УДК 517.5

# Ортогональные полиномиальные базисы Шаудера в $C[-1,1]$ с оптимальным ростом степеней

М.А. Скопина[1]

В 1961 г. П. Л. Ульянов [1] поставил задачу: какой можно сделать минимальный рост степеней многочленов, образующих базис (или ортогональный базис) Шаудера в пространстве $C[a,b]$? Исследования многих авторов посвящены этой и близким к ней проблемам. Подробное изложение истории вопроса приведено, например, в [2], мы отметим лишь ее ключевые моменты. В 1914 г. Г. Фабер [3] доказал, что не существует последовательности алгебраических многочленов $P_n$ степени $n$, образующих базис Шаудера в $C[a,b]$, В [4] Ал. А. Привалов усилил этот результат, показав, что если $P_n$ образуют базис Шаудера в $C[a,b]$, то существует такое $\varepsilon>0$, что степень $P_n$ не меньше $n(1+\varepsilon)$ для $n\ge n_0$. А в [5] он установил окончательность этой оценки, построив пример полиномиального базиса Шаудера, степени которого растут не быстрее, чем $n(1+\varepsilon)$. Однако этот базис не был ортогональным. Параллельно рассматривалась аналогичная задача для тригонометрических полиномов. Ее удалось решить благодаря использованию всплесков. Д. Оффин, К. Осколков [6] заметили, что незначительная модификация всплесков Мейера дает ортогональный базис Шаудера, в котором степень полиномов лишь в два раза превышает минимальную. Заменив обычное всплеск-разложение на пакет всплесков, Р. А. Лоренц, А. А. Саакян [7] окончательно решили задачу для тригонометрических

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 97-01-00443

полиномов. Перенести этот результат на отрезок с помощью стандартного метода индуцированных функций не удается. В работе Т. Килгоре, Я. Престина, К. Селиж [8] задача решена для алгебраических многочленов, ортогональных с весом Чебышёва первого рода. Для многочленов, ортогональных без веса, до сих пор вопрос оставался открытым. Ответу на него посвящена настоящая работа. Идея построения базиса заимствована в [7]. Реализацию этой идеи осложняли следующие обстоятельства. Определение базисов всплесков (пакетов всплесков) связано с конструкцией кратномасштабного анализа, состоящего из пространств инвариантных относительно сдвига. При обычном понимании оператора сдвига его нельзя рассматривать на пространствах функций, заданных на отрезке, т.к. сдвиг выводит за пределы пространства. Мы вводим обобщенные операторы сдвига так, что сохраняются все необходимые свойства сдвига, в частности, сдвиг алгебраического многочлена есть многочлен той же степени. Кроме того мы используем подход к периодическому кратномасштабному анализу, данный автором в [9], вместо стандартного (периодизации кратномасштабного анализа в $L_2(\mathbb{R})$). При таком подходе понятия кратномасштабного анализа и всплесков естественным образом распространяются на произвольное гильбертово пространство.

## 1. Формулировка основного результата.

**Теорема 1** *Для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует последовательность алгебраических многочленов $T_n$ степени не выше $n(1+\varepsilon_0)$, попарно ортогональных на отрезке $[-1,1]$ и образующих базис Шаудера в пространстве $C[-1,1]$.*

## 2. Кратномасштабный анализ в гильбертовом пространстве.

Пусть $H$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f,g\rangle$, $f,g\in H$, $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $H$. Если $f\in H$, то $f=\sum_k \widehat{f}(k)X_k$, где $\widehat{f}(k)=\langle f,X_k\rangle$ суть коэффициенты Фурье элемента $f$. Для каждого неотрицательного целого $j$ определим оператор $S_j$:

$$S_j f=\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i 2^{-j}k}\widehat{f}(k)X_k.$$

Ясно, что $S_j$ – мультипликаторы, действующие из $H$ в $H$ , и $\|S_jf\|=\|f\|$ для любого $f\in H$. В случае, когда $H=L_2(-\pi,\pi)$, $X_n(t)=e^{int}$, $S_j$ являются операторами сдвига (на $2^{-j+1}\pi$). И в общем случае их также естественно называть операторами сдвига, поскольку сохраняется основное свойство: последовательное применение $S_{j_1}$, $S_{j_2}$ дает "сдвиг" на $2\pi(2^{-j_1}+2^{-j_2})$.

**Теорема 2** *Пусть $G_j\in H$, $j\in\mathbb{Z}_+$, $V_j=\operatorname{span}\{S_j^nG_j, n=0,\dots,2^j-1\}$. Если коэффициенты Фурье $G_j$ удовлетворяют условиям:*

**G1.** *$\widehat{G}_0(k)=0$ для любого $k\neq 0$;*

**G2.** *для любого $j\in\mathbb{Z}_+$ и любого $k=0,\dots,2^j-1$ существует такое $m\in\mathbb{Z}$, что $\widehat{G}_j(2^jm+k)\neq 0$;*

**G3.** *для любого $k\in\mathbb{Z}$ существует такое $j\in\mathbb{Z}_+$, что $\widehat{G}_j(k)\neq 0$;*

**G4.** *для любого $j=1,2,\dots$ и любого $k\in\mathbb{Z}$ существует такое комплексное число $\delta_k^j$, что $\widehat{G}_{j-1}(2^jm+k)=\delta_k^j\widehat{G}_j(2^jm+k)$ для всех $m\in\mathbb{Z}$,*

*то*

*1. $\{S_j^nG_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ – базис в $V_j$, этот базис является ортонормированным тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\widehat{G}_j(2^jm+k)|^2=2^{-j} \tag{1}$$

*для всех $k\in\mathbb{Z}$.*

*2.* $V_j \subset V_{j+1}$ *для любого* $j \in \mathbb{Z}_+$.

*3.* $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} V_j$ *плотно в* $H$.

Семейство подпространств $V_j$, удовлетворяющих условиям 1-3, назовем *кратномасштабным анализом в* $H$, а последовательность элементов $G_j$ – *масштабирующей последовательностью.*

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ и $n = 0, \ldots, 2^j - 1$ определим оператор $\omega_n^j$,:

$$\omega_n^j f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j m + n) X_{2^j m + n}.$$

Ясно, что

$$S_j^n f = \sum_{k=0}^{2^j - 1} e^{2\pi i 2^{-j} nk} \omega_k^j f.$$

Поскольку $\langle \omega_k^j f, \omega_\ell^j f \rangle = 0$ при $k \neq \ell$, из этого равенства и унитарности матрицы $\{2^{-j/2} e^{2\pi i 2^{-j} nk}\}_{k,n=0}^{2^j-1}$ вытекает следующее утверждение.

**Лемма 3** *Пусть* $f \in H$, *тогда для любого* $j = 0, 1, \ldots$

*1.* $\operatorname{span}\{S_j^n f, n = 0, \ldots, 2^j - 1\} = \operatorname{span}\{\omega_n^j f, n = 0, \ldots, 2^j - 1\}$;

*2. система* $\{S_j^n f\}_{n=0}^{2^j-1}$ *ортогональна тогда и только тогда, когда* $\|\omega_n^j f\|$ *не зависит от* $n$, *при* $\|\omega_n^j f\| = 2^{-j/2}$ *она является ортонормированной.*

`Доказательство теоремы 2.` Утверждение 1 следует из леммы 3. Кроме того, по лемме 3, $\{\omega_n^j G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ – базис в $V_j$. Поэтому утверждение 2 следует из равенства

$$\omega_k^j G_j = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(2^{j+1}\ell + k) X_{2^{j+1}\ell + k} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(2^{j+1}\ell + 2^j + k) X_{2^{j+1}\ell + 2^j + k} =$$

$$\delta_k^{j+1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell + k) X_{2^{j+1}\ell + k} + \delta_{2^j+k}^{j+1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(2^{j+1}\ell + 2^j + k) X_{2^{j+1}\ell + 2^j + k} =$$

$$\delta_k^{j+1} \omega_k^{j+1} G_{j+1} + \delta_{2^j+k}^{j+1} \omega_{2^j+k}^{j+1} G_{j+1}.$$

