Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.П.ПЕТУХОВ

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1999

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

УДК 517.5

Петухов А.П. **Введение в теорию базисов всплесков** . СПб: Изд-во СПбГТУ, 1999. 132 с.

Пособие является расширенной версией семестрового курса, прочитанного в СПбГТУ студентам 3 курса, в котором изложены основные понятия и предпосылки возникновения бурно развивающейся в последние 10 лет теории базисов всплесков (wavelets). В настоящее время базисы всплесков нашли широкое распространение от чисто математических проблем описания функциональных пространств до сугубо прикладных проблем цифровой обработки сигналов и изображений. Базисы всплесков находят все большие применения в физике, астрономии, геофизике, медицине и других областях знаний. Причина такой популярности состоит в том, что всплески являются идеальным инструментом для адекватного представления нестационарных сигналов как с точки зрения глубинных свойств, важных в теории, так и с точки зрения существования для них сверхэкономичных численных алгоритмов. В пособии представлено введение в оба аспекта теории всплесков и указаны основные возможные приложения теории. В частности, обсуждаются современные алгоритмы сжатия изображений.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся в цифровой обработке сигналов и быстрых алгоритмах, но будет интересно и специалистам-исследователям, желающим ознакомиться с основами теории всплесков.

Ил. 14. Библ. 57 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
физико-механического факультета СПбГТУ

## Введение.

Значительный неослабевающий интерес в мире к всплескам ( wavelets) обусловлен главным образом их приложениями к проблемам сжатия информации (аудио и графической) и обработки сигналов. Всплески дают тот редкий пример, когда теория и ее реализация на практике развиваются параллельно и, как правило, одними и теми же авторами. Настоящее учебное пособие также включает в себя оба аспекта и направлено, как на изложние теоретических предпосылок использования всплесков (в определенном смысле альтернативы классическому Фурье анализу при решении некоторых специфических задач), так и на изучение численных алгоритмов, реализующих обработку и сжатие информации.

Отправной точкой в систематическом изучении базисов всплесков считается работа С. Маллата [Ma], в которой было введено понятие *кратномасштабного анализа* и намечен общий подход к поиску базисов всплесков. До выхода данной статьи существовало много примеров базисов всплесков ([M4], [L], [B], [D1]), однако построение каждого нового базиса требовало принципиально новых идей. В настоящее же время построение новых базисов с нужными свойствами можно считать требующим определенных навыков ремеслом.

Аппарат базисов всплесков оказался одинаково продуктивен, как для чисто теоретических вопросов, так и для прикладных. Оказалось, что существует множество базисов, хорошо локализованных по пространству, чьи преобразования Фурье также хорошо локализованы. При этом оказалось, что степенью локализации во временной и частотной области можно управлять, что дает возможность получить своеобразную интерполяцию между представлением функции (сигнала) во временной (или пространственной) области и ее представлением в частотной области, т.е. ее представлением через преобразование Фурье.

Для математической теории эффективность всплесков проявилась, например, в возможности охарактеризовать функции многих нормированных пространств типа пространств Бесова через коэффициенты их разложений по базисам всплесков. Остановимся кратко на этой проблеме. Пусть $\mathbb{L}^p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, — нормированные пространства $2\pi$-периодических функций с нормой

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{1}$$

а $\ell^p$ — пространство (обобщенных) функций (см. [Э]), представимых в виде ряда $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, с нормой

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p\right)^{1/p}. \tag{2}$$

В первом случае (формула (1)) принадлежность к пространству полностью определяется временным (пространственным) поведением функции, во втором случае (формула (2)) — только ее спектром. При этом, за исключением случая $p = 2$, один вид пространства не может быть удовлетворительно описан в терминах свойственных другому.

Описание многих из пространств Бесова — Лизоркина — Трибеля (см. [Т]) не может быть сведенно ни к описанию во временной, ни к описанию в частотной области. В 80-е годы было популярно описание такого рода пространств через представление в виде суммы атомарных функций, т.е функций заданной гладкости с некоторым числом нулевых моментов, чьи преобразования Фурье также имеют фиксированную гладкость. Теоремы о представлении функций через атомарные гарантировали лишь существование разложения без описания способа его получения. Ясно, что появление базисов, по которым можно производить такие разложения привело к существенному прогрессу в теории функциональных пространств. Заметим, что немаловажным свойством базисов всплесков является тот факт, что они состоят из сдвигов и растяжений одной функции.

Второе направление в Анализе, в котором был достигнут значительный прогресс при помощи аппарата базисов всплесков — построение безусловных базисов функциональных пространств. Напомним, что базис пространства называется безусловным, если для любого элемента этого пространства сумма ряда, его представляющего, не зависит от порядка суммирования (т.е. от перестановки слагаемых). Эта проблема имеет как теоретический, так и прикладной аспект. С одной стороны, впервые удалось найти безусловные базисы некоторых пространств. А с другой стороны, с точки зрения прикладных задач важно, что имея представление объекта в виде ряда, когда нужно оставить лишь часть слагаемых (например, отбросив слагаемые, малые по норме), если базис безусловный, не нужно думать, какие слагаемые отбрасываются.

Прикладные аспекты теории всплесков, прежде всего вопросы сжатия изображений, далее будут рассмотрены подробно. Здесь мы лишь отметим, что несмотря на то, что уже к настоящему времени ясно, что всплески являются гибким и мощным инструментом сжатия и обработки изображений и сигналов другой природы, стандарты сжатия, основанные на разложении по базисам всплесков, находятся лишь на стадии разработки. Впрочем, существуют и примеры использования базисов всплесков как стандарта представления информации. Пионером в этой области является ФБР, которое уже давно использует алгоритмы разложения по базисам всплесков для хранения в сжатом виде картотеки отпечатков пальцев.

За последние 5 лет вышло достаточное количество монографий, отражающих разные аспекты теории всплесков (см. [Ch], [D2], [H], [M1], [M3], [SN]). Лучшей из них, как с точки зрения введения в теорию, так и с точки зрения описания приложений, безусловно, является книга И.Добеши [D2]. Кроме того можно для введения в теорию всплесков рекомендовать статьи [CDF], [D1], [Ma], [BDR]. Другие монографии о всплесках либо в большей степени отражают индивидуальные вкусы авторов, чем являются введением в предмет, либо слишком поверхностны и при большой ширине охвата дают лишь наброски узловых моментов. К сожалению, к настоящему моменту нет ни одной книги по всплескам на русском языке, а англоязычные издания книг малодоступны. Из русскоязычных журнальных публикаций можно рекомендовать обзорную статью И.Я.Новикова и С.Б.Стечкина [НС], достаточно подробно отражающую математическую сторону теории всплесков.

## §1. Принципы выбора базисов.

Мы начнем с рассмотрения вопросов представления физических объектов и процессов в виде, пригодном для их дальнейшей математической обработки. Мы будем рассматривать объекты самой разной природы. Некоторые из них можно считать линейными пространствами, например, разного рода функциональные классы или пространства случайных векторов или процессов. Другие объекты типа оцифрованных сигналов или изображений сами по себе не образуют линейного пространства, а лишь являются подмножеством некоторого пространства. Нам будет удобно для обозначения объекта обработки пользоваться терминами *обрабатываемая информация* или *входной сигнал.*

В любом случае предполагается, что для элементов объекта определено понятие их близости при помощи некоторой метрики. Вопрос выбора естественной метрики, подходящей к конкретной задаче, совсем непрост. Ее выбор диктуется не математикой, а скорее физиологией наших органов зрения, слуха и т.д. или "физиологией" технического устройства, являющегося потребителем переработанной информации. Адекватное теоретическое обоснование выбора метрики найти удается редко. Чаще всего подбор осуществляется экспериментальным путем при помощи перебора некоторой совокупности метрик-кандидатов и экспертных оценок результатов приближения в том или ином смысле. Обычный во многих случаях выбор среднеквадратического (евклидова) расстояния происходит чаще всего не от хорошей жизни, а просто как усредненный выбор по всем возможным в этом мире задачам. Кроме того, в большинстве случаев можно обосновать, что выбор евклидова расстояния не самый худший из возможных. Наконец, главная причина выбора евклидова расстояния — простота выполнения расчетов, возможность явного решения многих экстремальных задач. Мы при построении теории всплесков также будем в основном придерживаться евклидовой теории, отклоняясь от нее лишь в случаях, когда можно предложить что-то заведомо лучшее.

Первый этап обработки состоит в выборе линейного пространства, чьи элементы могут выступать в качестве удовлетворительной замены для входного сигнала. Основной критерий — линейное пространство не должно быть избыточно большим. Типичный пример выбора приближающего пространства дает правило дискретизации сигнала, согласно которому частота дискретизации должна быть вдвое выше верхней частоты (частоты Найквиста) этого сигнала. В условиях, когда верхняя частота не обозначена четко, выбор заключается в компромиссе между качеством приближения входной информации и последующими арифметическими затратами на обработку. Конечно, избыточный объем информации может быть впоследствии сокращен путем применения подходящей процедуры сжатия информации. Однако в любом случае плохо выбранное приближающее пространство станет причиной увеличения арифметических затрат.

Разумеется, для возможности последующей обработки сигнала за конечное время приходится требовать, чтобы выбираемое пространство было конечномерным. Раздел математики, в котором рассматривается возможность приближения функций фиксированных функциональных классов конечномерными подпространствами и изучается зависимость скорости их аппроксимации от размерности приближающего пространства, называется теорией поперечников. Несмотря на то, что решение подобных задач носит штучный характер, и маловероятно найти экстремальные пространства, минимизирующие уклонение, для конкретных прикладных задач, решение известных задач может быть источником общих соображений для хотя и неоптимального, но хорошего выбора. Заметим, что для многих задач оптимальными оказываются пространства кусочно полиномиальных функций (сплайнов). Одно из таких тривиальных, но весьма полезных "общих соображений" состоит в том, что для хорошего приближения приближающие объекты должны быть "такими же", как и приближаемые. Например, если интересующие нас сигналы являются непрерывными, но недифференцируемыми функциями, то не стоит в качестве приближающего аппарата использовать полиномы, поскольку гладкость обязывает полином вести себя определенным образом. Он недостаточно гибок, чтобы отслеживать изломы функции. Вероятно, более уместными здесь окажутся кусочно линейные функции или что-нибудь подобное. Напротив, полиномы являются оптимальным приближающим аппаратом для аналитических функций.

Следующая проблема — найти в выбранном пространстве элемент, который будет служить заменой входного сигнала. Выбор приближения, наилучшего в каком-то смысле, является задачей достаточно трудоемкой даже для евклидова расстояния. Поэтому чаще всего подбирается какой-нибудь простой оператор проектирования. Мы еще вернемся к выбору этого оператора.

Следующий шаг состоит в выборе базиса в пространстве, полученном на предыдущем этапе. Рассмотрим простейший пример, показывающий важность данного выбора. Пусть мы имеем $n$-мерный вектор $\vec{a}$. Для его записи или хранения нужно $n$ чисел или ячеек памяти. Если направление этого вектора совпадает с направлением одной из координатной осей, то для его записи требуется всего одно число, конечно, если мы знаем о какой именно оси идет речь. Пусть теперь нам нужно работать с разными векторами. Если все они имеют одно и то же направление, то стоит выбрать базис, у которого одна из осей имеет это направление.

Предположим, теперь нам нужно работать с векторами, которые имеют разные направления, но не все из этих направлений встречаются одинаково часто. Например, в качестве совокупности векторов мы рассматриваем случайный нормально распределенный вектор $\vec{\xi}$, состоящий из $n$ компонент. Нам бы хотелось, чтобы после выбора базиса некоторые коэффициенты разложения по новому базису, которые, разумеется, являются случайными величинами, оказались малы, т.е. относительно малыми бы оказались их дисперсии. В этом случае, если отбросить малые слагаемые в разложении, то можно уменьшить размерность случайного вектора. И если потребуется пересылать значения этого вектора или отправлять их на хранение, то для вектора с меньшей размерностью будет наблюдаться определенная экономия ресурсов.

Ясно, что оптимальным для этих целей базисом является ортонормированный базис из векторов, чьи направления совпадают с направлениями главных осей эллипса рассеяния случайного вектора $\vec{\xi}$. При этом, отбрасывая по очереди компоненты с минимальной дисперсией, мы наносим минимально возможный ущерб исходному вектору $\vec{\xi}$. Кроме всего прочего, вектор координат вектора $\vec{\xi}$ в новом базисе имеет некоррелированные компоненты, что удобно не только для сжатия, но и для дальнейшей обработки, а также для аналитических методов ее оптимизации.

Заметим, что в случае, когда исходный вектор $\vec{\xi}$ имеет некоррелированные компоненты с равной дисперсией, никакое ортогональное преобразование не приведет к возможности дополнительного сжатия информации, поскольку эллипс рассеяния превращается в шар.

Общий принцип выбора подходящего базиса, как правило, заключается в том, что хорошим для сжатия информации является базис, который ведет к раскорреляции, т.е. коэффициенты разложения по базису можно считать некоррелированными или слабо коррелированными случайными величинами. Базисы, в которых вектор коэффициентов имеет некоррелированные компоненты называют базисами Карунена — Лоева. Интересно отметить, что тот же самый принцип работает и для других задач, например, для задач теории фильтрации. Решение большинства задач, связанных с оптимизацией обработки сигналов, в качестве одного из своих шагов включает в себя (может быть, и неявно) операцию раскорреляции отсчетов входного сигнала. Для гауссовских векторов приведенный принцип всегда приводит к оптимальному базису, однако для общего случая он может нарушаться. Существуют примеры (см., напр., [MF]), когда раскорреляция ведет к худшему представлению информации с точки зрения задач компрессии.

Тригонометрический базис и базисы комплексных экспонент незаменимы для теории и часто являются лучшим выбором для представления информации в практических задачах. Они оптимальны по многим критериям при работе со стационарными случайными процессами. В частности, коэффициенты разложения стационарного процесса по тригонометрическому базису являются некоррелироваными случайными величинами. Однако его использование для сигналов с особенностями (нестационарностями) во временной области наталкивается на проблему, связанную с тем, что *носители базисных функций* (т.е. замыкания множеств, на которых функции отличны от нуля) не локализованы во времени, поэтому для представления локальной особенности в сигнале алгоритм разложения (может быть, неявно) решает две задачи: с одной стороны следует отобразить особенность, а с другой стороны, требуется, чтобы гармоники в стороне от особенности уничтожили друг друга. Так, например, спектр $\delta$-функции (самой рафинированной особенности) постоянен. Следовательно, для отображения в сигнале такой особенности необходимы и равноважны все компоненты спектра. Отсутствие части из них приведет к искажению сигнала не только вблизи особенности, но и на расстоянии от нее. Таким образом, для представления локальной особенности нужен базис, чьи функции хорошо локализованы. Но в случае, когда локальная неоднородность присутствует на фоне стационарного сигнала, для адекватного представления обеих компонент базис должен обладать, казалось бы, несовместимыми свойствами: одновременной локализацией самих функций и их преобразований Фурье. Несовместимость двух свойств относительна. В определенных пределах их совмещение возможно. Невозможна лишь одновременная наперед заданная хорошая локализация.

