Матем. заметки. 1996. Т.59. N 5. Стр. 780-783.

УДК 517.5

О НОРМАХ ПОЛИНОМОВ ПО СИСТЕМАМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВСПЛЕСКОВ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

М.А.Скопина[1]

Как показано в [1], для получения нетривиальных оценок снизу поперечников и наилучших m-членных приближений важную роль играет изучение так называемых квазиматричных систем [2], т.е. систем $\{T_n\}$, обладающих свойством: существуют такие постоянные K_1, K_2, K_3, что для каждого натурального N существуют точки y_k, $k = 1, \ldots, M$, $M \le K_1 N$ такие, что для любого полинома $T = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k T_k$ и для любого p, $1 \le p \le \infty$ справедливо неравенство

$$(1) \qquad K_2 \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} |T(y_k)|^p \right)^{1/p} \le \|T\|_p \le K_3 \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} |T(y_k)|^p \right)^{1/p}$$

(при $p = \infty$ вместо суммы берется $\max\limits_k |T(y_k)|$).

Марцинкевич установил, что квазиматричной является тригонометрическая система [3, стр.54]. Очевидно, свойство (1) выполняется и для системы Хаара, являющейся, в частности, системой периодических всплесков. Мы будем изучать широкий класс ортонормированных систем периодических всплесков. Под последними, следуя монографиям [4],[5], будем понимать периодизированные всплески в $L_2(\mathbf{R})$. Именно, пусть φ - масштабирующая функция, порожденного ей кратноразрешающего анализа $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$, $V_j = \overline{span\{\varphi_{jn} = 2^{j/2}\varphi(2^j \cdot + n),\ n \in \mathbf{Z}\}}$, т.е. φ такая функция из пространства $L_2(\mathbf{R})$, что ее целые сдвиги $\varphi(\cdot + n)$ образуют ортонормированную систему, и удовлетворяющая условию кратноразрешимости $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k\, \varphi(2x + k)$, $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k^2 < \infty$. Предположив, что функция φ достаточно "хорошо" убывает на бесконечности, например, если она имеет монотонно убывающую суммируемую на $[0, \infty)$ четную мажоранту ν

$$(2) \qquad |\varphi(x)| \le \nu(|x|),$$

мы можем периодизировать функции φ_{jn} стандартным способом, положив

$$T_{jn}(x) = 2^{j/2} \sum_{l\in\mathbf{Z}} \varphi(2^j x + 2^j l + n),\ \ j = 0, 1, \ldots;\ \ n = 0, \ldots, 2^j - 1.$$

[1]Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда совместно с Правительством России (грант $N\,JKA\,100$).

Нетрудно проверить, что при каждом фиксированном j функции T_{jn} образуют ортонормированную систему, а совокупность множеств $V_j^{per} = V_j^{per}(\varphi) = span\{T_{jn}\},\ \ j = 0, 1, \dots$ является кратноразрешающим анализом в $L_2[0,1]$. Детали этого построения подробно описаны в [5, §9.3]. Элементы пространства V_j^{per} мы будем называть полиномами по системе периодических всплесков, порожденных функцией φ. Выделим три класса всплесков.

(1) CW - всплески, порожденные функцией φ с компактным носителем. Непростые и очень важные примеры таких всплесков, обладающих также свойством гладкости, были построены И.Дебюши [5, гл.6]

(2) SW - сплайн-всплески Баттл-Лемарье (см., например, [5, §5.4]). Масштабирующая функция φ для данного класса определяется равенством

$$\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}_0(x) \left(\sum_{l\in\mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_0^2(x+l) \right)^{-1/2} \tag{3}$$

где φ_0 - B-сплайн с компактным носителем, а $\widehat{g}$ - преобразование Фурье функции g.

(3) MW - класс всплесков, порожденных функцией φ, преобразование Фурье которой имеет компактный носитель. В данный класс входят всплески Мейера (см., например, [5, §5.2]).

Теорема 1. *Системы периодических всплесков CW, SW, MW являются квазиматричными.*

Отметим сразу, что утверждение теоремы 1 для класса MW вытекает из квазиматричности тригонометрической системы и следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть масштабирующая функция φ удовлетворяет условию (2) и $supp\,\widehat{\varphi} \subset [-R,R]$, тогда порожденные ей периодические всплески T_{jn} суть тригонометрические полиномы порядка $2^j R$.*

Доказательство леммы 1 легко следует из формулы суммирования Пуассона.

Справедливость соотношения (1) для классов всплесков CW и SW мы получим, как следствие более общего утверждения, которое, в свою очередь, опирается на представления полиномов $T \in V_j^{per}$ специального вида. Для формулировки этих фактов нам понадобятся обозначения.

Пусть $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{2^j-1}) \in \mathbf{R}^{2^j}$, через $\lambda * T$ будем обозначать результат действия на $T \in V_j^{per}$ соответствующего мультипликатора, т.е. линейного оператора, действующего в V_j^{per} и определяемого равенствами $\lambda * T_{jn} = \lambda_n T_{jn}$. Положим $\|\lambda\| = \max\limits_n |\lambda_n|,\ \ K_\lambda(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} \lambda_k T_{jk}(x) T_{jk}(y),\ \ K(x,y) = K_{\mathbf{1}}(x,y)$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^{2^j}$.