Для доказательства утверждения 3 достаточно проверить, что $X_r \in \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j}$ для всех $r \in \mathbb{Z}$. Положим

$$v_n^0 = G_0, \qquad v_n^j = \begin{cases} \omega_n^j G_j, & \text{если} \quad \delta_n^j = 0, \\ \omega_n^j v_n^{j-1}, & \text{если} \quad \delta_n^j \neq 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

В силу свойств **G3, G4** существует такое $j_0$, что $\widehat{v}_r^j(r) = \widehat{v}_r^{j_0}(r) \neq 0$ для всех $j \geq j_0$. Можно считать $r < 2^{j_0} - 1$. Тогда для $j \geq j_0$

$$\widehat{v}_r^j(r) X_r - v_r^j = \widehat{v}_r^j(r) X_r - v_r^j - s_{2^{j-1}}(\widehat{v}_r^j(r) X_r - v_r^j),$$

где $s_N(f)$ – $N$- ая частичная сумма Фурье элемента $f$. С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$\widehat{v}_r^j(r) X_r - v_r^j = 2^{j_0 - j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j} n r} S_j^n (\widehat{v}_r^{j_0}(r) X_r - v_r^{j_0}).$$

Сопоставляя эти соотношения, имеем

$$\|\widehat{v}_r^j(r) X_r - v_r^j\| \leq 2^{j_0 - j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} \|\widehat{v}_r^{j_0}(r) X_r - v_r^{j_0} - s_{2^{j-1}}(\widehat{v}_r^{j_0}(r) X_r - v_r^{j_0})\|.$$

Осталось заметить, что правая часть этого соотношения стремится к нулю при $j \to \infty$. $\diamond$

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ определим элемент $H_j$, задав его коэффициенты Фурье:

$$\widehat{H}_j(r) = e^{\pi i 2^{-j} r} \overline{\delta_{2^j + r}^{j+1}} \widehat{G}_{j+1}(r),$$

и положим

$$W_j = \operatorname{span}\{S_j^n H_j, n = 0, \ldots, 2^j - 1\}.$$

Назовем $H_j$ и $W_j$ соответственно *всплеском* и *пространством всплесков*.

**Теорема 4** *Если в условиях теоремы 2 выполнено (1), то*

*1.* $\{S_j^n H_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ *– ортонормированный базис в* $W_j$.

*2.* $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$.

`Доказательство`. По определению функций $H_j$

$$\langle S_j^n H_j, S_j^m H_j\rangle = \sum_{r\in\mathbb{Z}} |\widehat{G}_{j+1}(r)|^2 |\delta_{2^j+r}^{j+1}|^2 e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)r}.$$

Отсюда, учитывая $2^{j+1}$-периодичность последовательности $\delta_k^{j+1}$ и (1), получаем

$$\langle S_j^n H_j, S_j^m H_j\rangle = \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} |\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2 e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell+k)|^2 =$$

$$2^{-j-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(|\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2 + |\delta_k^{j+1}|^2) e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k}.$$

С другой стороны, из свойств **G4** и (1) следует

$$\langle S_j^n G_j, S_j^m G_j\rangle = \sum_{r\in\mathbb{Z}} |\widehat{G}_j(r)|^2 e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)r} =$$

$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}-1}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\delta_k^{j+1}\widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell+k)|^2 + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\delta_{2^j+k}^{j+1}\widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell+2^j+k)|^2\right) e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k} =$$

$$2^{-j-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(|\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2 + |\delta_k^{j+1}|^2) e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k}.$$

Отсюда и из ортонормированности системы $\{S_j^n G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ следует утверждение 1.

Ввиду $2^{j+1}$-периодичности последовательности $\delta_k^{j+1}$ имеем

$$\omega_k^j H_j = e^{\pi i 2^{-j}k}\left(\overline{\delta_{2^j+k}^{j+1}}\omega_k^{j+1}G_{j+1} - \overline{\delta_k^{j+1}}\omega_{2^j+k}^{j+1}G_{j+1}\right) \tag{2}$$

Отсюда и из леммы 3 следует $W_j \subset V_{j+1}$. Кроме того, по свойству **G4**

$$\omega_k^j G_j = \delta_k^{j+1}\omega_k^{j+1}G_{j+1} + \delta_{2^j+k}^{j+1}\omega_{2^j+k}^{j+1}G_{j+1}.$$

Это равенство и (2) составляют линейную систему относительно неизвестных $\omega_k^{j+1}G_{j+1}$, $\omega_{2^j+k}^{j+1}G_{j+1}$. Определитель системы отличен от нуля в силу свойства **G2**. Отсюда и из леммы 3 следует утверждение 2. $\diamond$

## 3. Построение базиса.

Пусть $H = L_2[-1,1]$, $P_n$, $n = 0,1,\ldots,$ - ортонормированные многочлены Лежандра. Положим $X_0 = P_0$, $X_n = P_{2n} + iP_{2n-1}$, $X_{-n} = \overline{X_n}$ для $n = 1,2,\ldots$. Ясно, что $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис в $H$. Будем использовать символ $\deg T$ для обозначения степени алгебраического многочлена $T$, рассматриваемого как полином по системе $X_n$, т.е. $\deg T = n$ для многочленов степени $2n$ и $2n-1$.

Рассмотрим функцию $\varphi$ с преобразованием Фурье $\widetilde{\varphi}$, обладающим свойствами: $\operatorname{supp}\widetilde{\varphi} \subset [-\frac{1}{2}(1+\varepsilon), \frac{1}{2}(1+\varepsilon)]$, $\widetilde{\varphi} \equiv 1$ на $[-\frac{1}{2}(1-\varepsilon), \frac{1}{2}(1-\varepsilon)]$, $0 < \varepsilon \le 1/6$ $\widetilde{\varphi}^2(x) + \widetilde{\varphi}^2(x+1) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Такая функция $\varphi$ является масштабирующей (см, например, [10], гл. 5) для обобщенных всплесков Мейера, рассмотренных в [6]. Масштабирующее уравнение для $\varphi$ имеет вид: $\widetilde{\varphi}(2x) = m_0(x)\widetilde{\varphi}(x)$, где $m_0$ – 1-периодическая функция, $m_0(x) = \widetilde{\varphi}(2x)$ на $[-1/2, 1/2]$. Положим $G_j = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{G}_j(k) X_k$, где $\widehat{G}_j(k) = 2^{-j/2}\widetilde{\varphi}(2^{-j}k)$. Ввиду финитности $\varphi$ функции $G_j$ суть полиномы, $\deg G_j \le 2^{j-1}(1+\varepsilon)$. Нетрудно проверить, что последовательность $G_j$ является масштабирующей, т.е. выполнены условия **G1-G4** теоремы 2 при $\delta_r^j = 2^{-1/2} m_0(2^{-j}r)$. Таким образом, построен кратномасштабный анализ в $L_2[-1,1]$ и определены соответствующие ему последовательность всплесков $H_j$ и пространства всплесков $W_j$. Поскольку условие (1), очевидно, выполнено, по теоремам 2, 4 базисы сдвигов $\{S_j^n G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$, $\{S_j^n H_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ являются ортонормированными. Введем в рассмотрение еще последовательность $\lambda_r^j = 2^{-1/2} e^{2\pi i 2^{-j} r} m_0(2^{-j}r + \frac{1}{2})$ и отметим следующие очевидные свойства чисел $\delta_r^j$, $\lambda_r^j$:

$$|\delta_r^j|^2 + |\lambda_r^j|^2 = |\delta_r^j|^2 + |\delta_{r+2^{j-1}}^j|^2 = |\lambda_r^j|^2 + |\lambda_{r+2^{j-1}}^j|^2 = 1, \tag{3}$$

$$\delta_r^j \overline{\lambda_r^j} + \delta_{r+2^{j-1}}^j \overline{\lambda_{r+2^{j-1}}^j} = 0. \tag{4}$$

Пусть $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначим через $\Delta_k$ и $\Lambda_k$ мультипликаторы, заданные на $H$ и определяемые равенствами

$$\widehat{\Delta_k f}(r) = \delta_r^k \widehat{f}(r), \quad \widehat{\Lambda_k f}(r) = \lambda_r^k \widehat{f}(r).$$