Для выхода из подобной ситуации было предложено оконное преобразование Фурье и его вариации. Общая идея его построения заключается в следующем. Тригонометрические базисные функции нарезаются на кусочки при помощи сдвигов некоторой подходящим образом выбранной, нужным образом локализованной функции $p(x)$. Вместо одной базисной функции берется набор функций $p(x - nt_0)e^{-im\omega_0 x}$, состоящий из произведений исходной тригонометрической базисной функции на некоторые сдвиги[1] функции $p(x)$. При этом оказывается, что в случае правильного подбора $p$ получим ортонормированный базис. Хорошая локализация по $x$ здесь достигается локализацией функции $p(x)$, а локализация преобразования Фурье достигается высокой гладкостью этой функции.

Разумеется, имеет смысл выбирать $p$ из тех соображений, что размер носителя функции должен быть сравним с интервалом стационарности сигнала.

Одним из недостатков такого базиса является большое количество его элементов. Из одной нелокализованной гармоники получается много гармоник локализованных. Естественно, это ведет к увеличению вычисли-

[1] Единичный сдвиг сравним с размером носителя функции $p(x)$.

тельных затрат при разложении. Таким образом, слишком расточительно использовать локализованные базисы с бедным частотным наполнением.

Второй недостаток менее очевиден и состоит в следующем. Длина участка стационарности обычно зависит от частотного диапазона. Для высоких частот он меньше, для низких — больше. Поэтому было бы желательно, чтобы функции $p$ были разными для разных частот.

Базисы всплесков, строгое определение которых будет дано в дальнейшем, не имеет указанных недостатков. Грубо говоря, разложение по базисам всплесков заключается в том, что от сигнала отщепляется (приближенно) октавным фильтром его высокочастотная часть. Низкочастотная и высокочастотные части слабо коррелированы между собой. Высокочастотную компоненту разложим по локализованному базису, состоящему из сдвигов одной функции. На втором шаге снова отщепим верхнюю половину спектра сигнала от получившейся на первом этапе низкочастотной компоненты и найдем ее разложение по базису сдвигов той же функции, но растянутой в два раза. Поступая таким образом нужное (пока низкочастотная часть не станет малозначимой) число раз, ввиду того, что каждая базисная функция отвечает за свой участок пространства и спектра мы получим комбинированное пространственно-частотное разложение исходного сигнала.

Отметим еще несколько важнейших черт всплеск-разложений, которые не нашли отражения в предыдущем абзаце. Во-первых, после отщепления сигнала октавным фильтром получается два сигнала, но количество информации, которую необходимо хранить не увеличивается. В самом деле, для низкочастотной части можно в два раза понизить частоту дискретизации сигнала. Для высокочастотной составляющей тоже можно проредить временные отсчеты, что приведет всего лишь к сдвигу спектра в область низких частот, но информация при этом не теряется. Именно это обстоятельство и учитывается (правда в неявном виде) при всплеск-разложениях. Экономия, получающаяся за счет объединения частот в октавную полосу направляется на улучшение пространственного разрешения. Чем больше дискретных частотных отсчетов было в октаве, тем больше появляется временных сдвигов базисной функции. Таким образом, в прямоугольнике *частота* $\times$ *время* базисные функции отвечают за свой прямоугольный участок, при этом площади всех таких участков равны.

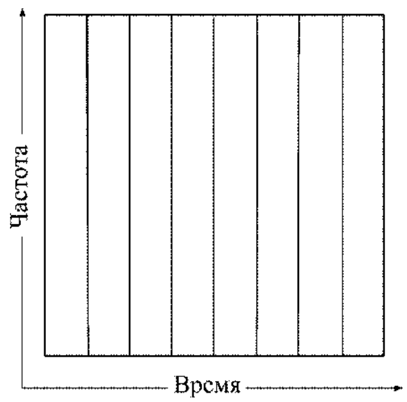



Рис. 1

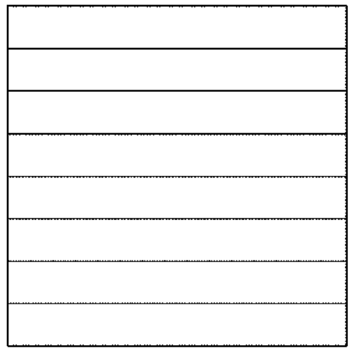


Рис. 2

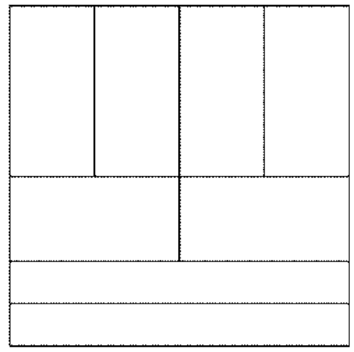


Рис. 3

Предположим, мы имеем дискретный периодический сигнал $f(n)$ с периодом 8. На Рис. 1 — 3 продемонстрировано различие представлений сигнала во временной области, в частотной области (преобразование Фурье) и в виде разложения по базису всплесков.

Когда мы представляем сигнал во временно́й области, каждое значение временно́го отсчета может рассматриваться как коэффициент в разложении

$$f(n) = \sum_{k=0}^{7} f(k)\delta(n-k), \quad n = 0, 1, \dots, 7, \text{ где } \delta = \begin{cases} 1, & n = 8k, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & n \neq 8k. \end{cases}$$

Сдвиги функции $\delta$ локализованы по времени, но не локализованы по частоте — абсолютная величина их Дискретного Преобразования Фурье (ДПФ) является постоянной. Поэтому каждый из сдвигов функции $\delta$ и каждый соответствующий сдвигу коэффициент разложения отвечает за свой вытянутый по вертикали прямоугольник на Рис. 1.

В случае представление сигнала в частотной области в виде

$$f(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{7} \hat{f}(n) e^{\pi i k n/4}, \quad n = 0, 1, \dots, 7,$$

базисные функции имеют хорошо локализованное преобразование Фурье, но во временно́й области их абсолютная величина постоянна. Таким образом, данному представлению сигнала соответствует разбиение прямоугольника *частота* × *время*, представленное на Рис. 2.

Наконец, разложению по базису всплесков соответствует Рис. 3. Для этого случая базисные функции оказываются локализованными и по частоте, и по времени. Причем, с увеличением частоты улучшается локализация по времени и в той же степени ухудшается локализация по частоте.

При всей жесткости анонсированных выше требований к базисам всплесков они оказываются достаточно гибким инженерным и математическим инструментом. Их к настоящему времени известно достаточно много. Кроме проблемы (очень серьезной), как их использовать[2] , появилась проблема, какой базис выбрать для конкретной задачи.

И наконец, еще одним существенным отличием от других базисов является возможность построения эффективных алгоритмов разложения и восстановления сигналов.

Совокупность всех этих свойств является причиной информационного бума в математической и инженерной литературе, связанного с появлением базисов всплесков.

## §2. Что такое всплеск ?

Через $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ будем, как обычно, обозначать гильбертово пространство функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx,$$

индуцированную скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

а через $\hat{f}$ — преобразование Фурье, определяемое для функций из $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ по формуле

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}\,dx,$$

[2]Каждый год появляются сотни работ, посвященных повышению эффективности реализации алгоритмов разложения по базисам всплесков. Не менее десятка из которых ведут, действительно, к существенному прогрессу.

и продолжаемое по непрерывности с $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cup \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ на все пространство $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (см. [CB]), например по формуле

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\omega}\, dx,$$

где предел понимается в смысле нормы пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Термин *всплеск* является вольным переводом английского слова wavelet и используется в настоящее время чаще, по крайней мере в среде математиков, чем его синоним *вейвлет*.

Следует иметь в виду, что этот термин применяется к двум близким, но, вообще говоря, неэквивалентным объектам.

Первым из них является произвольная функция $\psi$, чьи сдвиги и растяжения $\{2^{j/2}\psi(2^j x - n)\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Изучением свойств именно таких базисов и их обобщений мы будем заниматься в дальнейшем.

Второй объект — функция $\psi$, задающая ядро

$$\psi^{a,b}(x) \stackrel{\text{def}}{=} |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

интегрального оператора $T^{wav}$, определяемого на функциях из $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$T^{wav}[f](a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \psi^{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, dx. \qquad (1)$$

При этом требуется, чтобы функция $\psi$ удовлетворяла неравенству

$$C_\psi \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty. \qquad (2)$$

Тогда (см. [D2, Гл. 2]) справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T^{wav}[f](a,b)\psi^{a,b}(x) \frac{da\, db}{a^2}. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, откуда появилось не совсем очевидное требование (2).

Отметим также, что из (2) можно получить, что среднее значение функции $\psi$ равно нулю для любой функции $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, т.е. для любой функции, для которой корректно определено само понятие среднего значения. В самом деле, из суммируемости функции $\psi$ следует, что ее преобразование Фурье $\hat{\psi}$ непрерывно. Следовательно, из выполнения неравенства (2) имеем $\hat{\psi}(0) = 0$. Поэтому $\int \psi(x)\,dx = 0$.

Значения оператора $T^{wav}[f]$ как функции двух переменных $a$ и $b$ несут в себе информацию, которую можно назвать мгновенным частотно-временным спектром сигнала, поскольку параметр $a$ играет роль частотной координаты, а параметр $b$ — роль координаты временной. Оператор (1) принято называть *непрерывным всплеск-преобразованием.*

Оператор $T^{wav}$ преобразует функцию одной переменной в функцию двух переменно. Уже это простейшее наблюдение наводит на мысль, что всплеск-преобразование сигнала содержит в себе избыточную информацию. Это становится особенно очевидным в случае, когда функции $\psi^{a,b}$ при значениях $a = 2^{-j}$, $b = 2^{-j}n$, $j, n \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис (базис всплесков) пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Ясно, что при этом формула (1) превратится в формулу вычисления коэффициентов разложения по данному базису, а вместо интеграла (3) для восстановления сигнала по коэффициентам разложения появится формула

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{j/2} T^{wav}(2^{-j}, 2^{-j}n)\psi(2^j x - n). \tag{3'}$$

Таким образом, в рассмотренном частном случае функция $\psi$ является всплеском с точки зрения любого из двух определений.

К сожалению, из непрерывного всплеск-преобразования не всегда можно получить разложение по базису всплесков. Условие (2), разумеется, не может гарантировать ни ортогональности, ни даже линейной независимости соответствующей системы сдвигов и растяжений функции $\psi$. Поэтому определение всплеска как ядра интегрального оператора несколько шире. Оно применяется в случае, когда необходимо выявить локализованные особенности сигнала, как правило для исследовательских задач, когда нет существенных ограничений по производительности вычислительных средств и необходимости производить вычисления в реальном времени. Вероятно, физик на вопрос, что такое всплеск, даст его определение как ядра интегрального оператора. Из тех же соображений непрерывное всплеск-преобразование может пригодиться медикам, геофизикам, астрономам, всем инженерам, кроме тех, кто занимается цифровой обработкой сигналов.

В область интересов инженера-цифровика попадает прежде всего понятие всплеска как порождающей базис функции. Методы разложений по базисам всплесков ведут к экономному решению многих существующих задач обработки, требующих своей реализации в рамках ограниченных аппаратных или вычеслительных ресурсов. Благодаря тому, что кроме этого базисы всплесков часто являются адекватным инструментом представления нестационарных объектов, при помощи разложений по всплескам был достигнут существенный прогресс в задачах сжатия информации. Несомненно также, что теория базисов всплесков в настоящее время является неисчерпаемым источником задач для чистых и прикладных математиков.

## §3. Кратномасштабный анализ.

Понятие кратномасштабного анализа[3] (КМА) функционального пространства является фундаментальным в теории всплесков. На наш взгляд, существуют две основные причины важности этого понятия для теории всплесков. Первая из них состоит в том, что КМА является инструментом для построения новых базисов всплесков, и в настоящее время нет других сколь-нибудь универсальных способов построения. В каком-то смысле еще одним таким инструментом можно было бы считать, так называемую, схему субполосного кодирования,[4] которая появилась в цифровой обработке сигналов до появления всплесков. Однако в настоящее время субполосное кодирование можно считать частью теории кратномасштабного анализа. О связи этих двух понятий речь пойдет в §7. Вторая причина не столь очевидна и связана с численной реализацией разложения по базисам всплесков. Для получения коэффициентов разложения $c_{j,n}$ функции $f$ по ортонрмированному базису $2^{j/2}\psi(2^j x - n)$ нужно вычислить скалярные произведения, которые выражаются интегралами вида (2.1). Операция интегрирования является дорогостоящей с точки зрения вычислительных затрат. В то же время, для всплесков, порожденных КМА, существует каскадный алгоритм, речь о котором пойдет в §6, дающий существенную экономию вычислительных затрат за счет уменьшения количества операций интегрирования и появляющихся вмес-

[3] Multiresolution analysis

[4] Subband codding scheme

то них операций дискретных сверток.

О возможных способах построения базисов всплесков, порожденных фиксированным кратно-масштабным анализом речь пойдет в следующем параграфе. Несмотря на то, что существуют базисы всплесков, которые не порождаются никаким КМА, такие базисы в настоящее время представляют чисто академический интерес и в дальнейшем рассматриваться не будут.

Мы будем здесь рассматривать функциональные пространства на вещественной прямой. Кроме того, при построении общей теории предполагается, что все пространства состоят из комплекснозначных функций. В каком-то смысле комплексный случай проще вещественного, поскольку нет необходимости искать вещественные решения возникающих задач. Тем не менее, на практике случай вещественнозначных функций встречается чаще и мы при рассмотрении конкретных задач будем всегда оговаривать, когда вещественнозначность принципиальна.

Определение 1. Последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств

$$\dots \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \tag{1}$$

пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ называется его *кратномасштабным анализом*, если удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V^j} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$;

б) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V^j = \{0\}$;

в) $f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1}$;

г) найдется такая функция $\varphi \in V^0$, которую называют *масштабирующей*[5], что множество ее сдвигов $\varphi(x-n)$ образует ортонормированный базис пространства $V^0$.

Обсудим основные моменты данного определения. Предлагаемая последовательность пространств дает нам возможность выбора $V^j$, служащего заменой исходного сигнального пространства. Плотность последовательности $V^j$ в $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (свойство а)) гарантирует для любой суммируемой функции $f$ и любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существование такого пространства $V^k$ и элемента $f_k \in V^k$, что $\|f - f_k\| < \varepsilon$. Учитывая, что мы имеем дело с евклидовым расстоянием, наилучшим приближением функции $f$ из пространства $V^k$ является ортогональная проекция $f$ на

[5]Scaling function

это пространство. Поэтому в качестве $f_k$ удобно брать ортогональную проекцию.