Теорема 2. *Пусть φ масштабирующая функция, удовлетворяющая условию (2) и представимая в виде $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k \varphi_0(x+k)$, где φ_0 ограничена и $supp\,\varphi_0 \subset [-R,R]$, тогда для любого $j \in \mathbf{N}$ существуют $y_{ks} \in [0,1]$ и*

$\alpha_s \in \mathbf{R}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, $s = 1, \dots, M$, $M = M(R)$ *такие, что для любых* $\lambda \in \mathbf{R}^{2^j}$, $x \in [0,1]$ *и* $T \in V_{j(\varphi)}^{per}$ *справедливо равенство*

$$\lambda * T(x) = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{s=1}^{M} \alpha_s T(y_{ks}) K_\lambda(x, y_{ks}). \tag{4}$$

На практике выбор узлов y_{ks} можно осуществить следующим образом. Пусть $h_{\nu\mu}(t) = \varphi_0(t+\nu)\varphi_0(t+\mu)$, $\nu, \mu \in \mathbf{Z}$ функции, заданные на $[0,1]$ и отличные от тождественного нуля, M - количество таких функций. Если $t_s \in [0,1]$, $s = 1, \dots, M$ такой произвольный набор точек, что $\det\{h_{\nu\mu}(t_s)\} \neq 0$, то можно положить $y_{ks} = 2^{-j}(t_s + k)$.

Аналог соотношения (5) для тригонометрической системы и равноотстоящих узлов был получен В.В.Жуком [6, стр.137]

Теорема 3. *Пусть функция* φ *удовлетворяет условиям теоремы 2,* $j \in \mathbf{N}$, y_{ks}, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, $s = 1, \dots, M$ *- точки из теоремы 2,* $\lambda \in \mathbf{R}^{2j}$, *тогда существуют постоянные* $A = A(\varphi)$, $B = B(\varphi) > 0$ *такие, что для любого* $T \in V_j^{per}$ *и для любого* $p \geq 1$ *справедливы соотношения*

$$||\lambda * T||_p \leq A \max_k |\lambda_k| \left(2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{j=1}^{M} |T(y_{ks})|^p \right)^{1/p}, \tag{5}$$

$$||\lambda * T||_p \geq B \min_k |\lambda_k| \left(2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{j=1}^{M} |T(y_{ks})|^p \right)^{1/p}. \tag{6}$$

В случае $p = \infty$ *вместо сумм в правых частях (5) и (6) берется* $\max\limits_{ks} |T(y_{ks})|$.

Масштабирующие функции систем всплесков CW, SW удовлетворяют условиям теоремы 2, поэтому при $\lambda_j = 1$, $j = 0, \dots, 2^j - 1$ теорема 3 влечет квазиматричность этих систем.

Пусть теперь кратноразрешающий анализ $\{V_j^{per}\}_{j=0}^{\infty}$ порожден непрерывной масштабирующей функцией φ. Для непрерывной 1-периодической функции f определим наилучшее приближение элементами пространства V_j^{per}

$$E_j(f) = \inf_{T \in V_j^{per}} ||f - T||_\infty.$$

На основании формулы (4) для f можно построить сумматорный процесс. Следующее утверждение говорит о том, что данный сумматорный процесс аппроксимирует произвольную непрерывную функцию по порядку не хуже, чем полиномы наилучшего приближения.

Теорема 4. *Пусть непрерывная функция* φ *удовлетворяет условиям теоремы 2,* $j \in \mathbf{N}$, y_{ks} *и* α_s $(k = 0, \dots, 2^j-1,\ s = 1, \dots, M)$ *- соответственно точки* *отрезка* $[0,1]$ *и вещественные числа из теоремы 2, f - непрерывная* 1*-периодическая функция*

$$\sigma_j(f,x) = 2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{s=1}^{M}\alpha_s f(y_{ks})K(x,y_{ks}),$$

тогда

$$\|f-\sigma_j(f)\|_\infty \le C\,E_j(f),$$

где C - постоянная, зависящая только от φ.

Список литературы

1. Б.С.Кашин, В.Н.Темляков, *О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве* L^1, Матем. заметки **56, в.5** (1994), 57-86.
2. Б.С.Кашин, *О тригонометрических полиномах с коэффициентами по модулю равными нулю или единице*, Труды 3-й Саратовской зимней школы, ч.1, 1987, pp. 19-30.
3. А.Зигмунд, *Тригонометрический ряды. Т.2*, М.: Мир, 1965.
4. Y.Meyer, *Ondelettes*, Herman, Paris, 1990.
5. I.Daubechies, *Ten Lectures on wavelets*, CBMS-NSR Series in Appl. Math., SIAM, 1992.
6. В.В.Жук, *Сильная аппроксимация периодических функций*, Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989.

С.-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики - процессов управления