Зафиксируем натуральное $s$. Для целого $j \geq s$ и $\nu = (\nu_{j-s+1}, \ldots, \nu_j)$, где $\nu_k$ принимает значения 0 и 1, положим

$$H_j^\nu = H_j^{s,\nu} = \prod_{k=j-s+1}^{j} \Delta_k^{\nu_k} \Lambda_k^{1-\nu_k} H_j, \quad W_j^\nu = \mathrm{span}\{S_{j-s}^n H_j^\nu, n = 0, \ldots, 2^{j-s} - 1\}.$$

Поскольку обе последовательности $\{\delta_r^j\}$, $\{\lambda_r^j\}$ $2^j$-периодичны, то

$$\omega_r^j H_j^\nu = \prod_{k=j-s+1}^{j} (\delta_r^k)^{\nu_k} (\lambda_r^k)^{1-\nu_k} \omega_r^j H_j. \tag{5}$$

Отсюда и из леммы 3 следует $W_j^\nu \subset W_j$. Теперь покажем, что $W_j^\nu \perp W_j^{\nu'}$ при $\nu \neq \nu'$, и при каждом $\nu$ система функций $\{S_{j-s}^n H_j^\nu\}_{n=0}^{2^j-1}$ является ортонормированным базисом пространства $W_j^\nu$. В силу леммы 3 для этого достаточно установить, что

$$\langle \omega_r^{j-s} H_j^\nu, \omega_r^{j-s} H_j^{\nu'} \rangle = 0 \tag{6}$$

при $\nu \neq \nu'$ и

$$\|\omega_r^{j-s} H_j^\nu\|^2 = 2^{-j+s}. \tag{7}$$

Для доказательства этих равенств проведем индукцию по $s$. Пусть сначала $s = 1$. Применяя 5, имеем

$$\begin{gathered}\langle \omega_r^{j-1} H_j^\nu, \omega_r^{j-1} H_j^{\nu'} \rangle = \langle \omega_r^j H_j^\nu, \omega_r^j H_j^{\nu'} \rangle + \langle \omega_{r+2^{j-1}}^j H_j^\nu, \omega_{r+2^{j-1}}^j H_j^{\nu'} \rangle = \\ (\delta_r^j)^{\nu_j} (\overline{\delta_r^j})^{\nu_j'} (\lambda_r^j)^{1-\nu_j} (\overline{\lambda_r^j})^{1-\nu_j'} \|\omega_r^j H_j\|^2 + \\ (\delta_{r+2^{j-1}}^j)^{\nu_j} (\overline{\delta_{r+2^{j-1}}^j})^{\nu_j'} (\lambda_{r+2^{j-1}}^j)^{1-\nu_j} (\overline{\lambda_{r+2^{j-1}}^j})^{1-\nu_j'} \|\omega_{r+2^{j-1}}^j H_j\|^2\end{gathered}$$

Отсюда, учитывая, что $\|\omega_k^j H_j\|^2 = 2^{-j}$ и применяя равенства (3), (4), получаем (6), (7) для $s = 1$. Теперь предположим, что равенства (6), (7) верны для всех $j < j_0$. Пусть $\nu = (\nu_{j-s_0+1}, \dots, \nu_j)$, $\nu' = (\nu'_{j-s_0+1}, \dots, \nu'_j)$, положим $\mu = (\nu_{j-s_0+2}, \dots, \nu_j)$, $\mu' = (\nu'_{j-s_0+2}, \dots, \nu'_j)$ $\kappa = \nu_{j-s_0+1}$, $\kappa' = \nu'_{j-s_0+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle \omega_r^{j-s_0} H_j^{\nu}, \omega_r^{j-s_0} H_j^{\nu'} \rangle = \langle \omega_r^{j-s_0+1} H_j^{\nu}, \omega_r^{j-s_0+1} H_j^{\nu'} \rangle + \langle \omega_{r+2^{j-1}}^{j-s_0+1} H_j^{\nu}, \omega_{r+2^{j-1}}^{j-s_0+1} H_j^{\nu'} \rangle \ &= \\ (\delta_r^{j-s_0+1})^{\kappa} (\overline{\delta_r^{j-s_0+1}})^{\kappa'} (\lambda_r^{j-s_0+1})^{1-\kappa} (\overline{\lambda_r^{j-s_0+1}})^{1-\kappa'} \langle \omega_r^{j-s_0+1} H_j^{\mu}, \omega_r^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle \ &+ \\ (\delta_{r+2^{j-1}}^{j})^{\kappa} (\overline{\delta_{r+2^{j-1}}^{j}})^{\kappa'} (\lambda_{r+2^{j-1}}^{j-s_0+1})^{1-\kappa} (\overline{\lambda_{r+2^{j-1}}^{j-s_0+1}})^{1-\kappa'} \langle \omega_{r+2^{j-1}}^{j-s_0+1} H_j^{\mu}, \omega_{r+2^{j-1}}^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle \ &.\end{aligned}$$

По индукционному предположению $\langle \omega_k^{j-s_0+1} H_j^{\mu}, \omega_k^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle = 0$ при $\mu \neq \mu'$ и $\langle \omega_k^{j-s_0+1} H_j^{\mu}, \omega_k^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle = 2^{j-s_0+1}$ при $\mu = \mu'$. Отсюда, применяя равенства (3), (4), получаем (6), (7) для $s = s_0$.

Таким образом, доказано, что

$$W_j = \bigoplus_{\nu} W_j^{\nu}, \tag{8}$$

и система функций $\{S_{j-s}^n H_j^{\nu}\}_{n,\nu}$ является ортонормированным базисом пространства $W_j$. Эта система называется *пакетом всплесков*.

Пусть $T$ – алгебраический многочлен, $\deg T \leq m2^{k-1}(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \leq 1/2m$. Поскольку на множестве $\{[\ell + 1/2 - \frac{1}{4}(1-\varepsilon), \ell + 1/2 + \frac{1}{4}(1-\varepsilon)], \ell \in \mathbb{Z}\}$ функция $m_0$ тождественно равна нулю, $\deg \Delta_k T \leq (m2^{k-1} - 2^{k-2})(1+\varepsilon)$ при нечетных $m$, и $\deg \Lambda_k T \leq (m2^{k-1} - 2^{k-2})(1+\varepsilon)$ при четных $m$. Отсюда, принимая во внимание что $\deg H_j \leq 2^j(1+\varepsilon)$ и считая $\varepsilon \leq 2^{-s-1}$, нетрудно понять, что функции $H_j^{s,\nu}$ можно перенумеровать одномерным индексом $\ell = 1, \dots, 2^s$ таким образом, чтобы

$$\deg H_j^{s,\ell} \leq (2^{j-1} + \ell 2^{j-s-1})(1+\varepsilon). \tag{9}$$

Положим

$$\begin{aligned} &T_1 = G_0, \\ &T_{2^j+n+1} = H_j^{j,n+1} && \text{для } j < s, n = 0, \dots, 2^j - 1, \\ &T_{2^j+m2^{j-s}+r+1} = S_{j-s}^r H_j^{s,m+1} && \text{для } j \geq s, m = 0, \dots, 2^s - 1,\ r = 0, \dots, 2^{j-s} - 1. \end{aligned}$$

Неравенство (9), очевидно, влечет $\deg T_N \le \frac{1}{2}N(1+\varepsilon)$ при $N \le 2^s$. Представляя произвольное натуральное $N > 2^s$ в виде $N = 2^j + m2^{j-s} + r + 1$, где $j \ge s$, $m < 2^s$, $r < 2^{j-s}$, из (9) получаем

$$\deg T_N \le (2^{j-1} + (m+1)2^{j-s-1})(1+\varepsilon) \le \frac{1}{2}(2^j + m2^{j-s} + 2^{j-s})(1+\varepsilon) \le \frac{1}{2}N(1+2^{-s})(1+\varepsilon).$$

По любому заданному $\varepsilon_0 > 0$ можно подобрать столь большое натуральное $s$ и столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы для всех $N > 2^s$ выполнялось неравенство

$$\deg T_N \le \frac{1}{2}N(1+\varepsilon_0).$$

Далее нам будут полезны следующие представления функций $H_j$, $H_j^{s,\nu}$ ($\nu$ – бинарный вектор):

$$H_j = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widetilde{\psi}(2^{-j}\ell)X_\ell, \quad H_j^{s,\nu} = 2^{-j/2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widetilde{\psi^\nu}(2^{-j}\ell)X_\ell, \tag{10}$$

где $\psi$, $\psi^\nu$ – функции, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}(x) &= e^{\pi i x} m_0\left(\frac{x+1}{2}\right)\widetilde{\varphi}\left(\frac{x}{2}\right), \\ \widetilde{\psi}^\nu(x) &= \prod_{k=j-s+1}^{j} (m_0(x))^{\nu_k}\left(e^{2\pi i x} m_0\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{1-\nu_k}\widetilde{\psi}(x). \end{aligned}$$

В соответствии с описанной выше перенумерацией функций $H_j^\nu$ в функциях $\Psi^\nu$ мы также заменим $\nu$ на одномерный индекс $\ell = 1, \ldots, 2^s$.

