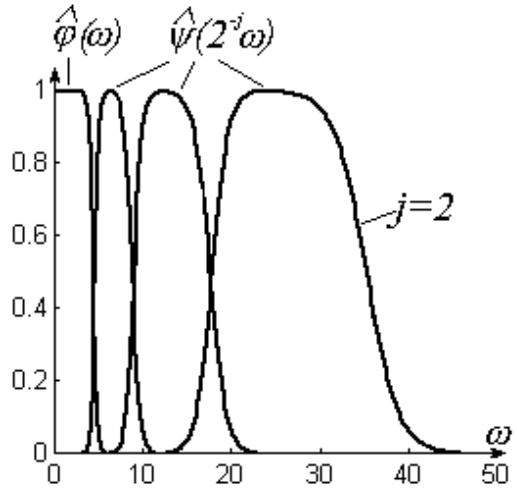

Рис.7.
Преобразование Фурье масштабной функции $\varphi(t)$ *и вейвлет* $\psi(2^{-j}t)$ *(j=0, 1, 2).*

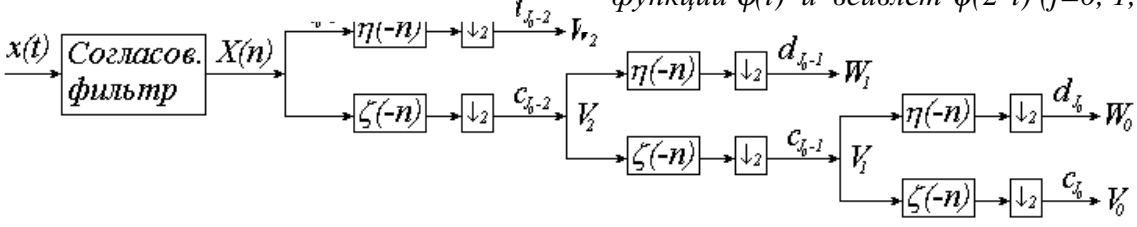

Рис.4.
Трехуровневая схема вейвлет-анализа (η(-n) – полосовой фильтр, ζ(-n) – фильтр нижних частот, ↓2 понижение частоты отсчетов в два раза).