Стоит отметить ту особую роль, которую в КМА выполняет требование вложенности пространств $\{V^j\}$. С точки зрения задач теории аппроксимации требование вложенности пространств является не очень принципиальным. От него можно безболезненно отказаться, оставив в неприкосновенности все остальные условия Определения 1. При этом получится последовательность пространств, вполне пригодная для приближения функций. Многие возникающие в рамках такой теории задачи и даже методы их решения ничем не отличаются от задач и методов возникающих в рамках КМА. Заметим, что при отказе от вложенности существенно упрощается и расширяется возможность выбора базисной функции $\varphi$ из пункта г) определения КМА. Что же мы при этом теряем ? Оказывается, что теряем мы самое главное — возможность определить понятие *всплеска*, ради которого и появился КМА. Можно заменять или в разных направлениях ослаблять требования всех пунктов Определения 1 однако, если мы намерены далее вводить понятие всплеска, то мы обязательно должны потребовать выполнение последовательности вложений (1).

Свойство в) объясняет появление термина кратномасштабный. Если цепочка (1) говорит лишь о том, что последовательность пространств $V^j$ расширяется при увеличении $j$, то свойство г) объясняет, каким образом происходит это расширение. А именно каждое последующее пространство "в 2 раза" больше предыдущего. Кавычки здесь использованы потому, что несколько некорректно сравнивать в разах размеры бесконечных множеств. Заметим, что при построении КМА пространств периодических функций (см. [П4]), действительно, оказывается, что пространство с номером $j+1$ имеет размерность в два раза большую, чем пространство с номером $j$. В нашем же случае оба пространства бесконечномерны, однако свойство (1) гарантирует, что $f \in V^j \Rightarrow f \in V^{j+1}$, а свойство в) утверждает, что вместе с $f(x)$ в пространство $V^{j+1}$ входит еще и функция $f(2x)$. Проекции пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ на пространства $V^j$ можно сравнить с изучением его при помощи увеличительных стекол, каждое последующее из которых отличается от предыдущего в два раза. Увеличение номера пространства $V^j$ позволяет изучать все более и более мелкие детали функции или сигнала, для представления которых необходима высокочастотная компонента.

Из свойств а) — г) непосредственно не следует, но стоит понимать, что в качестве абстрактно-идеального выбора пространств $V^j$ нужно стремиться к тому, чтобы спектр функций пространства $V^0$ был сконцентрирован на отрезке $[-\pi, \pi]$, а функция $\varphi$ была бы хорошо локализована во времени. Конкретный же выбор КМА является компромиссом между этими двумя свойствами, соответствующим постановке задачи.

Свойство г) в совокупности с в) позволяет сделать вывод, что для любого $j \in \mathbb{Z}$ функции $\varphi_k^j(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ образуют ортонормированный базис. Появление нормирующего множителя $2^{j/2}$ объясняется тем, что при замене переменной $x \mapsto 2x$ норма функции уменьшается в $\sqrt{2}$ раз, что необходимо компенсировать.

Несколько слов о возможных путях обобщения понятия КМА и переноса его на другие объекты.

Во-первых, "кратность" КМА, равная двум в Определении 1, вообще говоря, может быть заменена на любое большее целое число и даже на любое рациональное число, большее единицы. Однако такое обобщение может быть использовано лишь в весьма специфических задачах, когда требуется деление частоты в определенной пропорции. При прочих равных условиях использование множителя 2 является оптимальным по тем же причинам, которые оправдывают использование двоичного представления чисел в ЭВМ.

Во-вторых, в определении КМА пункт г) иногда заменяют на более слабое требование существования в пространстве $V^0$, вообще говоря, неортогонального базиса $\varphi(x-k)$, являющегося базисом Рисса. Это требование не ведет к новым объектам, поскольку С.Маллат [Ma] показал, что такой базис всегда может быть заменен ортогональным.

Понятие КМА может быть введено для пространств отличных от $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Например, для банаховых пространств на прямой. Для этой цели нужно в пункте а) потребовать плотность в смысле соответствующей нормы пространства $X$, а в пункте г) заменить существование ортогонального базиса (понятие ортогональности определено лишь для гильбертова пространства) каким-нибудь другим сходным условием, совпадающим с г) при $X = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Насколько нам известно, в полном объеме эта программа до сих пор не была никем реализована — проблема с пунктом г). Вместо этого большинство авторов предполагают, что $V^j \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \cap X$. Такой подход позволяет сохранить пункт г) в неизменном виде. Однако при этом непонятно, насколько ортогональность базиса хороша для негильбертова пространства.

Для квазибанаховых пространств периодических функций (включая, обобщенные) понятие КМА было введено и исследовано в работах [П3], [П4]. Там же было дано полное описание всех таких КМА. В чуть менее общем виде определение периодического КМА вводилось в [Н], [РВ], [Ж3].

Особый интерес для прикладных задач представляют КМА для пространств функций, определенных на дискретной сетке, поскольку входной сигнал в цифровом устройстве определен лишь в дискретном наборе точек. Насколько нам известно, систематических исследований КМА на пространствах функций, определенных в целочисленных точках прямой, не велось. Однако, в каком-то смысле, такие КМА возникают естественным путем, когда мы после выбора подходящего пространства $V^j$ отображаем на него сигнальное пространство. Процесс получения коэффициентов разложения по базису сдвигов функции $\varphi$ можно рассматривать, как обобщенную операцию оцифровки сигнала. Значения этих коэффициентов являются дискретным сигналом и вся дальнейшая обработка, фактически, происходит в рамках КМА пространств функций дискретного аргумента.

Построение теории КМА периодического дискретного аргумента с периодом $N = 2^n$ было проведено в [П2]. В каком-то смысле, подобная теория ведет к альтернативе (или дополнению) теории Дискретного Преобразования Фурье.

## §4. Выбор масштабирующей функции.

Приведенное в предыдущем параграфе Определение 3.1 не является конструктивным, но из него видно, что для того чтобы задать КМА достаточно знать только одно из пространств $V^j$, а оно, в свою очередь, определяется *масштабирующей* функцией $\varphi$. Таким образом, если нам удастся найти способ получения таких функций с заданными свойствами, то мы сможем строить КМА.

Начнем с простого замечания, выводы из которого лежат в основе всей теории всплесков. Поскольку $V^0 \subset V^1$, то функция $\varphi$ является линейной комбинацией функций $\{\varphi^1_n\}$. Следовательно, для некоторого набора коэффициентов $\{h_n\}$ получим равенство

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n), \tag{1}$$

называемое *масштабирующим уравнением*[6]. Очевидно, ввиду равенст-

[6] Two-scale equation

ва Парсеваля имеем $\sum h_n^2 = 1$. Выполнив преобразование Фурье обеих частей равенства (1), получим

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega/2} \hat{\varphi}(\omega/2) \tag{2}$$

или, введя обозначение

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega},$$

преобразуем (2), а значит и (1), к виду

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2). \tag{3}$$

Равенство (3) также принято называть масштабирующим уравнением.

Впоследствии мы получим, что функция $\varphi$ полностью определяется $2\pi$-периодической функцией $m_0(\omega)$. А сейчас выведем одно свойство этой функции, вытекающее из ортогональности набора сдвигов $\varphi(x-n)$ функции $\varphi$.

Преобразуем интеграл в выражении

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}\, dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

к удобному для нас виду. С этой целью посчитаем его преобразование Фурье (как функции непрерывного аргумента $n$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}\, dx\, e^{-in\omega}\, dn = \\
&\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}\, e^{-in\omega}\, dn\, dx = \\
&\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\omega}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x-n)}\, e^{i(x-n)\omega}\, dn = \\
&\qquad \hat{\varphi}(\omega)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-n) e^{-i(x-n)\omega}\, dn} = \\
&\hat{\varphi}(\omega)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-n) e^{-i(x-n)\omega}\, dn} = \hat{\varphi}(\omega)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iy\omega}\, dy} = \\
&\qquad\qquad \sqrt{2\pi}\hat{\varphi}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)} = \sqrt{2\pi}|\hat{\varphi}(\omega)|^2.
\end{aligned}$$

Для того чтобы вернуться к интегралу (4), выполним обратное преобразование Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{in\omega}\,d\omega =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{in\omega}\,d\omega = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\varphi}(\omega+2\pi j)|^2 e^{in(\omega+2\pi j)}\,d\omega =$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2\pi j)|^2 e^{in\omega}\,d\omega. \quad (5)$$

Заметим, что $2\pi$-периодическая функция $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2\pi j)|^2$ является суммируемой и определена корректно (при помощи сходящегося почти всюду ряда), поскольку $\hat{\varphi}(\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Из (4) и (5) получим, что все коэффициенты Фурье этой функции за исключением нулевого равны нулю. Следовательно,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2\pi j)|^2 \equiv \frac{1}{2\pi}. \quad (6)$$

Применим формулу (6) к функции $\hat{\varphi}(2\omega)$ и затем воспользуемся масштабирующим уравнением (3). Учитывая $2\pi$-периодичность функции $m_0(\omega)$, получим

$$\frac{1}{2\pi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\omega+2\pi j)|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |m_0(\omega+\pi j)\hat{\varphi}(\omega+\pi j)|^2 =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |m_0(\omega+2\pi j)\hat{\varphi}(\omega+2\pi j)|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} |m_0(\omega+\pi+2\pi j)\hat{\varphi}(\omega+\pi+2\pi j)|^2 =$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega+2\pi j)|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} |m_0(\omega+\pi)\hat{\varphi}((\omega+\pi)+2\pi j)|^2 =$$

$$\frac{1}{2\pi}(|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2),$$

что влечет выполнение равенства

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1 \quad (7)$$

почти всюду.

Далее будет показано, что при весьма мягких ограничениях функция $m_0$, удовлетворяющая уравнению (7), определяет масштабирующую функцию $\varphi$, а значит, и КМА. Таким образом, искусство выбора КМА адекватного решаемой задаче сводится к выбору решения уравнения (7) с заданными свойствами. Сказанное показывает важность уравнения (7) для всей теории.

## §5. Пространства всплесков и их базисы.

Последовательность пространств $\{V^j\}$, формирующая КМА, дает нам возможность выбрать пространство-кандидата, приближающего входной сигнал цифрового устройства. Следующая задача — выбрать подходящий базис, который бы позволил разбить сигнал на компоненты локализованные как по частоте, так и по времени.

Сначала о частотной локализации. Интуитивный подход к введению пространств всплесков основан на том, что как уже было сказано в §2, имеет смысл считать, что пространство $V^j$ содержит в себе функции, чьи спектры сконцентрированы на отрезке $[-\pi 2^j, \pi 2^j]$. Таким образом, логично предположить, что ортогональное дополнение пространства $V^j$ до пространства $V^{j+1}$, состоит из функций, чьи спектры в основном сконцентрированы на отрезках $[-\pi 2^{j+1}, -\pi 2^j]$ и $[\pi 2^j, \pi 2^{j+1}]$. Разумеется, такие "правдоподобные рассуждения" нас ни к чему не обязывают, и определение пространств всплесков носит чисто формальный характер.

Итак, пусть пространства $\{V^j\}$ образуют КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Тогда ортогональное дополнение $W^j$ пространства $V^j$ до пространства $V^{j+1}$ называется *пространством всплесков*. Таким образом, пространство $V^{j+1}$ может быть представлено в виде прямой (и даже ортогональной) суммы

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Проводя последовательное разложение в прямую сумму, появляющихся на предыдущем шаге пространств $V^k$, и учитывая свойство б) КМА, получим

$$V^{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^{j} W^k. \tag{1}$$

А ввиду свойства а) КМА имеем

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W^k}. \tag{2}$$

С качественной точки зрения формулы (1) и (2) дают нам разложения пространств $V^j$ и $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ в прямую сумму пространств, в каждом из которых содержатся функции, чьи спектры "в основном" содержатся в октавной полосе частот. С точки зрения большинства технических приложений очень удобно, что относительные полосы частот совпадают для всех пространств $W^j$. Традиционное преобразование Фурье из-за равномерной сетки частот имеет избыточною информативность в области высоких частот. Если же рассматривать его значения на логарифмической сетке частот, то возникает проблема точного восстановления сигнала по его спектру. В случае всплеск-разложения пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, возникшую "экономию" за счет объединения частот в октавные полосы, удобно направить на повышение разрешения во временной области.

Теперь найдем способы построения в пространствах $W^j$ ортогональных базисов, состоящих из сдвигов одной функции. Сначала найдем формулу представления функций пространства $V^1$ в частотной области. Поскольку

$$f(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(2x-n)$$

для некоторого набора коэффициентов $\{c_n\}$, то, выполнив преобразование Фурье этого выражения, получим

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-n\omega/2}\varphi(\omega/2) = m_f(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2), \tag{3}$$

где $m_f(\omega)$ — $2\pi$-периодическая функция, определяемая по формуле

$$m_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega}. \tag{4}$$

В следующем параграфе мы покажем, что функция $m_f$ имеет смысл спектра функции $f$. Заметим, что в последнем высказывании присутствует некоторый парадокс, поскольку согласно формуле (3) функция $m_f$ — всего лишь один из определяющих спектр сомножителей. Это замечание в дальнейшем будет в полной мере использовано для упрощения вычисления сверток и для наглядности представления функций.

Пусть теперь функция $f$ принадлежит пространству $W^0$, тогда она ортогональна всем функциям базиса $\{\varphi(x-n)\}$, поэтому, действуя по аналогии с доказательством формулы (3.5), для любого $n \in \mathbb{Z}$ получим

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi(x-n)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)} e^{in\omega}\, d\omega,$$

и далее

$$\int_0^{2\pi} \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi)\overline{\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)} \right) e^{in\omega}\, d\omega. \tag{5}$$

Поскольку $f, \varphi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, то произведение $\hat{f}\bar{\hat{\varphi}}$ принадлежит пространству $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Следовательно, ряд в (5) сходится абсолютно (а значит, и безусловно) по норме пространства $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Подставляя (3.3) и (3) в (5), действуя так же, как и при доказательстве равенства (3.7), получим, что для почти всех $\omega$

$$m_f(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_f(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0. \tag{6}$$

При фиксированном $\omega$ равенство (6) имеет смысл скалярного произведения двумерных векторов $(m_f(\omega), m_f(\omega+\pi))$ и $(m_0(\omega), m_0(\omega+\pi))$. Если второй вектор не является нулевым, то векторы, ему ортогональные, запишутся в общем виде $(A\overline{m_0(\omega+\pi)}, -A\overline{m_0(\omega)})$, где $A$ — произвольная константа. Поскольку из равенства (3.7) следует, что компоненты вектора $(m_0(\omega), m_0(\omega+\pi))$ могут одновременно обращаться в нуль лишь для $\omega$, принадлежащих множеству нулевой меры, то функция $m_f$ удовлетворяет уравнению (6) в том и только том случае, когда она почти всюду представима в виде $m_f(\omega) = a(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)}$, где $a(\omega)$ — произвольная $2\pi$-периодическая функция, удовлетворяющая почти всюду соотношению $a(\omega+\pi) = -a(\omega)$. Функцию $a$ удобно представить в виде $a(\omega) = e^{i\omega}\alpha(\omega)$, где $\alpha$ — $\pi$-периодическая функция.