## 4. Вспомогательные результаты.

Нам понадобятся следующие свойства ортонормированных многочленов Лежандра $P_n$. Их можно найти, например, в монографии [11].

Формула Дирихле-Мелера:

$$P_n(\cos\pi\theta) = \sqrt{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\theta \cdot\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\tau\, d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi\theta}}, \quad \theta\in(0,1). \tag{11}$$

Уравнение Вольтерра второго рода:

$$(\sin \pi\theta)^{1/2} P_n(\cos \pi\theta) = \lambda_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$\frac{\pi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\theta}^{1/2} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(t-\theta)}{4\sin^2 \pi t} (\sin \pi t)^{1/2} P_n(\cos \pi t)\, dt, \tag{12}$$

где $\theta \in (0,1)$,

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{13}$$

При тех же значениях $\theta$ и $\lambda_n$ справедлива асимптотическая формула

$$(\sin \pi\theta)^{1/2} P_n(\cos \pi\theta) = \lambda_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n \sin \pi\theta}\right). \tag{14}$$

Метод Лиувилля-Стеклова (см. [11], §8.61) дает следующее уточнение этой формулы

$$(\sin \pi\theta)^{1/2} P_n(\cos \pi\theta) = \lambda_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$\frac{\lambda_n}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg} \pi\theta + O\left(\frac{1}{n^2 \sin^2 \pi\theta}\right). \tag{15}$$

Для всех $x \in [-1,1]$ имеет место неравенство

$$|P_n(x)| \le P_n(1) = n + \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Будем обозначать через $C$ абсолютные постоянные, вообще говоря различные.

**Лемма 5** *Пусть $\theta \in (0,1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, тогда*

$$X_n(\cos \pi\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin \pi\theta}} [A_1(\theta)\xi_1(n) e^{2\pi i n\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n) e^{-2\pi i n\theta}] +$$

$$O\left(\frac{1}{|n|(\sin \pi\theta)^{3/2}}\right), \tag{17}$$

$$X_n(\cos \pi\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin \pi\theta}} [A_1(\theta)\xi_1(n) e^{2\pi i n\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n) e^{-2\pi i n\theta}] +$$

$$\frac{1}{n(\sin \pi\theta)^{3/2}} \left[A_3(\theta)\xi_3(n) e^{2\pi i n\theta} + A_4(\theta)\xi_4(n) e^{-2\pi i n\theta}\right] + O\left(\frac{1}{n^2(\sin \pi\theta)^{5/2}}\right), \tag{18}$$

$$X_n(\cos\pi\theta)=\int\limits_0^\theta \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\theta}}\Big[\sqrt{n}A_5(\tau)\xi_5(n)e^{2\pi in\tau}+\sqrt{n}A_6(\tau)\xi_6(n)e^{-2\pi in\tau}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}A_7(\tau)\xi_7(n)e^{2\pi in\tau}+\frac{1}{\sqrt{n}}A_8(\tau)\xi_8(n)e^{-2\pi in\tau}\Big]+O\left(\frac{1}{|n|^{3/2}}\right), \tag{19}$$

$$X_n(\cos\pi\theta)=\frac{1}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\left[A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta}+A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\int\limits_\theta^{1/2}\frac{dt}{\sin^{3/2}\pi t}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi t}}\Big[\frac{1}{\sqrt{n}}A_9(t)\xi_9(n)e^{2\pi in(\tau+t-\theta)}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}A_{10}(t)\xi_{10}(n)e^{-2\pi in(\tau+t-\theta)}+n^{-3/2}A_{11}(t)\xi_{11}(n)e^{2\pi in(\tau+t-\theta)}+$$

$$n^{-3/2}A_{12}(t)\xi_{12}(n)e^{-2\pi in(\tau+t-\theta)}+O\left(\frac{1}{|n|^{5/2}}\right)\Big], \tag{20}$$

*где* $x^a=|z|^a e^{ia\arg z}$, $0\le\arg z<2\pi$, $\xi_\ell$ *– функции, аналитические на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и такие, что* $\xi(n)=\xi(\lambda n)$ *для всех* $\lambda>0$, $|A_\ell(\theta)|\le C$.

Соотношения (17), (18), (19) следуют соответственно из (14), (15), (11). Чтобы доказать (20), следует сопоставить (12) с (11).

**Лемма 6** *Пусть* $\gamma\in C^\infty(\mathbb{R})$, $supp\,\gamma\subset[-\Delta,\Delta]$, $[-\delta,\delta]\cap supp\,\gamma=\emptyset$, *тогда*

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma(2^{-j}\ell)e^{2\pi i\ell\theta}=O\left(\frac{1}{|\sin\pi\theta|}\right), \tag{21}$$

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma(2^{-j}\ell)e^{2\pi i\ell\theta}=O\left(\frac{1}{2^j|\sin\pi\theta|^2}\right), \tag{22}$$

$$\int\limits_0^1\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma(2^{-j}\ell)e^{2\pi i\ell\theta}\right|d\theta=O(1). \tag{23}$$

`Доказательство`. Для доказательства (21) применим к левой части преобразование Абеля и воспользуемся явным представлением ядра Дирихле. Для доказательства (22) дважды применим к левой части преобразование

Абеля и воспользуемся явным представлением ядра Фейера и свойствами $\gamma$. Левая часть (23) является константой Лебега линейного метода суммирования с множителями суммируемости, определяемыми функцией $\gamma$. Хорошо известно, что в предполагаемых условиях константы Лебега равномерно ограничены. $\diamond$

**Лемма 7** *В условиях леммы 6*

$$\int_0^1 \left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell)e^{2\pi i\ell\theta}\right| \sqrt{|\sin\pi\theta|}\, d\theta = O(2^{-j/2}), \tag{24}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell)e^{2\pi i\ell\theta}\right| \frac{d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} = O(2^{j/2}). \tag{25}$$

`Доказательство`. Для доказательства (24) разобьем интеграл по схеме:

$$\int_0^1 = \int_{-1/2}^{1/2} = \int_{|\theta|\le 2^{-j}} + \sum_{s=1}^{j-1} \int_{2^{-j+s-1}\le|\theta|\le 2^{-j+s}} = \sum_{s=0}^{j-1} I_s.$$

Из (23) следует $I_0 = O(2^{-j/2})$. При $s > 0$, применяя к подинтегральному выражению (22), имеем

$$\sum_{s=1}^{j-1} I_s \le C2^{-j}\sum_{s=1}^{j-1} 2^{\frac{j-s}{2}} = O(2^{-j/2}).$$

Аналогично, используя (21) вместо (22) и очевидное соотношение $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell)\, e^{2\pi i\ell\theta} = O(2^j)$ вместо (23), получаем (25). $\diamond$

Далее будем считать, что зафиксировано некоторое число $\phi\in(0,1/2]$. Введем обозначения: $e_\tau = \{t\in\mathbb{R}:\ |\sin\pi t|\le|\sin\pi\tau|\}$ , $g_1(t) = \chi_{e_{2\phi}}(t)\cos\pi t$, где $\chi_e$ – характеристическая функция множества $e$, $g_2(t) = \cos\pi t - g_1(t)$.