Разумеется, не все функции $m_f$ такого вида определяют функции из $W^0$. Согласно (4) функция $m_f$ принадлежит классу $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Причем ее норма в этом пространстве совпадает с нормой $f$ с точностью до множителя, независящего от $f$. В то же время, справедливо и обратное утверждение. Любая функция пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, удовлетворяющая (6) определяет функцию из $W^0$.

Таким образом, для любой функции $f \in W^0$ из (3.7) имеем

$$\infty > \int_0^{2\pi} |m_f(\omega)|^2\, d\omega = \int_0^{2\pi} |e^{i\omega}\alpha(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)}|^2\, d\omega =$$
$$\int_0^{\pi} |\alpha(\omega)m_0(\omega+\pi)|^2\, d\omega + \int_0^{\pi} |\alpha(\omega)m_0(\omega)|^2\, d\omega =$$
$$\int_0^{\pi} |\alpha(\omega)|^2(|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2)\, d\omega = \int_0^{\pi} |\alpha(\omega)|^2\, d\omega.$$

Следовательно, функция $f$ принадлежит пространству $W^0$ в том и только том случае, когда

$$m_f(\omega) = \alpha(\omega)e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}, \tag{7}$$

где $\alpha(\omega)$ — произвольная $\pi$-периодическая функция с суммируемым квадратом. При этом согласно формуле (3)

$$\hat{f}(\omega) = \alpha(\omega/2)e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\varphi(\omega/2)$$

или в более естественном виде

$$\hat{f}(\omega) = \nu(\omega)e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\varphi(\omega/2), \tag{8}$$

где $\nu$ — $2\pi$-периодическая функция с суммируемым квадратом. Руководствуясь представлением (7), найдем описание тех функций $f_0$ пространства $W^0$, чьи единичные сдвиги образуют ортонормированный базис этого пространства. Проделав выкладки, проведенные в (3.1) — (3.7), но с заменой функции $\varphi$ на $f_0$, получим, что целочисленные сдвиги $f_0$ образуют ортонормированный базис в том и только том случае, когда

$$|m_{f_0}(\omega)|^2 + |m_{f_0}(\omega+\pi)|^2 = 1$$

или после подстановки (7)

$$1 = |\alpha(\omega)e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}|^2 + |\alpha(\omega+\pi)e^{i(\omega+\pi)}\overline{m_0(\omega+2\pi)}|^2 =$$
$$|\alpha(\omega)|^2(|m_0(\omega+\pi)|^2 + |m_0(\omega)|^2) = |\alpha(\omega)|^2.$$

Таким образом, все возможные функции, порождающие ортогональные базисы сдвигов в $W^0$, представляются в виде (7) с функцией $\alpha$, равной по модулю единице. В качестве $m_{f_0}$ можно взять, например, функцию $m_1(\omega) = m_\psi(\omega) = e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}$. Тогда согласно (3) получим

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\hat{\varphi}(\omega/2) = m_1(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2) \tag{9}$$

или то же самое во временной области

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}\varphi(2x-n). \tag{9'}$$

Формулу (9′) так же, как и формулу (3.1) называют масштабирующим уравнением.

*Всплеском* обычно называют функцию, чьи сдвиги образуют базис в пространстве $W^0$. Однако иногда термин "всплеск" применяется и для обозначения произвольного элемента любого из пространств $W^j$. Во всяком случае, сами эти пространства мы называем *пространствами всплесков*.

## §6. Прямая форма алгоритма разложения по всплескам.

Итак, мы приступаем к построению алгоритма разложения по всплескам функции $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Первый шаг — выбор пространства $V^k$, в которое будем отображать функцию $f$. Мы будем считать, что $k = 0$.

Каким образом мы можем выбрать приближающую функцию $\tilde{f} \in V^0$? Самым простым в идейном отношении и безупречным с точки зрения математики (по крайней мере, на первый взгляд) является выбор в качестве $\tilde{f}$ ортогональной проекции на пространство $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Безупречность с точки зрения математики объясняется тем, что ортогональная проекция является с точки зрения евклидовой нормы наилучшим приближением $f$ из приближающего пространства. Проекция представляется в виде

$$\tilde{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n^0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(x-n), \tag{1}$$

где

$$c_n = \langle f, \varphi_n^0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi(x-m)}\,dx.$$

Несмотря на свою идейную простоту формула (1) предусматривает выполнение весьма нетривиальную с точки зрения цифровой обработки операцию интегрирования функции. Даже для приближенного вычисления коэффициентов требуется, по крайней мере, достаточный запас временных отсчетов. Впрочем, задача может быть решена при помощи аналогового фильтра на входе АЦП, с импульсной характеристикой, совпадающей с функцией $\varphi$. Однако на практике в нашем распоряжении часто имеются лишь последовательность $\{f_k\}$ целочисленных отсчетов функции,[7] по которым мы и должны восстановить разложение (1).

Наиболее естественным в (1) является выбор коэффициентов $c_n$, исходя из условий интерполяции:

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varphi(k-n) = f_k. \qquad (2)$$

Однако при таком подходе нам придется решать систему линейных уравнений (2). Прямой метод решения системы уравнений может быть приемлем лишь для случая, когда матрица системы окажется ленточной (например, если функция $\varphi$ имеет финитный носитель). В общем случае ввиду сверточной природы системы линейных уравнений (2) мы можем разбить сигнал $f_k$ на отрезки подходящей длины, периодизировать его на этих отрезках, а затем воспользоваться для решения алгоритмом Быстрого Преобразования Фурье. Разумеется, полученные таким образом коэффициенты $c_n$ имеют некоторую погрешность.

Наконец, самым простым, но в большинстве случаев приемлемым способом проектирования на пространство $V^0$, является проектор задаваемый равенством $c_n = f_n$. В его пользу говорит хотя бы тот факт, что если в качестве $\varphi$ взять функцию $\sin \pi x/\pi x$, то эта проекция не только обеспечивает интерполяцию в целочисленных точках, но и точное восстановление сигналов, чьи спектры принадлежат отрезку $[-\pi, \pi]$.

Возможны и другие способы выбора отображения $f_n \mapsto c_n$, например, свертка $f_n$ с некоторой последовательностью

$$c_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m d_{n-m}.$$

Приведем без доказательства формулы вычисления спектра функции $\tilde{f}$ для различных методов проектирования на пространство $V^0$.

[7] Естественно, мы не можем считать, что это отсчеты функции из $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Мы должны предположить либо непрерывность функции $f$, либо, что перед оцифровкой она была пропущена через свертку (фильтр) с некоторой функцией из $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, став после этого непрерывной.

Итак,

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\varphi}(\omega+2\pi n)}; \quad \text{(ортогональная проекция)} \quad (3)$$

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega+2\pi n)}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\omega+2\pi n)}; \quad \text{(интерполяционная проекция)} \quad (4)$$

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega+2\pi n); \quad \text{(проекция } f_n \mapsto c_n\text{)}. \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что все проекции хорошо приближают функцию $f$, если ее спектр сконцентрирован на отрезке $[-\pi,\pi]$. А функция $\varphi$ близка на этом отрезке к единице и пренебрежимо мала вне его.

Будем теперь считать, что мы выбрали коэффициенты разложения в (1). Сам процесс разложения по базису всплесков однозначен. В нем отсутствует та неопределенность в которой мы пребывали, выбирая способ проектирования. Найдем явные формулы замены координат при переходе от базиса сдвигов масштабирующей функции к базису всплесков. Получим сначала формулы, соответствующие разложению

$$V^{-1} \oplus W^{-1} = V^0. \quad (6)$$

В качестве всплеска, определяющего базисы сдвигов в пространствах $W^j$, возьмем функцию $\psi$, определяемую по формуле (5.9'). Будем использовать обозначение $\psi_n^j = 2^{j/2}\psi(2^j x - n)$. На уровне конкретного элемента формула (6) запишется в виде

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{-1}\varphi_n^{-1}(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^{-1}\psi_n^{-1}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0\varphi_n^0(x), \quad (7)$$

где $c_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} c_n$. Прежде чем получить явные формулы для последовательностей $c_n^{-1}$ и $d_n^{-1}$, покажем, что для любых $j,k\in\mathbb{Z}$ справедливы формулы

$$\varphi_k^j(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2k}\varphi_n^{j+1}(x) \quad (8)$$

и

$$\psi_k^j(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_{n-2k}\varphi_n^{j+1}(x) \quad (9)$$

где $g_n = (-1)^{1-n}\bar{h}_{1-n}$.

Согласно формуле (3.2) получим

$$\varphi_k^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) = 2^{j/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n 2^{1/2}\varphi(2^{j+1}x - n - 2k) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi_{n+2k}^{j+1}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2k}\varphi_n^{j+1}(x),$$

что и требовалось. Доказательство (9) проводится совершенно аналогичным образом.

Домножив скалярно (7) на $\varphi_k^{-1}(x)$, согласно (8) получим

$$c_k^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 \langle \varphi_n^0(x), \varphi_k^{-1}(x)\rangle =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 \langle \varphi_n^0(x), \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2k}\varphi_m^0(x)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 \overline{h_{n-2k}}.$$

Аналогичным образом после домножения (7) на $\psi_k^{-1}(x)$ согласно (9) имеем

$$d_k^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 \overline{g_{n-2k}}.$$

Запишем равенство (7) в общем случае для разложения $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$. Получим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j \varphi_n^j(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j \psi_n^j(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1}\varphi_n^{j+1}(x). \tag{10}$$

Откуда при помощи (8) и (9) после домножения (10) соответственно на $\varphi_k^j$ и $\psi_k^j$ получаются общие формулы декомпозиции

$$c_k^j = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1}\overline{h_{n-2k}}. \tag{11}$$

и

$$d_k^j = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1}\overline{g_{n-2k}}. \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) похожи на обычную свертку двух последовательностей, хотя и несколько отличаются от свертки. Для того чтобы они превратились в свертку (правда прореженную), можно сделать замены $\overline{h_{n-2k}} \mapsto h'_{2k-n}$ и $\overline{g_{n-2k}} \mapsto g'_{2k-n}$. Несмотря на сделанные замечания, в дальнейшем мы будем для простоты называть выражения (11) и (12) свертками.

Процесс разложения пространства $V^0$ в ортогональную сумму

$$V^0 = W^{-1} \oplus W^{-2} \oplus \cdots \oplus W^{-k} \oplus V^{-k} \tag{13}$$

для конкретного элемента пространства $V^0$, с координатами $\{c_n^0\}$ заключается в последовательном выполнении операций (11) и (12) для $j = -1, -2, \ldots, -k$.

Рассмотрим теперь обратную задачу — задачу реконструкции функции по известным коэффициентам разложения по базису всплесков. Итак, пусть мы имеем для некоторой функции из $V^0$ разложение по всплескам (13). Требуется восстановить коэффициенты ее разложения по базису целочисленных сдвигов масштабирующей функции $\varphi$, т. е. мы имеем совокупность коэффициентов $\{d_n^j\}, \{c_n^{-k}\}, j = -1, -2, -k; n \in \mathbb{Z}$, по которым восстановим последовательность $\{c_n^0\}$.

Домножив скалярно равенство (10) на $\varphi_k^{j+1}$ и воспользовавшись формулами (8) и (9), получим

$$c_k^{j+1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j \langle \varphi_n^j, \varphi_k^{j+1} \rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j \langle \psi_n^j, \varphi_k^{j+1} \rangle =$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2n} \varphi_m^{j+1}, \varphi_k^{j+1} \right\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_{m-2n} \varphi_m^{j+1}, \varphi_k^{j+1} \right\rangle =$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j h_{k-2n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j g_{k-2n}.$$

Таким образом, мы получили формулу реконструкции

$$c_k^{j+1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j h_{k-2n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j g_{k-2n}, \tag{14}$$

обращающую формулы (11) и (12).

Обсудим некоторые особенности формул (11), (12) и (14).

Заметим, что правую часть формулы (14) можно считать суммой двух сверток, если между элементами последовательностей $c_n^j$ и $d_n^j$ вставить нули, т.е. ввести новые последовательности $\tilde{c}_n^j$ и $\tilde{d}_n^j$ по формулам $\tilde{c}_{2n}^j = c_n^j$, $\tilde{c}_{2n+1}^j = 0$, $\tilde{d}_{2n}^j = d_n^j$, $\tilde{d}_{2n+1}^j = 0$. После такого преобразования формула (14) запишется в виде

$$c_k^{j+1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n^j h_{k-n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n^j g_{k-n}.$$

Однако следует иметь в виду, что половина арифметических операций в этой формуле состоит в добавлении нуля и умножении на нуль.

Вспомнив, что последовательность $g_n$ получается перестановкой элементов в последовательности $h_n$, получим, что как формулы разложения, так и формулы реконструкции порождаются одной и той же последовательностью при помощи операции комплексного сопряжения, изменения порядка нумерации и изменения знака у некоторых элементов.

Приведенный алгоритм называется *каскадным.* Для получения коэффициентов разложения $\{d_n^{j-1}\}$ и $\{c_n^{j-1}\}$ на $(j-1)$-м уровне требуется предварительно найти коэффициенты $\{c_n^j\}$. Это обстоятельство можно было бы отнести к недостаткам метода, однако именно благодаря каскадному алгоритму затраты на вычисление коэффициентов оказываются минимальными. В самом деле, если в последовательности коэффициентов $\{h_n\}$ только $N$ из них отличны от нуля, то в случае, если мы знаем коэффициенты $\{c_n^j\}$, для нахождения одного коэффициента $d_n^{j-1}$ согласно формуле (12) требуется $N$ умножений и $N-1$ сложение. Таким образом, затраты на вычисление одного коэффициента пропорциональны числу $N$ и не зависят от уровня $j$. В то же время, если вычислять коэффициенты $d_n^{j-1}$ непосредственно, исходя из последовательности $c_n^0$, то учитывая увеличение носителя базисных всплесков вдвое при уменьшении индекса $j$ на единицу, получим, что затраты на вычисление одного коэффициента вырастают вдвое при переходе от уровня с большим номером к уровню с меньшим номером. Нетрудно проверить, что при такой реализации в случае вычисления всех коэффициентов $\{d_n^j\}$, $j=-1,-2,\dots,-j_0$ средние затраты на вычисление одного коэффициента пропорциональны $j_0 N$.

## §7. Связь алгоритмов разложения по всплескам с традиционными методами цифровой обработки.

Важно отметить, что хотя мы и получили формулы (6.11), (6.12) и (6.14) исходя из конструции КМА пространства функций с непрерывным аргументом, опираясь на разложения по базисам сдвигов и растяжений функций $\varphi$ и $\psi$, эти формулы имеют дискретный характер. Исходный входной сигнал в них присутствует в виде его коэффициентов разложения по базису, а от базисных функций остались лишь коэффициенты их масштабирующих уравнений (3.1) и (5.9').