**Лемма 8** *Пусть функция $\gamma$ удовлетворяет условиям леммы 6, $\tau\in\mathbb{R}$,*

$$\sigma^{\pm}_{\alpha,\nu}(\theta) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell)(2^{-j}\ell)^\alpha \xi_\nu(2^{-j}\ell)e^{2\pi i\ell(\tau\pm\theta)},$$

*где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\nu$ – функции из леммы 5. Тогда*

$$\int\limits_0^1 \left| \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i\ell\tau} X_\ell(\cos\pi\theta) \right| \, dg_1(\theta) \le$$

$$C\sqrt{\phi} \left\{ \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left( \left|\sigma^{+}_{0,1}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{0,2}(\theta)\right| \right) \, d\theta + O(1) \right\}, \qquad (26)$$

$$\int\limits_0^1 \left| \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i\ell\tau} X_\ell(\cos\pi\theta) \right| \, dg_2(\theta) \le$$

$$C \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left( \left|\sigma^{+}_{0,1}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{0,2}(\theta)\right| \right) \frac{|g_2'(\theta)| \, d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} +$$

$$C2^{-j} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left( \left|\sigma^{-}_{-1,3}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{-1,4}(\theta)\right| \right) \frac{|g_2'(\theta)| \, d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|^3}} + O(2^{-j/2}). \qquad (27)$$

Доказательство. Соотношение (26) несложно вывести из (17), если при оценке остаточного члена принять во внимание структуру носителя функции $\gamma(2^{-j}\ell)$ и учесть периодичность функций $\sigma^{\pm}_{-\eta,\kappa}(\theta)$. Для доказательства (27) разобьем интеграл в левой части по схеме:

$$\int\limits_{[0,1]\setminus e_{2\phi}} = \int\limits_{(e_{2^{-j}}\setminus e_{2\phi})\cap[0,1]} + \int\limits_{[0,1]\setminus e_{2^{-j}}} = I_1 + I_2.$$

Если $\phi \ge 2^{-j-1}$, то $I_1 = 0$. Если $\phi \le 2^{-j-1}$, то те же рассуждения, которые применялись для доказательства (26), дают

$$I_1 \le C \left\{ \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left( \left|\sigma^{+}_{0,1}(\theta)\right| + \left|\sigma^{-}_{0,2}(\theta)\right| \right) \frac{|g_2'(\theta)| \, d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}} + O(2^{-j/2}) \right\},$$

Аналогично, чтобы оценить $I_2$, применим (18). Снова учитывая структуру носителя $\gamma$ при оценке остатка, получаем (27). $\diamond$

**Лемма 9**

$$\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{2n}P_k(x)P_k(t)\right|\,dt=O(1).$$

Доказательство. Поскольку функции Лебега сумм Фейера-Лежандра равномерно ограничены (см., например, [12]), а функции Лебега сумм Фурье-Лежандра растут не быстрее, чем $\sqrt{n}$ (см., например, [13]), достаточно доказать соотношение

$$I=\frac{1}{N}\int\limits_{-1}^{1}\left|\sum_{n=0}^{N}P_{2n}(x)P_{2n}(t)\right|\,dt=O(1). \tag{28}$$

Положим $t=\cos\pi\theta$, $x=\cos\pi\phi$, $\phi,\theta\in[0,1]$. Применяя (14) к $P_{2n}(\cos\pi\theta)$ и используя (16) при оценке остаточного члена, имеем

$$I=\frac{\sqrt{2}}{N\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1}\left|\sum_{n=0}^{N}P_{2n}(\cos\pi\phi)\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\theta-\frac{\pi}{4}\right]\right|\frac{d\cos\pi\theta}{\sqrt{\sin\pi\theta}}+O(1).$$

Интеграл в правой части разобьем по схеме

$$\int\limits_{0}^{1}d\cos\pi\theta=\int\limits_{0}^{1}dg_1(\theta)+\int\limits_{0}^{1}dg_2(\theta)=I_1+I_2.$$

Поскольку $P_{2n}$ – четная функция, достаточно ограничиться рассмотрением случая $\phi\in[0,1/2]$. Для оценки $I_2$ при $\phi\neq 0$ применим к $P_{2n}(\cos\pi\phi)$ формулу Дирихле-Мелера (11). После перестановки интегралов получим

$$I_2\le\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\phi}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\phi}}\quad\cdot$$

$$\int\limits_{0}^{1}\left\{\left|\sum_{n=0}^{N}e^{2\pi in(\theta+\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right|+\left|\sum_{n=0}^{N}e^{2\pi in(\theta-\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right|+\right.$$

$$\left.\left|\sum_{n=0}^{N}e^{-2\pi in(\theta+\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right|+\left|\sum_{n=0}^{N}e^{-2\pi in(\theta-\tau)}\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right|\right\}\frac{dg_2(\theta)}{\sqrt{\sin\pi\theta}}. \tag{29}$$

Производя преобразование Абеля в каждой из сумм и используя хорошо известные свойства ядер Дирихле, устанавливаем, что эти суммы имеют порядок $O(\sqrt{N}/|\sin\pi(\theta\pm\tau)|)$. Таким образом, внутренний интеграл в (29) не превосходит суммы четырех интегралов вида

$$C\sqrt{N}\int\limits_0^1 \frac{dg_2(\theta)}{|\sin\pi(\theta\pm\tau)|\sqrt{\sin\pi\theta}}. \tag{30}$$

Поскольку $\tau\le\phi$ то $\frac{1}{\sin|\pi(\theta\pm\tau)|}\le\frac{C}{\sin\pi\theta}$ при $\theta\ge 2\phi$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dg_2(\theta)}{|\sin\pi(\theta\pm\tau)|\sqrt{\sin\pi\theta}}\le C\int\limits_0^1\frac{dg_2(\theta)}{\sqrt{\sin\pi\theta}}=O(1).$$

Сопоставляя это соотношение с (30) и (29), получаем

$$I_2=O(\sqrt{N}). \tag{31}$$

Для $\phi=0$ интеграл $I_2$ можно оценить точно так же, используя вместо формулы Дирихле-Мелера равенство (16). Теперь оценим $I_1$ в случае, когда $\phi\le 1/N$. Для $\phi\ne 0$ снова воспользуемся формулой Дирихле-Меллера:

$$I_1\le C\int\limits_0^\phi\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\phi}}\int\limits_0^1\sum_{n=0}^N\sqrt{n+\frac{1}{4}}\frac{g_1'(\theta)}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\,d\theta.$$

Учитывая, что $\frac{g_1'(\theta)}{\sqrt{\sin\pi\theta}}\le C\sqrt{\phi}\le N^{-1/2}$, получаем

$$I_1=O(N). \tag{32}$$

Аналогично (32) следует из (16) при $\phi=0$. Наконец рассмотрим случай $\phi\ge 1/N$. Сопоставляя соотношения (11) и (12), имеем

$$(\sin\pi\phi)^{1/2}P_{2n}(\cos\pi\phi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\phi-\frac{\pi}{4}\right]-$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}\int\limits_\phi^{1/2}\frac{\sin\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-\phi)}{4\sin^{3/2}\pi t}\,dt\int\limits_0^t\frac{\cos\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\theta}}\,d\tau+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\frac{g_1'(\theta)}{\sqrt{\sin \pi\theta}} \le C\sqrt{\phi}$ и $\phi^{-1} \le N$, получаем

$$I_1 \le C \int\limits_{\phi}^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} + O(1) = O\left(\sqrt{\frac{N}{\phi}} + 1\right) = O(N).$$

Эта оценка вместе с (31) и (32) с дает (28) . $\diamond$

**Лемма 10** *Пусть $\mu$ – ограниченная монотонно убывающая суммируемая на $[0, \infty)$ функция. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(|x+k|)\mu(|y+k|) \le A\mu\left(\frac{|x-y|}{4}\right),$$

*где $A$ – постоянная, зависящая только от $\mu$.*

Эта несложная лемма известна, доказательство несколько более общего утверждения приводится, например, в [14].

Пусть $\psi \in L(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, 8$. Положим

$$s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau) = s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau, \psi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i (n2^{-j} \pm \tau)\ell} (2^{-j}\ell)^{\alpha} \xi_{\nu}(2^{-j}\ell) \widetilde{\psi}(2^{-j}\ell),$$

где $\widetilde{\psi}$ –преобразование Фурье функции $\psi$, $\xi_\nu$ – функции из леммы 5.