Поскольку, как мы заметили ранее, даже простейший алгоритм проектирования на пространство $V^0$, задаваемый формулой (6.5), не так уж плох, если относительно спектров исходного сигнала и функции $\varphi$ справедливы обычные наши требования о частотной локализации, то мы не уйдем далеко от истины, если будем называть последовательность $c_n^0$ входным сигналом или входной информацией. При этом ввиду ортогональности базиса сдвигов масштабирующей функции пространство $V^0$ с евклидовой метрикой и пространство последовательностей координат этих функций $\tilde{V}^0$ с $\ell^2$-нормой

$$\|\{c_n^0\}\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^0|^2}.$$

окажутся изоморфными. Проводя далее полученную параллель между пространствами функций непрерывного аргумента и коэффициентами их разложений по базисам сдвигов масштабирующей функции, можно построить параллельную теорию КМА пространств функций дискретного целочисленного аргумента (последовательностей).

Здесь мы остановимся и не будем развивать дальше теорию дискретных КМА. Приведенные выше рассуждения нам были нужны, чтобы сделать вывод о том, что на практике теория КМА сигналов с непрерывным аргументом распадается на две почти независимые части, первая из которых состоит в отображении непрерывной функции в последовательность чисел и далее производится уже то, что принято называть цифровой фильтрацией.

Давайте сравним процесс получения разложений по базисам всплесков с обычными алгоритмами цифровой обработки. Предварительно договоримся обозначать последовательности вида $\{c_n^j\}$ и $\{d_n^j\}$ через $c^j$ и $d^j$. Таким образом, $c^j$ и $d^j$ можно трактовать либо как бесконечномерные векторы, либо как функции дискретного аргумента.

В цифровой фильтрации чаще всего используются фильтры, которые с математической точки зрения являются линейными операторами, коммутирующими со сдвигом. Они задаются некоторой числовой последовательностью $s$ с компонентами $\{s_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, порождающей свертку

$y = s * x$, что в координатной форме можно записать

$$y_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n x_{k-n}.$$

В частотной области этот оператор представляется в виде произведения спектров $\hat{y} = \hat{s}\hat{x}$.

Формулы (6.11) и (6.12) можно рассматривать как композицию двух операторов, первый из которых свертка

$$\tilde{c}_k^j = \sum c_n^{j+1} \overline{h_{n-k}},$$

а второй — прореживание временной сетки $c_k^j = \tilde{c}_{2k}^j$. Найдем преобразование Фурье формулы (6.11). Для первого оператора имеем

$$\hat{\tilde{c}}^j(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1}\overline{h_{n-k}} e^{-i\omega k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1} e^{-i\omega n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{h_{n-k}} e^{-i\omega(k-n)} =$$
$$\hat{c}^{j+1}(\omega)\overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{n-k} e^{-i\omega(n-k)}} = \sqrt{2}\hat{c}^{j+1}(\omega)\overline{m_0(\omega)}. \quad (1)$$

Второй оператор (прореживание) ведет к преобразованию спектра по формуле

$$\hat{c}^j(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j e^{-in\omega} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_{2n}^j e^{-in\omega} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n^j e^{-in\omega/2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n^j e^{-in(\omega/2+\pi)}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\tilde{c}}^j(\omega/2) + \hat{\tilde{c}}^j(\omega/2+\pi)\right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{c}^{j+1}(\omega/2)\overline{m_0(\omega/2)} + \hat{c}^{j+1}(\omega/2+\pi)\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\right). \quad (2)$$

Аналогичным образом из формулы (6.12) получим

$$\hat{\tilde{d}}^j(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1}\overline{g_{n-k}} e^{-i\omega k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1}(-1)^{1-n+k} h_{1-n+k} e^{-i\omega k} =$$
$$e^{i\omega}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{j+1} e^{-i\omega n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{1-n+k} e^{-i(\omega+\pi)(1-n+k)} = \sqrt{2}\hat{c}^{j+1}(\omega) e^{i\omega} m_0(\omega+\pi). \quad (3)$$

и

$$\hat{d}^j(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{\tilde{d}}^j(\omega) + \hat{\tilde{d}}^j(\omega+\pi)\right) =$$

$$\frac{e^{i\omega/2}}{\sqrt{2}}\left(\hat{c}^{j+1}(\omega/2)m_0(\omega/2+\pi) - \hat{c}^{j+1}(\omega/2+\pi)m_0(\omega/2)\right). \quad (4)$$

Формула восстановления в частотной области запишется в виде

$$\hat{c}^{j+1}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j h_{k-2n} e^{-i\omega k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j g_{k-2n} e^{-i\omega k} =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j e^{-2i\omega n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{k-2n} e^{-i\omega(k-2n)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^j e^{-2i\omega n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{k-2n} e^{-i\omega(k-2n)} =$$

$$\sqrt{2}\hat{c}^j(2\omega)m_0(\omega) + \hat{d}^j(2\omega)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-k+2n}\overline{h_{1-k+2n}}e^{-i\omega(k-2n)} =$$

$$\sqrt{2}\hat{c}^j(2\omega)m_0(\omega) + e^{-i\omega}\hat{d}^j(2\omega)\overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{1-k+2n}e^{-i(\omega+\pi)(1-k+2n)}} =$$

$$\sqrt{2}\hat{c}^j(2\omega)m_0(\omega) + \sqrt{2}e^{-i\omega}\hat{d}^j(2\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)}. \quad (5)$$

Разумеется, если подставить $\hat{c}^j(\omega)$, $\hat{d}^j(\omega)$ из (2) и (4) в (5), то получим тождество.

Вернемся к формулам (6.11) и (6.12). Попытаемся на качественном уровне объяснить их естественность и разумность с точки зрения традиционных методов фильтрации сигналов.

Первый этап обработки, описываемый формулами (1) и (3) состоит в применении двух традиционных цифровых фильтров, первый из которых выделяет нижние частоты ($|\omega| \le \pi/2$), а другой (октавный) фильтр выделяет верхние частоты $\pi/2 \le |\omega| \le \pi$. Отметим, что если не учитывать фазовые характеристики фильтров, то обработка в формулах (1) и (3) осуществляется двумя сдвигами на $\pi$ по частоте одного и того же фильтра, который определяется функцией $m_0$.

Поскольку на выходе фильтра (1) в сигнале отсутствует верхняя половина частот, то слишком расточительно для его хранения использовать все целочисленные отсчеты. Если фильтр $m_0$ достаточно хорош, то исходный сигнал можно восстановить и по прореженной в два раза сетке временных отсчетов. Именно эту идею реализует формула (2). Безусловно, если $m_0$ не определяет идеальный полосовой фильтр, то применение формулы (2) приведет к наложению частот, что нужно учитывать в случае, когда выход формулы (2) представляет самостоятельный интерес и его предполагается использовать в качестве выходного сигнала.

Верхняя частота сигнала при прохождении через фильтр (3) не уменьшилась, однако этот фильтр освобождает место в полосе низких частот $[-\pi/2, \pi/2]$. Поэтому прореживание сигнала согласно формуле (4) приводит к транспонированию верхних частот на освободившееся место. При этом, опять-таки, если фильтр достаточно хорош, то наложение частот может произойти лишь вблизи границы частотного диапазона.

Таким образом, мы разделили входной сигнал на два выходных, каждый из которых несет информацию о своей "половине" частот. При этом за счет прореживания количество информации на выходе не увеличивается.

Идея использования такого типа разложения для дальнейшей обработки возникла до появления устоявшейся теории разложений по всплескам. Впервые эта схема первичной обработки с точным восстановлением, названная субполосным кодированием[8] была предложена в [V] и в некоторых других работах того времени. Более ранние версии не допускали точного восстановления сигнала.

Перекрытие частот, появляющееся ввиду неидеальности фильтра $m_0$, не очень принципиально, для всплеск-разложений, поскольку не ведет к искажению информации ввиду того, что формула (6.14) точно восстанавливает сигнал.

## §8. Пакеты всплесков.

Несмотря на оправданность классической схемы всплеск-разложения, описанной в §§2 – 6 она, разумеется, не является универсальной для всех случаев. Для изложения идеи пакетов всплесков нам удобно будет остаться на позициях субполосного кодирования, т.е. мы будем считать, что $c^0$ входной сигнал, результатом разложения которого станут сигналы $d^{-1}$, $d^{-2}$, ..., $d^j$, $c^j$, где $j < 0$. В рамках этой схемы фактически происходит разложение сигнала в сумму сигналов, ширина спектров которых равна октаве. Однако выбор октавного разрешения в частотной области не всегда соответствует решаемой задаче.

Койфман и Мейер (см., напр., [CM]) предложили гибкую систему выбора базисов, названных ими *пакетом всплесков*. Основная идея состоит

[8]Subband filtering scheme

в следующем. После разбиения сигнала $c^0$ на две равные по абсолютной величине полосы частот мы получаем два сигнала $c^{-1}$ и $d^{-1}$, первый из которых, несущий информацию о нижних частотах, при традиционном всплеск-разложении идет в дальнейшую обработку при помощи тех же фильтров, которые были уже использованы на первом шаге. Сигнал $d^{-1}$ при этом остается на хранение и считается готовым к применению других процедур, например компрессии. Однако вполне может оказаться, что появившийся на этом этапе (или на любом другом из этапов всплеск-разложения) сигнал $d^{-1}$ из пространства всплесков имеет частотное наполнение такого же вида, как и сигнал $c^{-1}$ и ничуть не в меньшей мере "заслуживает" применения процедуры обработки по формулам (6.11) и (6.12). Разумеется, относительно каждого из полученных после такой обработки сигналов можно снова принимать решение о целесообразности его дальнейшей обработки или об отправке его на хранение. О возможном алгоритме принятия такого решения речь пойдет в конце этого параграфа.

Итак, на языке теории всплесков идея введения пакетов всплесков состоит в том, что пространства $V$ и $W$, возникающие на выходе любого из этапов всплеск-разложения, совершенно равноправны. К каждому из них может быть применена процедура всплеск-разложения, т.е. каждое из них может иметь свои собственные пространства $V$ и $W$. На Рис. 1 приведен граф, вершинами которого являются все возможные для формирования пакета всплесков пространства. Самый верхний нулевой уровень графа состоит из одной вершины, соответствующей пространству $V^0 = W_0^0$, а вообще, в произвольном $j$-м уровне $(j \leq 0)$ графа находятся вершины, которые соответствуют пространствам, отвечающим за $2^j$-ю часть спектра пространства $V^0$.

Любой всплеск-пакет является связным конечным подграфом $G$ данного графа, удовлетворяющим следующим свойствам:

а) Вершина $V^0 = W_0^0$ принадлежит $G$;

б) В каждой из вершин граф $G$ либо разветвляется на две части, либо прерывается

Пример такого графа приведен на Рис. 2

Мы умышленно здесь ограничились рассмотрением конечных подграфов, поскольку для бесконечных графов без углубления в конкретные свойства базисных функций или функции $m_0$ невозможно решить проблему о возможности представления пространства $V^0$ в виде прямой суммы пространств, соответствующих конечным вершинам графа $G$.

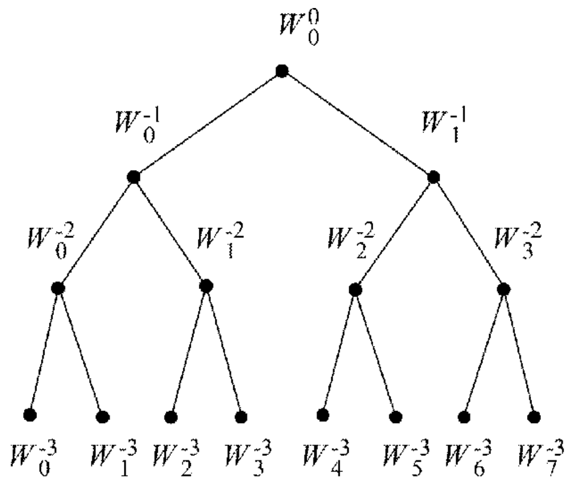



Рис. 1

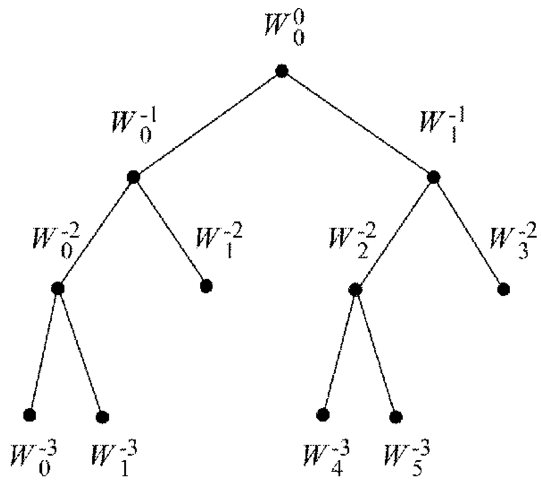



Рис. 2

В какой-то момент изложения идеи пакета всплесков мы перешли с языка фильтрации сигналов на язык разложения пространств. Сейчас мы дадим формулы этого перехода и покажем, что любому пакету всплесков в самом деле соответствует некоторая ортогональная сумма новых пространств.

Будем считать, что некоторый КМА зафиксирован. Пусть, как всегда, $m_0$ — функция, определяемая масштабирующим уравнением (4.1). Через $m_1$ здесь и далее будет удобно обозначать функцию $m_1(\omega) = e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}$, определяемую масштабирующим уравнением для всплеска (5.9′). Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть произвольная функция $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ такова, что ее сдвиги $f(x-n)$ образуют ортонормированную систему, и*

$$f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k f(x-k),$$

$$f_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k f(x-k).$$

*Тогда набор сдвигов $\{f_1(x-2n)\}$ и $\{f_2(x-2n)\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) образует ортонормированный базис линейной оболочки системы сдвигов $\{f(x-n)\}$.*

Заметим, что, вообще говоря, функция $f$ не имеет никакого отношения ни к функциям $m_0$ и $m_1$, ни к нашему КМА. Из леммы 1 можно сделать заключение, что если функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$, задающие разные КМА, "поменяются" своими функциями $m_0$, то хотя после такой замены и не появятся функции с растянутым в два раза аргументом, т. е. не будет эффекта масштабирования, но мы получим ортогональную сумму двух пространств, каждое из которых отвечает за свою половину спектра. При этом на выходе масштабирующих уравнений появятся функции, чьи двойные сдвиги образуют ортонормированные базисы в данных пространствах.

Полное доказательство леммы 1 можно найти, например, в [D2,§10.5]. Здесь мы приводить его не будем, поскольку оно легко проводится при помощи техники, уже использованной нами в §§4 и 5.

Получим теперь формулу вычисления базисов. Сначала договоримся об обозначениях. Через $W_k^j$, где $j < 0$, $0 \le k < 2^{-j}$ мы будем обозначать пространство соответствующее вершине графа (Рис. 1), находящейся на $j$-м уровне на $k$-м месте слева, где нумерация начинается с нуля. Например, $W_0^j = V^j$, $W_1^j = W^j$. Через $\psi_k^j$ мы будем обозначать функцию, чьи $2^{-j}$ сдвиги образуют ортонормированный базис пространства $W_k^j$, и такую, что коэффициенты проекции на пространство $W_k^j$ элементов порождающего его пространства $W_l^{j+1}$ более высокого уровня (см. Рис. 1) вычисляются при помощи либо фильтра $m_0$, либо фильтра $m_1$. Заметим, что в данном случае, число $l$ равно целой части деления пополам числа $k$, а индекс функции $m_i$ равен величине остатка от этого деления. Таким образом, справедливо (рекуррентное) равенство

$$\hat{\psi}_k^j(\omega) = m_i(2^{-j-1}\omega)\hat{\psi}_l^{j+1}(\omega),$$

опираясь на которое как на шаг индукции получим следующий общий результат.

Пусть $j \le 0$, $0 \le k < 2^{-j}$. Причем $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{|j|}$ — представление числа $k$ в двоичном виде. Тогда

$$\hat{\psi}_k^j(\omega) = \hat{\varphi}(\omega)\prod_{l=0}^{|j|-1} m_{\alpha_l}(2^l\omega). \tag{1}$$

Несмотря на безусловную важность формулы (1) для теории, на практике, оставаясь на позициях цифровой фильтрации часто можно обойтись и без знания базисных функций, однако в случае, когда обработка начинает давать сбои, полезно посмотреть на базисную функцию, для того чтобы глубже понять с чем мы имеем дело.

Следует иметь в виду, что увеличение частотного разрешения ведет к ухудшению разрешения временного. При этом при обычном всплеск-разложении относительная ширина полосы частот, соответствующая каждому пространству $W^j$ остается постоянной, что не только допускает, но и оправдывает ухудшение временной локализации базисных функций. В случае же пакета всплесков при ухудшении временной локализации базисных функций уменьшается относительная ширина полосы, т.е. отношение ширины полосы к ее верхней частоте. При этом произведение размера носителя базисных функций на ширину их преобразования Фурье все-таки остается неизменным.

Существует много предпосылок, позволяющих оправдать использование пакетов всплесков. Вспомним, например, упомянутый в §1 принцип "похожести" приближаемой и приближающей функции. Если посмотреть на осциллограмму речевого сигнала, то видно, что в нем присутствует большое число синусоподобных сигналов, промодулированных низкочастотным достаточно быстро затухающим сигналом. Что позволяет предположить, что для представления или сжатия таких сигналов как раз подойдут пакеты всплесков, а может быть, и оконное преобразование Фурье. Ясно, что пакеты всплесков поставляют нам широкий выбор ортогональных базисов (каждый допустимый граф определяет новый базис), каждый из которых имеет шанс стать лучшим для конкретной задачи.

В настоящее время существует много базисов всплесков и выбор базиса, который подходит к решению конкретной задачи совсем непрост. Однако, даже остановившись на некотором из базисов, выбрать подходящий пакет всплесков (подграф графа, изображенного на Рис. 1) среди их огромного количества представляется совсем не простой задачей.

В связи с этим очень удачным представляется адаптивный алгоритм выбора подходящего пакета всплесков, предложенный в работе [CM]. Критерием качества выбора базиса в предлагаемом алгоритме берется величина

$$E = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \ln |a_n|, \tag{2}$$

где $a_n$ — коэффициенты разложения по базису функции $f$. При этом считается, что в случае, когда $a_k = 0$ соответствующее слагаемое в (2) равно нулю. Сама величина $E$ называется *энтропией* функции $f$ относительно заданного базиса. Чем меньше энтропия, тем лучше.

Существует много разных определений энтропии, но суть у них одна

— большая энтропия говорит о "размазанности" функции по базисным компонентам. Энтропия мала, когда большая часть нормы функции сосредоточена на малом числе базисных направлений. Именно в этом случае информация о функции может быть существенно сжата. И именно в этом случае упрощаются задачи распознавания сигналов и их классификации.

Идея алгоритма чрезвычайно проста. Каждое из появляющихся в процессе разложения пространств $W_k^j$ представляется в виде $W_k^j = W_{2k}^{j-1} \oplus W_{2k+1}^{j-1}$ и производится проверка относительно какого из базисов $\left\{\{\psi_{2k}^{j-1}(x-2^{1-j}k)\}, \{\psi_{2k+1}^{j-1}(x-2^{1-j}k)\}\right\}$ или $\{\psi_k^j(x-2^{-j}k)\}$ значение энтропии меньше. В случае, если энтропия меньше для первого базиса, то сохраним коэффициенты разложения по базису $\{\psi_k^j(x-2^{-j}k)\}$ и больше их трогать не будем. В противном случае коэффициенты разложения по базисам $\{\psi_{2k}^{j-1}(x-2^{1-j}k)\}$ и $\{\psi_{2k+1}^{j-1}(x-2^{1-j}k)\}$ подвергнем дальнейшей переработке.

Стоит отметить, вычислительные затраты такого адаптивного алгоритма значительно выше, чем у алгоритма с фиксированным графом, поскольку часть этих затрат используется только для сравнения энтропий.

Благодаря богатству выбора базисных элементов, получающихся при построении пакета всплесков, для выбора хорошего представления функции $f$ в виде линейной комбинации малого количества функций может быть использован алгоритм, имеющий английское название matching pursuit. Его суть применительно к пакетам вплесков заключается в следующем. Для функции $f$ строится полное разложение в пакет всплесков. Среди полученных на всех уровнях графа коэффициентов выбирается максимальный. Из функции $f$ вычитается соответствующая выбранному коэффициенту базисная функция, помноженная на этот коэффициент. К полученному остатку снова применяется процедура разложения в пакет всплесков и среди вычисленных заново коэффициентов ищется максимальный и т. д. пока функция $f$ не будет приближена с заданной точностью. Поскольку на каждом шаге выбирается наилучший приближающий элемент, данный алгоритм позволяет достичь хорошего приближения функции $f$ суммой малого числа слагаемых. Однако ясно, что такой алгоритм является сверхзатратным, так как для получения каждого очередного коэффициента требуется вычислить полное разложение в пакет всплесков.

## §9. Периодические всплески

В приложениях обычно приходится рассматривать сигналы на конечном промежутке времени или пространства. В идеале хотелось бы иметь теорию всплесков адаптированную к отрезку. Попытки такого построения были, но насколько нам известно, не нашли широкого применения из-за необходимости при реализации алгоритма учитывать краевые эффекты. Поэтому чаще всего сигнал периодизируют каким-либо подходящим способом, чтобы не было плохого места склейки.

Для работы с периодическими сигналами необходимо построение теории периодических всплесков. Вообще, существует два возможных подхода к построению такой теории. Первый из них основан на периодизации непериодических КМА. Другой подход, который мы здесь рассмотрим является аксиоматическим. В этом случае процесс конструирования периодических КМА никак не связан с их непериодическими аналогами. Хотя для подавляющего числа реализаций КМА периодический может быть получен периодизацией непериодического КМА и наоборот. Полной ясности о том, когда это возможно, в данный момент нет.

Мы рассматриваем здесь максимально общий подход к определению КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ широкого круга квазибанаховых пространств периодических распределений (обобщенных функций). Заметим, что появление КМА обобщенных функции вовсе не является бесполезной для практических приложений абстракцией. Даже, если предположить, что для описания сигналов достаточно пространств непрерывных (или даже гладких) функций, то из дальнейшего изложения будет видно, что для введения разумным образом понятия пространств всплесков совершенно необходимо понятие КМА сопряженного пространства непрерывных линейных функционалов, которое тем шире, чем у́же исходное пространство. Ограничивать же себя рассмотрением лишь пространства $\mathbb{L}^2$ не сто́ит, поскольку, как уже было сказано во Введении, евклидова метрика в приложениях редко оказывается самым удачным выбором.

Этот параграф в большей степени математизирован, чем предыдущие, но все результаты приводятся без доказательства и снабжены комментариями. Как нам кажется, в теории периодических всплесков удается дойти до гораздо более глубоких вещей, аналоги которых для непериодического случая выписать пока не удается.

Обозначим через $\mathbb{D}$ пространство $2\pi$-периодических распределений. Полное построение теории периодических распределений приводится, например, в [Э]. Напомним некоторые основные свойства распределений. Распределения могут рассматриваться либо как ограниченные линейные функционалы, действующие на пространстве бесконечнодифференцируемых функций $\mathbb{C}^\infty$, либо как формальные тригонометрические ряды

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

с последовательностями коэффициентов Фурье $\hat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} c_n$, имеющими не более чем степенной рост. Свертка распределений $f$ и $g$ определяется по формуле

$$f * g\,(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)e^{inx},$$

что для суммируемых функций совпадает с интегральным определением свертки

$$f * g\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Через $f_r$ мы обозначим свертку $f$ с ядром Пуассона $\mathcal{P}_r(x)$,

$$f_r(x) = f * \mathcal{P}_r\,(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{inx},$$

$$\mathcal{P}_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}.$$

Заметим, что мы можем считать $(r, x)$ полярными координатами, где $r$, $0 \le r \le 1$ имеет смысл длины радиус-вектора, задающего точку $(r, x)$, а $x$ имеет смысл полярного угла. Тригонометрический ряд, определяющий функцию $f_r$ при $0 \le r < 1$ абсолютно сходится, и последняя формула задает в открытом единичном круге гармоническую функцию. Причем разные распределения определяют разные гармонические функции. Таким образом, абстрактное математическое понятие обобщенной функции обретает плоть в виде графика $y = f_r(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, который можно уже́ увидеть и "потрогать". Само распределение $f$ получается как граничное значение $f_r$ при $r = 1$. Иными словами, находясь на единичной окружности, трудно понять, что такое распределение. Для лучшего понимания нужно сойти внутрь круга, который эта окружность ограничивает.

Напомним, что нормированное пространство называется *банаховым*, если оно полно. Многие функциональные пространства (например, пространства Харди $H^p$) не являются нормированными, однако в них определен другой функционал, называемый *квазинормой*. Его отличие от нормы состоит в том, что вместо неравенства треугольника в нем справедливо другое более слабое неравенство $\|x + y\| \le C(\|x\| + \|y\|)$ для некоторого $C > 1$.

Пусть $X \subset \mathbb{D}$ — квазибанахово пространство. Через $M(X, \mathbb{L}^\infty)$ мы обозначим пространство ограниченных операторов свертки (точнее, ядер таких операторов), действующих из $X$ в $\mathbb{L}^\infty$.

Определение 1. Через $\mathfrak{H}$ мы обозначим класс квазибанаховых пространств $X$ с квазинормой $\| \bullet \mid X \|$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $\mathbb{C}^\infty \subset X \subset \mathbb{D}$;

b) $\| f \mid X \| = \sup\limits_{r<1} \| f_r \mid X \|$ для любого $f \in X$;

c) $X$ инвариантно относительно замен переменных $x \mapsto \pm x + \tau$ и $x \mapsto 2x$, а также относительно замены $x \mapsto x/2$ для $\pi$-периодических функций;

d) $X$ инвариантно относительно поточечного умножения на функции $\exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$;

e) $f \in X$ в том и только том случае, когда $\bar{f} \in X$.

Грубо говоря, класс распределений принадлежит $\mathfrak{H}$, если его элементы можно подвергать некоторым элементарным преобразованиям, не выходя при этом за пределы класса. Кроме того свойство a) требует, чтобы распределения на границе были "привязаны" в смысле нормы к своим значениям внутри круга.

Заметим, что большинство классических пространств распределений (таких, как пространства Лебега и Харди, пространства Бесова—Лизоркина—Трибеля, пространства Орлича, пространство конечных борелевских мер и многие другие) принадлежат $\mathfrak{H}$.

Нас будут интересовать лишь проблемы сходимости, а не ее скорости. Поэтому мы можем полагать, что нормы всех пространств $X \in \mathfrak{H}$ инвариантны относительно сдвигов аргумента и комплексного сопряжения. В противном случае, согласно свойствам c) и e) мы можем выполнить подходящую перенормировку.

В [П5] был введен класс пространств распределений $\mathcal{H}$, который весьма близок к классу $\mathfrak{H}$. По крайней мере эти классы имеют много общих свойств.

Пусть $X \in \mathfrak{H}$, тогда через $\overset{\circ}{X}$ (или $X^\circ$) обозначим пополнение пространства $\mathbb{C}^\infty$ по квазинорме пространства $X$;

$$\overset{\square}{X} \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathbb{D} \;\Big|\; \sup_{r<1} \| f_r \mid X \| < \infty \right\};$$

$$[X] \overset{\text{def}}{=} \left\{ Y \in \mathfrak{H} \;\Big|\; \overset{\circ}{X} \subset Y \subset \overset{\square}{X} \right\}.$$

Операция $[\bullet]$ разбивает $\mathfrak{H}$ на классы эквивалентности. Как обычно, через $X^*$ обозначим пространство непрерывных линейных функционалов на $X$.

Далее $\langle f, g \rangle$ — значение линейного функционала $g \in X^*$ на распределении $f \in X$. Далее эта операция будет служить естественной заменой скалярного произведения, отсутствующего в пространстве, отличном от $\mathbb{L}^2$.

Хорошо известно, что в случае $X = \mathbb{C}^\infty$ мы можем полагать

$$\langle f, g \rangle \overset{\text{def}}{=} f(\bullet) * \bar{g}(-\bullet)(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\hat{\bar{g}}(n), \tag{1}$$

где ряд абсолютно сходится. Та же формула применима для произвольного пространства $X = \overset{\circ}{X}$. При этом ряд в (1) не сходится абсолютно, но суммируется методом Абеля — Пуассона.

Свойство 1. *Пусть $X \in \mathfrak{H}$, $Y \in [X]$. Тогда $M(Y, \mathbb{L}^\infty) = (\overset{\circ}{X})^* \in \mathfrak{H}$.*

Замечание. Можно также доказать, что для $X \in \mathfrak{H}$ множество компактных операторов свертки, действующих из $X$ в $\mathbb{L}^\infty$, совпадает с $(\overset{\circ}{X})^{*\circ}$.

Свойство 2. *Пусть $X \in \mathfrak{H}$ — банахово пространство. Тогда*

$$M(M(X, \mathbb{L}^\infty), \mathbb{L}^\infty) = M(M(\overset{\square}{X}, \mathbb{L}^\infty), \mathbb{L}^\infty) = X^{\circ*\circ*} = \overset{\square}{X}.$$

Замечание. Для квазибанахова (но не банахова) пространства $X$ Свойство 2 утрачивает силу. Это следует из того, что $X^{\circ*\circ*}$ — банахово.