**Лемма 11** *Пусть $\widetilde{\psi} \in C^\infty$, $supp\,\widetilde{\psi} \subset [-\Delta, \Delta]$, $[-\delta, \delta] \cap supp\,\widetilde{\psi} = \emptyset$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\tau| \le 1/4$, $|\gamma| \le 1/2$, тогда*

$$I = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^{\pm}_{n,\beta,\mu}(\theta \pm \tau)||\sin \pi\theta|^{\gamma}\, d\theta = O\left(2^{(1-\gamma)j}\right),$$

*где знаки "+" или "-" в выражениях $s^{\pm}_{n,\beta,\mu}$ и $\theta \pm \tau$ согласованы таким образом, что $\tau$ входит во все экспоненты подинтегрального выражения с одним и тем же знаком.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно ограничиться рассмотрением знаков "+" в качестве каждого из трех " $\pm$ " и только первой половины слагаемых в подинтегральной сумме. Функции $\psi_{\alpha,\nu}$, $\psi_{\beta,\mu}$, определяемые равенствами $\widetilde{\psi}_{\alpha,\nu}(u)=\widetilde{\psi}(u)\xi_\nu(u)(u)^\alpha$, $\widetilde{\psi}_{\beta,\mu}(u)=\widetilde{\psi}(u)\xi_\mu(u)(u)^\beta$, очевидно, обладает теми же свойствами, что и $\psi$ , поэтому

$$|\psi_{\alpha,\nu}(u)|,|\psi_{\beta,\mu}(u)|=O\left(\frac{1}{1+u^2}\right), \tag{33}$$

и по формуле суммирования Пуассона

$$\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}|s^+_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^+_{n,\beta,\mu}(\theta+\tau)|=$$
$$2^{2j}\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\psi_{\alpha,\nu}(2^j\tau+2^j\ell+n)\right|\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_{\beta,\mu}(2^j(\theta+\tau)+2^jk+n)\right|. \tag{34}$$

Поскольку в силу (33)

$$\sum_{\ell\neq 0}|\psi_{\alpha,\nu}(2^j\tau+2^j\ell+n)|=O(2^{-2j}),\quad \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_{\beta,\mu}(2^j(\theta+\tau)+2^jk+n)|=O(1),$$

правая часть (34) не превосходит

$$2^{2j}\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_{\alpha,\nu}(2^j\tau+n)||\psi_{\beta,\mu}(2^j(\theta+\tau)+2^jk+n)|+O(1).$$

Отсюда, из леммы 10 и (34) следует

$$\sum_{n=0}^{2^{j-1}-1}|s^+_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^+_{n,\beta,\mu}(\theta+\tau)||\sin\pi\theta|^\gamma=$$
$$O\left(1+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2^{2j}|\theta|^\gamma}{1+(2^j(\theta+k))^2}\right)=O\left(1+\frac{2^{2j}|\theta|^\gamma}{1+(2^j(\theta))^2}\right). \tag{35}$$

Разбивая интеграл $I$ по схеме

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}=\int\limits_{|\theta|\leq 2^{-j}}+\sum_{s=0}^{j-1}\int\limits_{2^{-j+s-1}\leq|\theta|\leq 2^{-j+s}},$$

и применяя (35) к подинтегральному выражению в каждом слагаемом, получаем

$$I=O\left(2^{j(1-\gamma)}+2^{j(1-\gamma)}\sum_{s=0}^{j-1}2^{-s(1-\gamma)}\right)=O\left(2^{j(1-\gamma)}\right).\quad\diamond$$

**Следствие 12** *В условиях леммы 11 выполняется соотношение*

$$\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)||s^{\pm}_{n,\beta,\mu}(\theta)|\,d\theta = O\left(2^j\right).$$

Утверждение следствия является частным случаем леммы 11, если произвести замену переменной $\theta=\theta'\pm\tau$ и принять во внимание периодичность подинтегральной функции.

**Лемма 13** *Пусть $\psi$, $H_j$ удовлетворяют условиям леммы 11, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left|S^n_jH_j(\cos\pi\theta)\right|\,dg_1(\theta)\le$$

$$C\sqrt{\phi}\left\{2^{-j/2}\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right)d\theta+O\left(2^{j/2}\right)\right\}. \quad (36)$$

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left|S^n_jH_j(\cos\pi\theta)\right|\,dg_2(\theta)\le$$

$$C2^{-j/2}\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right)\frac{|g_2'(\theta)|\,d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}}+$$

$$C2^{-3j/2}\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left(|s^{+}_{n,-1,3}(\theta)|+|s^{-}_{n,-1,4}(\theta)|\right)\frac{|g_2'(\theta)|\,d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|^3}}+O\left(1\right). \quad (37)$$

Доказательство. На основании (17),(18), принимая во внимание, что $\widetilde{\psi}(2^{-j}\ell)$ отлично от нуля лишь при $2^j\delta\le|\ell|\le2^j\Delta$, имеем

$$|S^n_jH_j(\cos\pi\theta)|\le C\left(\frac{2^{-j}}{\sin\pi\theta}\right)^{1/2}\left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right)+O\left(\frac{2^{-j/2}}{\sin^{3/2}\pi\theta}\right), \quad (38)$$

$$|S^n_jH_j(\cos\pi\theta)|\le C\left(\frac{2^{-j}}{\sin\pi\theta}\right)^{1/2}\left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right)+$$

$$C\left(\frac{2^{-j}}{\sin\pi\theta}\right)^{3/2}\left(|s^{+}_{n,-1,3}(\theta)|+|s^{-}_{n,-1,4}(\theta)|\right)+O\left(\frac{2^{-3j/2}}{\sin^{5/2}\pi\theta}\right). \quad (39)$$

Пусть $\psi_{\alpha,\nu}$ – функция, определенная в лемме 11. Из формулы суммирования Пуассона и (33) следует

$$\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|=2^j\sum_{n=0}^{2^j-1}\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\psi_{\alpha,\nu}(\pm2^j\tau+2^j\ell+n)\right|=O\left(2^j\right). \quad (40)$$

Соотношения (38) и (40) влекут (36), если принять во внимание периодичность функций $s^{\pm}_{n,\eta,\kappa}(\theta)$. Для доказательства (37) разобьем интеграл в левой части по схеме

$$\int\limits_{[0,1]\setminus e_{2\phi}}=\int\limits_{(e_{2^{-j}}\setminus e_{2\phi})\cap[0,1]}+\int\limits_{[0,1]\setminus e_{2^{-j}}}=I_1+I_2.$$

Если $|\phi|\geq 2^{-j-1}$, то $I_1=0$. Если $|\phi|\leq 2^{-j-1}$, то те же рассуждения, которые применялись для доказательства (36), дают

$$I_1\leq C2^{-j/2}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sum_{n=0}^{2^j-1}|s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(\tau)|\left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right)\frac{|g_2'(\theta)|\,d\theta}{\sqrt{|\sin\pi\theta|}}+O(1).$$

Аналогично, чтобы оценить $I_2$, применим (39) и (40). Осталось заметить, что

$$2^{-j/2}\int\limits_{[0,1]\setminus e_{2^{-j}}}\frac{dg_2(\theta)}{\sin^{5/2}\pi\theta}=O(1). \quad \diamond$$

**Лемма 14** *Пусть функции $\psi$, $H_j$ удовлетворяют условиям леммы 13, $n=0,\dots,2^j-1$, тогда*

$$\int\limits_0^1|S^n_jH_j(\cos\pi\theta)|\,d\cos\pi\theta=O\left(2^{-j/2}\right).$$

`Доказательство`. На основании (38) имеем

$$\int\limits_0^1|S^n_jH_j(\cos\pi\theta)|\,d\cos\pi\theta\leq C2^{-j/2}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(|s^{+}_{n,0,1}(\theta)|+|s^{-}_{n,0,2}(\theta)|\right)d\theta+O\left(2^{-j/2}\right).$$

Пусть $\psi_{0,\nu}$, $\nu = 1,2$ – функции, определенные в лемме 11. По формуле суммирования Пуассона

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} |s^{\pm}_{n,0,\nu}(\theta)|\, d\theta \le 2^j \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int\limits_{-1/2}^{1/2} |\psi_{0,\nu}(\pm 2^j\theta + 2^j\ell + n)|\, d\theta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_{0,\nu}(\pm\theta)|\, d\theta.$$