Определение 2. Мы будем говорить, что $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — последовательность линейных подпространств пространства $\overset{\circ}{X} \in \mathfrak{H}$ — образует *Кратномасштабный анализ* (КМА) пространства $X \in \mathfrak{H}$, если она удовлетворяет условиям:

1) a) $V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^j \subset \ldots \subset X$;

b) $\dim V^j = 2^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup_{j \geq 0} V^j$ плотно в $\overset{\circ}{X}$;

3) a) $V^0$ состоит из постоянных;

b) если $f(x) \in V^j$, то $f(2x) \in V^{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

c) если $f(x) \in V^{j+1}$, то $f(x/2) + f(x/2 + \pi) \in V^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

d) каждая функция пространства $f \in V^{j+1}$ представима в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x + 2\pi \cdot 2^{-j-1}) + f_3(2x)$, где $f_1, f_2, f_3 \in V^j$, $j = 1, 2, \ldots$

Замечание 1. Мы определили КМА не только для $\mathbb{L}^2$, но и для произвольного $X \in \mathfrak{H}$. Это определение отличается от других известных определений (см., напр., [H], [PB]) даже для $X = \mathbb{L}^2$. Мы изначально не требуем ни того, чтобы пространства $V^j$ были линейной оболочкой сдвигов одной функции, ни даже инвариантности пространств $V^j$ относительно сдвига аргумента на $2\pi 2^{-j}$. Тем не менее, определенные нами КМА обладают указанными свойствами. Главной же отличительной чертой нашего определения является тот факт, что оно гарантирует однозначность восстановления КМА по любому из пространств $V^j$ $(j > 0)$. Этим свойством не обладают некоторые из описанных в литературе примеров КМА. Так, например, полиномиальные КМА, рассмотренные Ч.Чуи, Х.Маскаром [ChM] и И.Мейером [M4], с нашей точки зрения не являются КМА. Все другие, известные нам примеры периодических КМА, удовлетворяют Определению 2. В работе [Sk1] было введено чуть более широкое определение КМА, покрывающее все известные частные случаи.

Естественно, Определение 2 может быть применено не только к пространствам из $\mathfrak{H}$, но и ко многим топологическим линейным пространствам, например к $\mathbb{C}^\infty$ или $\mathbb{D}$.

Пока не оговорено противное, мы полагаем $N = 2^n$, $L = 2^l$, $J = 2^j$ и так далее.

Пусть $\varphi^l \in X$, и верхний индекс $l$ определяет принадлежность $\varphi^l$ к $V^l$, тогда через $\vec{\varphi}^l$ мы обозначим вектор-функцию

$$\vec{\varphi}^l(x) = \left(\varphi^l(x), \varphi^l(x - 2\pi/L), \ldots, \varphi^l(x - 2\pi(L-1)/L)\right)^T.$$

Если ее компоненты линейно независимы, то они образуют *базис сдвигов*. В дальнейшем эта договоренность распространяется только на функции, обозначаемые греческими буквами.

Теорема 1. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Тогда существует такой набор функций $\{\varphi^j\}_{j=0}^{\infty}$, что компоненты векторов $\vec{\varphi}^l$ образуют базисы пространств $V^l$. Кроме того, для любых $j_1$, $j_2$, $0 \leq j_1 < j_2$, имеем*

$$\varphi^{j_1}(J_2 x/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1-1} \varphi^{j_2}(x + 2\pi k J_1/J_2).$$

Следствие. *Зафиксируем $j_0 > 0$. Если при условиях Теоремы 1 $\varphi^j$ удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J_0-1} a_n \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J)$$

*при $j = j_0$, то $\varphi^j$ удовлетворяют этому уравнению при всех $j \leq j_0$.*

Последовательность коэффициентов масштабирующего уравнения называют *маской.*

Доказательство Теоремы 1 опирается на несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть последовательность пространств $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ образует КМА пространства $X$. Тогда для каждого $j \geq 0$ найдется базис $v_n^j(x)$, $n = 0, 1, \ldots, J-1$, удовлетворяющий при $m \in \mathbb{Z}$ условиям:*
*1) $v_0^j \equiv 1$, $j \geq 0$;*
*2) для любого $k \neq n$, $0 \leq k, n < J$, $m \in \mathbb{Z}$, имеем $\hat{v}_n^j(k + Jm) = 0$;*
*3) справедливы рекуррентные соотношения*
*a) $\hat{v}_n^{j+1}(n+2Jm) = \hat{v}_n^j(n+2Jm)$ при нечетных $n$ (здесь и в дальнейшем мы полагаем $v_l^j \equiv v_{l+J}^j$);*
*b) $\hat{v}_n^{j+1}(n + 2Jm) = \hat{v}_{n/2}^j(n/2 + Jm)$ при четных $n$.*

Замечание. Очевидно, формулы пунктов 3a) и 3b) дают один и тот же результат для всех $n$ кроме случая $n = J$.

Базисы $v_n^j$, существование которых следует из Леммы 1, в случае периодических сплайнов изучались многими авторами (см., например, [Ж1], [Ж2], [Ж3]).

Сформулируем некоторые следствия Леммы 1.

Следствие 1. *Пространства* $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ *инвариантны относительно сдвига аргумента на* $2\pi/J$.

Следствие 2. *Любая из функций* $v_n^j$, $j > 0$, $0 < n < J$ *представима в виде ряда*

$$v_n^j(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{n+Jm}^j \exp(i(n+Jm)x),$$

*с ненулевыми коэффициентами.*

Введем обозначение $\vec{v}^j$ для вектора $(v_0^j, \dots, v_{J-1}^j)^T$.

Лемма 2. *Компоненты вектора* $\vec{\varphi}^j$ *образуют базис пространства* $V^j$ *в том и только том случае, когда функция* $\varphi^j$ *является линейной комбинацией элементов вектора* $\vec{v}^j$ *с ненулевыми коэффициентами.*

Напомним, что согласно известной теореме Винера линейная оболочка сдвигов функции $f \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$ плотна в $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$. В нашем случае пространство $V^j$ инвариантно относительно $2\pi/J$-сдвига, а элементы базиса $\vec{v}^j$ являются собственными функциями этого сдвига. Поэтому коэффициенты разложения функции по базису $\vec{v}^j$ можно рассматривать как ее спектр. Таким образом, Лемма 2 является аналогом теоремы Винера. Поэтому мы будем называть вектор-функцию $\vec{v}^j$ *базисом Винера* пространства $V^j$. Очевидно, что в каждом из пространств $V^j$ существует единственный с точностью до перенормировки и перестановки элементов базис Винера. Мы будем пользоваться естественной нумерацией его элементов, когда номер определяется гармониками, входящими в спектр данной функции. Базисы Винера и базисы сдвигов связаны между собой (с точностью до умножения функций $v_n^j$ на ненулевые множители) прямым ($F_J[\bullet]$) и обратным ($F_J^{-1}[\bullet]$) ДПФ порядка $J$:

$$\vec{v}^j(x) = F_J^{-1}[\vec{\varphi}^j(x)], \quad \vec{\varphi}^j(x) = F_J[\vec{v}^j(x)]. \tag{2}$$

Следующее утверждение дает полное описание всех возможных ортогональных базисов сдвигов в КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

Лемма 3. *Пусть* $\{v_j^n(x)\}_{j=0}^{N-1}$ *нормированный базис Винера пространства* $V^n$ *некоторого КМА пространства* $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. *Тогда функция* $\varphi^n(x)$

*порождает ортонормированный базис сдвигов пространства* $V^n$ *в том и только том случае, когда может быть представлена в виде*

$$\varphi^n(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k v_k^n(x),$$

*где* $|a_0|^2 = |a_1|^2 = \cdots = |a_{N-1}|^2 = 1/N$.

Далее в §10 будет приведен значительно более общий результат подобного типа.

Согласно Лемме 1 каждый КМА пространства $X$ порождается одной функцией $v_1^1$. Для описания всех возможных КМА пространства $X$ достаточно найти все *допустимые* функции $v_1^1$.

Теорема 2. *Функция* $v_1^1 \in \overset{\circ}{X} \in \mathfrak{H}$ *порождает КМА пространства* $X$ *тогда и только тогда, когда*

$$v_1^1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(i(2n+1)x),$$

*где все* $a_n$ *отличны от нуля.*

Традиционный подход к всплеск-пространствам $W^j$, изложенный в предыдущих параграфах, состоит в их определении как ортогонального дополнения пространства $V^j$ до $V^{j+1}$. Этот метод всплеск-представления функций $f \in \mathbb{L}^2$ основан на их аппроксимации ортогональными проекциями на пространства $V^j \subset \mathbb{L}^2$. Однако концепция "ортогональной проекции" теряет свое значение для произвольных пространств $X \in \mathfrak{H}$.

Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Компоненты вектор-функций $\{\vec{v}^j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют базисы Винера пространств $V^j$. Если $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ — КМА пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ с базисами Винера $\{\vec{p}^j\}_{j=0}^{\infty}$, и такой, что $\langle v_n^j, p_n^j \rangle \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots, J-1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, тогда мы будем говорить, что КМА $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ определяет *всплеск-проекцию* на КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$. Проектирование $X \mapsto V^j$ определяется формулой

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{J-1} \frac{\langle f, p_n^j \rangle}{\langle v_n^j, p_n^j \rangle} v_n^j.$$

Пространствами *всплесков* называются пространства

$$W^j = \{f \in V^{j+1} \mid \langle f, p_n^j \rangle = 0, \quad n = 0, 1, \dots , J-1\}.$$

Легко видеть, что в пространствах $W^j$ существует базис Винера, который может быть вычислен по формулам

$$w_n^j = \langle v_{n+J}^{j+1}, p_n^j \rangle v_n^{j+1} - \langle v_n^{j+1}, p_n^j \rangle v_{n+J}^{j+1}, \quad n = 1, 2, \dots , J-1,$$
$$w_J^j = v_J^{j+1}.$$

Таким образом, пространства $W^j$ инвариантны относительно сдвига аргумента на $2\pi/J$. Кроме того, имеет место представление

$$V^j = V^0 \oplus W^0 \oplus \dots \oplus W^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots ,$$

где $\oplus$ обозначает прямую сумму линейных пространств.

Очевидно, согласно Свойству 2 пространств из $\mathfrak{H}$ для банаховых пространств $X$ имеет место двойственная ситуация. КМА $\{V^j\}_{j=0}^\infty$ устанавливает всплеск-проекцию пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ на пространства $\{P^j\}_{j=0}^\infty$ и определяет всплеск-пространства $\{Q^j\}_{j=0}^\infty$. Это утверждение остается также в силе и для квазибанахова пространства $X$. В самом деле, если $\{V^j\}$ образует КМА квазибанахова пространства $X \subset Y \overset{\mathrm{def}}{=} X^{\circ * \circ *}$, то все нечетные гармоники функции $v_1^1$ отличны от нуля. Значит, согласно Теореме 2 $\{V^j\}$ образуют КМА банахова пространства $Y$. Однако КМА квазибанахова пространства $X$ не определяют все возможные всплеск-проекции на КМА $\{P^j\}$ пространства $(\overset{\circ}{X})^*$.

Теорема 3. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^\infty$ — произвольный КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$, КМА $\{P^j\}_{j=0}^\infty$ пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ определяет всплеск-проекцию, $\{W^j\}_{j=0}^\infty$ — соответствующие всплеск-пространства. Тогда найдется такой набор функций $\{\psi^j\}_{j=0}^\infty$, что компоненты векторов $\vec{\psi}^l$ образуют базисы пространств $W^l$. Кроме того, для любых $j_1$, $j_2$, $0 \le j_1 < j_2$ имеем*

$$\psi^{j_1}(J_2 x/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1 - 1} \psi^{j_2}(x + 2\pi k J_1/J_2).$$

Следствие. *Зафиксируем* $j_0 > 0$. *Если при условиях Теоремы 3* $\psi^j$ *удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\psi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J_0-1} b_n \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J),$$

*при* $j = j_0$, *то* $\psi^j$ *удовлетворяют ему для всех* $j \le j_0$.

Укажем один из способов нахождения функций $\psi^j$. Пусть $\vec{\xi}^n$ — базис сдвигов пространства $P^n$ двойственного КМА. Введем обозначения

$$\gamma_m = \langle \varphi^{n+1}(\bullet - 2\pi m/2N), \xi^n(\bullet)\rangle, \quad m = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Теорема 4. *Пусть*

$$\psi^n(\bullet + 2\pi/2N) = \sum_{m=0}^{2N-1} (-1)^m \gamma_m \varphi^{n+1}(\bullet + 2\pi m/2N). \tag{3}$$

*Тогда система функций* $\{\psi^n(\bullet - 2\pi m/N)\}_{m=0}^{N-1}$ *образует базис пространства* $W^n$.

Соотношение (3) напоминает хорошо известную формулу представления функции $\psi^n$ через компоненты вектора $\vec{\varphi}^{n+1}$ с ортогональными компонентами (см., [D1],[D2]). Фактически (3) уточняет смысл коэффициентов. Ее аналог для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ получен в [CDF].

Согласно определению КМА любой элемент $f$ пространства $X = X^\circ$ может быть приближен с произвольной заданной точностью элементами пространств, образующих его КМА. В случае же, когда для данного КМА задана всплеск-проекция, проекции $f$ на соответствующие пространства определяются однозначно и могут оказаться совсем не оптимальным выбором с точки зрения задач теории аппроксимации.

Принципиальным вопросом, связанным со всплеск-проекциями, является вопрос о возможности аппроксимации произвольной функции с наперед заданной точностью ее всплеск-проекциями. К сожалению эта задача далека от своего полного решения. Мы даем здесь ответ на поставленный вопрос в самом простейшем случае $X = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$, где

$$\| f \mid \ell^p \| \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^p \right)^{1/p}.$$

Как обычно, полагаем $q = p/(p-1)$ при $p > 1$; $q = \infty$ при $p = 1$.

Теорема 5. *Пусть* $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ *устанавливает всплеск-проекцию на КМА* $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ *пространства* $\ell^p$, $1 \le p < \infty$. *Любое распределение из* $\ell^p$ *может быть приближено с произвольной точностью своими проекциями на* $V^j$ *тогда и только тогда, когда множество чисел*

$$\left\{\{\Delta_{nj}\}_{n=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\left\{\frac{\| p_n^j \mid \ell^q \| \cdot \| v_n^j \mid \ell^p \|}{\langle v_n^j, p_n^j \rangle}\right\}_{n=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{\infty}$$

*ограничено.*

Замечание. Поскольку $(\ell^\infty)^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_0 \ne (\ell^\infty)^\circ$, где

$$\mathbf{c}_0 = \{f \in \mathbb{D} |\, \hat{f}(n) \to 0, \text{ когда } n \to \pm\infty\},$$

то Теорема 5 остается в силе лишь для $\mathbf{c}_0$, а не для $\ell^\infty$.