Осталось заметить, что интеграл в правой части этого равенства конечен в силу (33). $\diamond$

## 5. Доказательство теоремы 1.

Докажем, что система ортогональных многочленов $T_n$, построенная в разделе 3, является базисом Шаудера в пространстве $C[-1,1]$. Каждой функции $f \in C[-1,1]$ сопоставим ее ряд Фурье по системе $T_n$, через $\sigma_N(f)$ обозначим частичную сумму этого ряда порядка $N$. Если $N = 2^j + m2^{j-s} + r$, $m = 0,\dots,2^s - 1$, $r = 0,\dots,2^{j-s} - 1$, то

$$\sigma_N(f) = \sum_{n=1}^{N} \langle f, T_n\rangle T_n \;=\; \sum_{n=1}^{2^j} \langle f, T_n\rangle T_n +$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{2^{j-s}-1} \langle f, S^n_{j-s} H^k_j\rangle S^n_{j-s} H^k_j \;+\; \sum_{n=0}^{r} \langle f, S^n_{j-s} H^m_j\rangle S^n_{j-s} H^m_j.$$

Первая сумма в правой части является ортогональной проекцией функции $f$ на пространство $V_j$. Переразложенная по ортонормированному базису $S^n_j G_j$, $n = 0,\dots,2^j - 1$, она примет вид

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S^n_j G_j\rangle S^n_j G_j.$$

Пусть $|\nu| \le 2^{j-1}$, из построения функций $G_j$, $H^k_j$ следует, что $\widehat{H}^k_j(\nu) = 0$, $\widehat{G}_j(\nu) = 1$, $\widehat{G}_j(\nu + n) = 0$, поэтому

$$\sigma_N(X_\nu) \;=\; \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle X_\nu, S^n_j G_j\rangle S^n_j G_j =$$

$$2^{-j}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\widehat{G}_j(\ell)\langle X_\nu, X_\ell\rangle\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{G}_j(k)X_k\sum_{n=0}^{2^j-1}e^{2\pi i2^{-j}n(\ell-k)}.$$

Из этого равенства, ортонормированности системы $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и унитарности матрицы $\{e^{2\pi i2^{-j}nk}\}_{k,n=0}^{2^j-1}$ следует $\sigma_N(X_\nu)=X_\nu$. Таким образом, оператор $\sigma_N$ не изменяет алгебраические многочлены степени не выше $2^j$, что влечет

$$\|f-\sigma_N(f)\|\le\|\sigma_N\|_{C\to C}E_{2^j}(f),$$

где $E_m(f)$ – величина наилучшего приближения функции $f$ алгебраическими многочленами порядка $m$. Для доказательства теоремы осталось проверить ограниченность последовательности $\|\sigma_N\|_{C\to C}$. Для этого достаточно убедиться в равномерной (по $x\in[-1,1]$) ограниченности интегралов

$$\begin{aligned}J(x) &= \int_{-1}^{1}\left|\sum_{n=0}^{2^j-1}S_j^nG_j(x)S_j^nG_j(t)\right|\,dt,\\ J^m(x) &= \int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{2^{j-s}-1}\left|S_{j-s}^nH_j^m(x)S_{j-s}^nH_j^m(t)\right|\,dt.\end{aligned}$$

Зафиксируем $m$ и займемся оценкой $J^m$. Переобозначим функции $H_j^m$, $\psi^m$ через $H_j$, $\psi$ (выше эти обозначения имели другой смысл, но они уже больше не будут использоваться). Отметим, что функция $\widetilde{\psi}$ удовлетворяет условиям леммы 11. Ясно, что

$$J^m(x)\le\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{2^j-1}|S_j^nH_j(x)S_j^nH_j(t)|\,dt=I.$$

Ограничимся рассмотрением случая $x\in[0,1]$, для $x\in[-1,0]$ доказательство аналогично. Положим $x=\cos\pi\phi$, $\phi\in[0,1/2]$. Пусть сначала $\phi\in[1/4,1/2]$. Применяя к $S_j^nH_j(\cos\pi\phi)$ неравенства (38) и (40), имеем

$$I\le C2^{j/2}\max_n\int_{-1}^{1}|S_j^nH_j(t)|\,dt.$$

Отсюда и из леммы 14 следует $I = O(1)$. Теперь рассмотрим случай $\phi \in (0, 1/4]$. Произведем в интеграле $I$ замену переменной $t = \cos \pi\theta$, $\theta \in [0,1]$ и разобьем его по схеме

$$I = \int_0^1 dg_1(\theta) + \int_0^1 dg_2(\theta) = I_1 + I_2.$$

При $\phi \geq 2^{-j}$ для доказательства ограниченности $I_1$ оценим $S_j^n H_j(\cos\phi)$, используя (20) и учитывая структуру носителя функции $\widetilde{\psi}$ :

$$|S_j^n H_j(\cos\phi)| \leq C\,\frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}}\Big[|s_{n,0,1}^{+}(\phi)| + |s_{n,0,2}^{-}(\phi)|$$

$$2^{-j/2}\int_{\phi}^{1/2}\frac{dt}{t^{3/2}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi t}}\Big(|s_{n,-1/2,9}^{+}(\tau + t - \phi)| +$$

$$|s_{n,-1/2,10}^{-}(\tau + t - \phi)|\Big) + O(2^{-j/2})\Big]. \qquad (41)$$

В каждом слагаемом внеинтегральной и подинтегральной сумм присутствует выражение вида $s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(u)$. Соответствующее слагаемое в $I_1$ оценится интегралом

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(u)||S_j^n H_j(\cos\pi\theta)|\, dg_1(\theta) = I_1^{\alpha,\nu}.$$

Применяя к этому интегралу неравенство (36), а затем к каждому слагаемому правой части (36) следствие к лемме 11, устанавливаем, что $I_1^{\alpha,\nu} \leq C\,2^{j/2}\sqrt{\phi}$. Отсюда, учитывая при оценке остаточного члена лемму 14, получаем $I_1 = O\left(1 + (2^j\phi)^{-1/2}\right) = O(1)$. Для доказательства ограниченности $I_2$ при $\phi \neq 0$ оценим $S_j^n H_j(\cos\phi)$, используя (19):

$$|S_j^n H_j(\cos\phi) \leq C\int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{\cos\pi t - \cos\pi\phi}}\Big(|s_{n,1/2,5}^{+}(t)| + |s_{n,1/2,6}^{-}(t)| +$$

$$|s_{n,-1/2,7}^{+}(t)| + |s_{n,-1/2,8}^{-}(t)| + O\left(2^{-j/2}\right)\Big). \qquad (42)$$

В каждом слагаемом подинтегральной суммы присутствует выражение вида $s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(u)$. Соответствующее слагаемое в $I_2$ оценивается интегралом

$$\int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(u)||S^n_j H_j(\cos\pi\theta)|\, dg_2(\theta) = I_2^{\alpha,\nu}.$$

Применим к этому интегралу неравенство (37) и произведем в каждом слагаемом правой части (37) замену переменной $\theta' = \theta \pm t$ . Учитывая, что при $t \le \phi$

$$|g_2'(\theta)||\sin\pi\theta|^{-1\pm 1/2} \le C|\sin\pi\theta'|^{\pm 1/2}, \tag{43}$$

на основании леммы 11 при $\gamma = \pm 1/2$, получаем $I_2^{\alpha,\nu} = O(1)$. Отсюда, с учетом леммы 14 при оценке остаточного члена, устанавливаем ограниченность $I_2$. Теперь оценим $I_1$ при $\phi \in (0, 2^{-j})$. Те же рассуждения, что и для случая $\phi \ge 2^{-j}$ дают

$$\int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s^{\pm}_{n,\alpha,\nu}(u)||S^n_j H_j(\cos\pi\theta)|\, dg_1(\theta) = O\left(2^{j/2}\sqrt{\phi}\right).$$

Сопоставляя это с (42), учитывая, что $\sqrt{\phi} = O\left(2^{-j/2}\right)$, и принимая во внимание лемму 14, опять получаем $I_1 = O(1)$. При $\phi = 0$ интеграл $I_1$ отсутствует, а $I_2$ можно оценить по той же схеме, используя вместо (19) следующее равенство

$$X_\ell(1) = \sqrt{2i\ell} + \frac{1}{\sqrt{2i\ell}} + O\left(\frac{1}{|\ell|^{3/2}}\right), \tag{44}$$

где $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}$, $-\pi \le \arg z \le \pi$. Таким образом, доказана ограниченность $J^m$.

Для оценки $J$ преобразуем подинтегральное выражение.

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} \overline{S^n_j G_j(t)} S^n_j G_j(x) =$$

$$2^{-j}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\widetilde{\varphi}(2^{-j}\ell)\overline{X_\ell(t)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\varphi}(2^{-j}k)X_k(x)\sum_{n=0}^{2^j-1}e^{2\pi i2^{-j}n(k-\ell)}=$$
$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\widetilde{\varphi}(2^{-j}\ell)\overline{X_\ell(t)}\widetilde{\varphi}(2^{-j}\ell+m)X_{\ell+2^jm}(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m(t,x).$$

Поскольку $\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}\subset[-1/2-\varepsilon,1/2+\varepsilon]$, то $\omega_m(t,x)=0$ для всех $m\neq 0,1,-1$. Покажем, что

$$\int_{-1}^{1}|\omega_m(t,x)|\,dt=O(1) \tag{45}$$

для $m=0,1,-1$. Перепишем $\omega_0(t,x)$ в вещественном виде:

$$\omega_0(t,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\varphi}^2(2^{-j}n)\left(P_{2n-1}(x)P_{2n-1}(t)+P_{2n}(x)P_{2n}(t)\right).$$

После двукратного применения преобразования Абеля к этой сумме на основании леммы 9 получаем (45) для $m=0$.

Пусть $\theta$, $\phi$ имеют тот же смысл, что и выше, опять ограничимся рассмотрением случая $\phi\in[0,1/2]$. Положим $\gamma_\pm(u)=\widetilde{\varphi}(u)\widetilde{\varphi}(u\pm1)$, тогда

$$\int_0^1|\omega_{\pm1}(t,x)|\,dt=\int_0^1\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}\ell)\overline{X_\ell(\cos\pi\theta)}X_{\ell\pm2^j}(\cos\pi\phi)\right|\,d\cos\pi\theta.$$

Разобьем этот интеграл по схеме

$$\int^{d}\cos\pi\theta=\int_0^1\,dg_1(\theta)+\int_0^1\,dg_2(\theta)=i_1+i_1.$$

При $\phi\neq0$ применим (19) к $X_{\ell\pm2^j}(\cos\pi\phi)$. Используя неравенство (16) и учитывая структуру носителя функции $\gamma_\pm$ при оценке остатка, имеем

$$i_2\le C\,2^{j/2}\int_0^{\phi}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau-\cos\pi\phi}}\cdot$$
$$\int_0^1\left\{\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_5(2^{-j}\ell\pm1)(2^{-j}\ell)^{1/2}e^{2\pi i\ell\tau}X_\ell(\cos\pi\theta)\right|+\right.$$

$$
\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_6(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{1/2}e^{-2\pi i\ell\tau}X_\ell(\cos\pi\theta)\right| +
$$
$$
\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_7(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{-1/2}e^{2\pi i\ell\tau}X_\ell(\cos\pi\theta)\right| +
$$
$$
\left.\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_8(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{-1/2}e^{-2\pi i\ell\tau}X_\ell(\cos\pi\theta)\right|\right\} dg_2(\theta) + O(1).
$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\gamma(u) = \gamma_\pm(u)\xi_\nu(u\pm 1)(u)^\alpha$ удовлетворяет условиям леммы 6. К внутреннему интегралу применим (27) и произведем в каждом слагаемом правой части (27) замену переменной $\theta' = \tau\pm\theta$. Учитывая, что при $\tau \le \phi$ выполнено (43), на основании леммы 7 получаем $i_2 = O(1)$. При $\phi = 0$ это соотношение доказывается так же с использованием равенства (44) вместо (19). Аналогично воспользуемся (19) для оценки $i_1$ при $\phi \in (0, 2^{-j})$. Применив затем (26) и (23), получим $i_1 = O(1)$. Наконец, чтобы доказать ограниченность $i_1$ при $\phi \in (2^{-j}, 1/2)$, применим к $X_{\ell\pm 2^j}(\cos\pi\phi)$ соотношение (20). Используя неравенство (16) и учитывая структуру носителя функции $\gamma_\pm$ при оценке остаточных членов, имеем

$$
i_1 \le C\,\frac{1}{\sqrt{\phi}}\int\limits_0^1 \left\{\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_1(2^{-j}\ell\pm 1)e^{2\pi i\ell\phi}X_\ell(\cos\pi\theta)\right| +\right.
$$
$$
\left.\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_2(2^{-j}\ell\pm 1)e^{-2\pi i\ell\phi}X_\ell(\cos\pi\theta)\right|\right\} dg_1(\theta) + O\left(\frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}}\right) +
$$
$$
C\,\frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}}\int\limits_\phi^{1/2}\frac{dt}{t^{3/2}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\cos\pi\tau - \cos\pi t}}\,.
$$
$$
\int\limits_0^1 \left\{\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_9(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{-1/2}e^{2\pi i\ell(\tau+t-\phi)}X_\ell(\cos\pi\theta)\right| +\right.
$$
$$
\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_{10}(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{-1/2}e^{-2\pi i\ell(\tau+t-\phi)}X_\ell(\cos\pi\theta)\right| +
$$

$$\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_{11}(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{-3/2}e^{2\pi i\ell(\tau+t-\phi)}X_\ell(\cos\pi\theta)\right|+$$

$$\left.\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\gamma_\pm(2^{-j}\ell)\xi_{12}(2^{-j}\ell\pm 1)(2^{-j}\ell)^{-3/2}e^{-2\pi i\ell(\tau+t-\phi)}X_\ell(\cos\pi\theta)\right|\right\}dg_1(\theta)+O\left(\frac{2^{-j}}{\phi}\right).$$

Осталось применить к внутренним интегралам (26) и (23). $\diamond$

## Литература


[1] Ульянов П.Л. О некоторых решенных и нерешенных проблемах теории ортогональных рядов // Труды IV Всесоюзного математического съезда. Т.2. Л.: Изд-во АН СССР. 1964. С. 694-704.

[2] Ульянов П.Л. О некоторых результатах и задачах из теории базисов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т.170. С. 274-284.

[3] Faber G. Über die interpolatorische Darstelung stetiger Functionen // Jahresber Deutsch. Math.-Verein. 1914. V.23. P. 192-210.

[4] Привалов Ал. А. О росте степеней полиномиальных базисов. // Матем. заметки. 1990. Т.48. В.4. С. 69-78.

[5] Привалов Ал. А. О росте степеней полиномиальных базисов и приближении тригонометрических проекторов // Матем. заметки. 1987. Т.42. В.2. С. 207-214.

[6] Offin D., Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Appr. 1993. V.9. N 1. P.319-325.

[7] Lorentz R.A., Sahakian A.A. Orthogonal trigonometric Shauder bases of optimal degree for $C(0,2\pi)$ // J. Fourier Anal. Appl. 1994. V. 1. N 1. P. 103-112.

[8] Kilgore T., Prestin J., Selig K. Orthogonal algebraic polynomial Shauder bases of optimal degree // J. Fourier Anal. Appl. 1996. V.2. N 6. P. 597-610.

[9] Skopina M. Multiresolution analysis of periodic functions // EJA. 1997. V3. N2. P.203-224.

[10] Daubechies I. Ten Lectures on wavelets. CBMS-NSR Series in Appl. Math. SIAM. 1992.

[11] Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз. 1962.

[12] Chanillo Sagun, Muckenhoupt Benjamin. Weak type estimates for Cesero sums of Jaconi Polynomial series // Mem. Amer. Math. Soc. 1993. V.102. N 487. P.1-90.

[13] Агаханов С.А., Натансон Г.И. Функция Лебега сумм Фурье-Якоби // Вестник Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия, 1968. N 1. С. 11-23.

[14] Skopina M. Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets // J. Approx. Theory 94. 1998. V.94. N 2. P. 191-202.