## §10. Периодические дискретные всплески.

Мы в §7 уже́ говорили, что после того как мы приняли решение о выборе пространства $V^j$ и нашли проекцию (или другое отображение) на него функции $f$ в нашем распоряжении окажется набор коэффициентов. Причем в случае периодического КМА их количество будет равно степени двойки. Поэтому имеет смысл "забыть" на время о происхождении функции и действовать в рамках теории дискретных всплесков, полное построение которой в периодическом случае мы здесь и приводим. Мы опускаем все доказательства. Их можно найти в [П2].

Пусть $N = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Мы будем рассматривать пространство $N$-периодических комплекснозначных функций целочисленного аргумента. Данное пространство мы обозначим через $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Мы построим теорию КМА $\{V^j\}_{j=0}^{n}$ и разложения по всплескам $V^0 \oplus W^0 \oplus \ldots \oplus W^{n-1}$ пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$. В дальнейшем (см. §§12, 15, 16, 20, 21) будут построены экономичные численные алгоритмы декомпозиции и реконструкции периодических функции дискретного аргумента.

При построении КМА пространства $N$-периодических функций дискретного аргумента появляются специфические проблемы, которые не могли возникнуть при рассмотрении всплесков на $\mathbb{R}$. Перечислим некоторые из них.

Изначально непонятно, как понимать растяжение (например, в 2 раза) аргумента функции, поскольку в этом случае функция оказывается неопределенной в промежуточных точках. Напротив, при сжатии аргумента появятся "лишние" точки. Порождаются ли базисы всех образующих КМА пространств сдвигами и растяжениями одной функции? Ответ на этот вопрос становится еще более неочевидным, если вспомнить, что мы рассматриваем периодический случай. Следовательно, мы получим $2N$-периодическую функцию, которая еще нуждается в периодизации. Представляется также важным, чтобы каждый КМА однозначно восстанавливался по любому из порождающих его пространств $V^j$, как это имеет место для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Все эти проблемы находят удовлетворительное решение в рамках предлагаемой ниже теории.

В то же время, на наш взгляд, существует по крайней мере два возможных подхода к определению пространств всплесков, ассоциированных с фиксированным КМА. Эти определения приводят, вообще говоря, к разным объектам.

Первый подход предусматривает определение пространства всплесков $W^j$ как ортогонального дополнения пространства $V^j$ до пространства $V^{j+1}$. При всей естественности такого определения оказывается, что этот набор всплеск-пространств не удовлетворяет некоторым естественным с точки зрения всплеск-анализа пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ свойствам. Например, в результате "растяжения" аргумента функции пространства $W^{j+1}$ может получиться функция, не принадлежащая пространству $W^j$. Существуют и другие причины, которые заставили нас рассмотреть еще один подход к всплескам. Одна из этих причин — существование экономичных алгоритмов, в том числе алгоритмов, поддающихся распараллеливанию. Пространства $W^j$, получающиеся при втором подходе, не являются взаимно неортогональными. Однако неортогональность не является недостатком конструкции, поскольку дискретизация ортогональных базисов (состоящих из непрерывных функций) КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ ведет, вообще говоря, как к нарушению ортогональности между элементами, так и между самими пространствами $W^j$.

Пространства $V^j$, порождающие КМА, и всплеск-пространства $W^j$ (для обоих определений) инвариантны относительно сдвигов аргумента на $N/J = 2^{n-j}$. Поэтому не является неожиданностью, что, как и для пространств функций непрерывного аргумента, в этих пространствах важную роль играют ортогональные базисы, состоящие из собственных векторов оператора $(N/J)$-сдвига, т. е. в нашей терминологии — базисы Винера. Фактически оператор перехода к этим базисам играет ту же роль, что и оператор дискретного преобразования Фурье в пространстве $\tilde{\mathbb{C}}^N$, а коэффициенты разложения играют роль спектра. Доказательства большинства приводимых ниже утверждений проще всего проводить, после перехода к данному базису.

В пространстве $\tilde{\mathbb{C}}^N$ будем рассматривать естественное скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \langle f(\bullet), g(\bullet)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\bar{g}(j).$$

Для матрицы $C$ (или для вектора) операция * будет означать транспонирование и комплексное сопряжение, т.е. $C^* = \bar{C}^T$. При этом, запись $C = \langle A(\bullet), B(\bullet)\rangle$, где $A$ и $B$ — функциональные матрицы или векторы, означает, что сначала выполняется умножение матрицы $A(\bullet)$ на матрицу $B^T(\bullet)$, а затем вычисляется скалярное произведение, т.е. $c_{km} = \sum_l \langle a_{kl}(\bullet), b_{ml}(\bullet)\rangle$. Кроме того, нам в дальнейшем будет удобно нумеровать элементы матриц и векторов, начиная с нуля, а не с единицы. Если не оговорено противное, далее будем по-прежнему полагать $N = 2^n$, $J = 2^j$, $L = 2^l$ и т.д.

Мы будем пользоваться векторно-матричной формой записи для операторов свертки и их обобщений. Возникающие при этом матрицы операторов являются либо циркулянтными размера $K \times K$, когда их элементы могут быть выражены формулой $a_{ij} = f(j - i)$, где $f(\bullet) \in \tilde{\mathbb{C}}^K$, либо прямоугольными размера $K \times 2K$ обобщенно циркулянтными с двойным сдвигом, т.е., когда $a_{ij} = f(j - 2i)$, $f(\bullet) \in \tilde{\mathbb{C}}^{2K}$, а также транспонированными к ним.

Определение 1. Последовательность линейных пространств $\{V^j\}_{j=0}^n$ называется кратно-масштабный анализом пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^j \subset \ldots \subset V^n = \tilde{\mathbb{C}}^N; \dim V^j = 2^j, j = 0, 1, 2, \ldots, n;$

2) а) $V^0$ состоит из констант;

б) если $f(\bullet) \in V^j$, то $g(\bullet) = f(2\bullet) \in V^{j+1}$;

в) если $f(\bullet) \in V^{j+1}$, то найдется такая функция $g(\bullet) \in V^j$, что $g(2\bullet) = f(\bullet) + f(\bullet + N/2)$;

г) Пространства $V^j$ инвариантны относительно сдвига аргумента на $2^{n-j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, т.е. для любой функции $f$ из $V^j$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $f(\bullet + k2^{n-j}) \in V^j$.

д) Для любого $j$, $1 \le j < n$, каждая функция $f \in V^{j+1}$ может быть представлена в виде $f(\bullet) = f_1(\bullet) + f_2(\bullet + k2^{n-j-1}) + f_3(2\bullet)$, где $k \in \mathbb{N}$, $f_1,\ f_2,\ f_3 \in V^j$.

Замечание. За исключением условия 2д), все остальные условия Определения 1 сходны с уже встречавшимися в литературе по периодическим всплескам с непрерывным аргументом (см., например, [PB]). Появление условия 2д) обусловлено тем, что мы хотели, чтобы КМА однозначно восстанавливался по любому из пространств $V^j$, а остальные условия не могут гарантировать этого свойства. В предыдущем параграфе мы уже́ упоминали примеры КМА, не обладающие данным свойством.

Пусть $\varphi^l \in V^l$, тогда через $\vec{\varphi}^l$ обозначим вектор-функцию

$$\vec{\varphi}^l(\bullet) = \left(\varphi^l(\bullet), \varphi^l(\bullet - N/L), \dots, \varphi^l(\bullet - (L-1)N/L)\right)^T, l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 1. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^n$ — произвольный КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Тогда для любого фиксированного $l$, $0 \le l \le n$, и любой функции $\varphi^l$, для которой компоненты вектора $\vec{\varphi}^l$ образуют базис пространства $V^l$, найдется набор функций $\varphi^j \in V^j$, $\quad 0 \le j \le n$, для которых компоненты векторов $\vec{\varphi}^j$ образуют базисы пространств $V^j$, причем для любых $j_1$, $j_2$, $0 \le j_1 < j_2 \le n$, имеем*

$$\varphi^{j_1}(J_2 m/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1 - 1} \varphi^{j_2}(m + kNJ_1/J_2). \tag{1}$$

*Функции $\varphi^j$ при $j < l < n$ определяются по функции $\varphi^l$ однозначно.*

Доказательство теоремы 1, опирается на некоторые важные сами по себе вспомогательные утверждения. Прежде чем их сформулировать, введем необходимые обозначения.

Для фиксированного $J$ полагаем $\omega_J = \exp\,(2\pi i/J)$, $F_J$ — матрица ДПФ (ее элементы определяются соотношением $F_{lk} = \omega_J^{-lk}$, $l = 0{,}1, \dots, J-1, k = 0, 1, \dots, J-1$). В случае, когда не может возникнуть сомнений в размерности рассматриваемых пространств, индекс $J$ будем опускать. Матрица обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) может быть записана в виде $F_J^*/J$. Через $e_{J,k}$ мы будем обозначать функции $e_{J,k}(m) = \omega_J^{km}$, $k = 0, 1, 2, \dots, J-1$. Как известно, эти функции образуют базис пространства $\tilde{\mathbb{C}}^J$, а их сужения на период $[0, J)$ являются столбцами (и строками) матрицы $F_J^*$ . Функции $e_{N,k}(\bullet)$ мы будем называть гармониками. Для произвольной функции $f(\bullet) \in \tilde{\mathbb{C}}^N$ через $\hat{f}(\bullet)$, как обычно, будем обозначать ее спектр (ДПФ)

$$\hat{f}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} f(\bullet)\omega_N^{-mk}, k = 0, 1, 2, \dots , N - 1.$$

Лемма 1. *Пусть* $h(\bullet) \in \tilde{\mathbb{C}}^N$,

$$\vec{h}(\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} (h(\bullet), h(\bullet - N/J), \dots , h(\bullet - (J - 1)N/J))^T,$$

*и* $\vec{\eta}(\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} F_J^*\vec{h}(\bullet)/J$. *Тогда размерность линейной оболочки компонент вектора* $\vec{h}(\bullet)$ *совпадает с количеством ненулевых компонент вектора* $\vec{\eta}(\bullet)$. *Отличные от тождественного нуля компоненты вектора* $\vec{\eta}(\bullet)$ *взаимноортогональны и могут быть вычислены также по формулам*

$$\eta_k(\bullet) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N/J-1} \hat{h}(k+Jm) \exp(2\pi i(k+Jm)\bullet/N), \quad k = 0, 1, \dots , J-1. \quad (2)$$

Следствие. *Пусть выполнены условия Леммы 1, и* $g(\bullet) \in \tilde{\mathbb{C}}^N$. *Тогда линейная оболочка компонент вектора*

$$\vec{g}(\bullet) = (g(\bullet), g(\bullet - N/J), \dots , g(\bullet - (J - 1)N/J))^T$$

*совпадает с линейной оболочкой компонент вектора* $\vec{h}$ *в том и только том случае, когда* $g(\bullet)$ *является линейной комбинацией ненулевых компонент вектора* $\vec{\eta}(\bullet)$ *с ненулевыми коэффициентами.*

Таким образом, если пространство $V \subset \tilde{\mathbb{C}}^N$ является линейной оболочкой компонент вектора $\vec{h}(\bullet)$ и $\dim V = J$, то в $V$ существует базис, состоящий из элементов вида (2), имеющих непересекающиеся носители спектров и потому взаимно ортогональных. Кроме того, он удовлетворяет следующему определению.

Определение 2. Совокупность функций $f_0, f_1, \dots , f_{J-1}$ линейного пространства $V \subset \tilde{\mathbb{C}}^N$ называется базисом Винера пространства $V$, если для нее справедлив дискретно-периодический аналог теоремы Винера: Функции $\{g(\bullet - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ образуют базис пространства $V$ в том и только том случае, когда $g$ представима в виде $g = \sum_{k=0}^{J-1} \alpha_k f_k$, где все $\alpha_k$ отличны от нуля.

Ясно, что этот базис единственен с точностью до умножения его элементов на ненулевые множители и перестановки элементов. В то же время, согласно формуле (2) в нем существует естественная нумерация в соответствии с теми компонентами спектра, которые входят в его элементы, т.е. в разложении функций $\eta_k(\bullet)$, $0 \le k < J$, по базису $\{e_{N,l}\}_{l=0}^{N-1}$ отличны от нуля лишь коэффициенты разложения с номерами вида $l = k + Jm$, $m = 0, 1, 2, \dots, N/J - 1$.

Мы получили базис Винера как образ компонент вектора $\vec{h}$ при ОДПФ. Однако базис Винера в соответствии с формулой (2) можно вводить как первичное понятие. Существование базиса Винера необходимо и достаточно для существования функции $g$, чей вектор сдвигов $\vec{g}$ является базисом пространства $V$.

Как и в случае функций непрерывного аргумента, компоненты базиса Винера являются собственными функциями оператора $(N/J)$-сдвига. По этой причине коэффициенты разложения функции по базису Винера можно в определенном смысле считать ее спектром. В частности, в пространстве $V$ с базисом Винера справедлива теорема о свертке: Спектр свертки (со сдвигом $N/J$) функций равен поточечному произведению спектров этих функций.

Лемма 2. *Для произвольного КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$ в каждом из пространств $V^j$ существует такая функция $\varphi^j$, что множество функций $\{\varphi^j(\bullet - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ — базис пространства $V^j$. По любому из пространств $V^j$ КМА восстанавливается однозначно.*

Пусть функции $\varphi$ и $\phi$ таковы, что наборы функций $\{\varphi(\bullet - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ и $\{\phi(\bullet - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ являются биортогональными базисами пространства $V^j$ (т.е. $(\vec{\varphi}, \vec{\phi})$ — единичная матрица), тогда функции $\varphi$ и $\phi$ называются двойственными. Следующее утверждение для случая сплайн-КМА было получено В.А.Желудевым [Ж3].

Лемма 3. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{n}$ произвольный КМА. В каждом из пространств $V^j$ базис Винера $\{v_k^j\}_{k=0}^{J-1}$ выбран исходя из нормирующего условия*

$$\sum_{m=0}^{N/J-1} \mid \hat{v}_k^j(k + mJ) \mid^2 = 1.$$

*Тогда для того чтобы функции $\varphi$, $\phi \in V^j$ были двойственными, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложений*

$$\varphi(\bullet) = \sum_{k=0}^{J-1} \alpha_k v_k^j(\bullet), \qquad \phi(\bullet) = \sum_{k=0}^{J-1} \beta_k v_k^j(\bullet)$$

*удовлетворяли равенствам* $\alpha_0 \bar\beta_0 = \alpha_1 \bar\beta_1 = \ldots = \alpha_{J-1}\bar\beta_{J-1} = 1/J$. *В частности,* $\varphi$ *порождает ортогональный базис тогда и только тогда, когда* $|\alpha_0| = |\alpha_1| = \ldots = |\alpha_{J-1}| \neq 0$.

Замечание. Очевидно, если к условию нормировки базиса Винера из Леммы 3 добавить условие $\hat v_k^j(k) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, J-1$, то выбор базиса Винера становится однозначным.

Лемма 4. *Пусть* $\{V^j\}_{j=0}^n$ *— произвольный КМА. Тогда для любого* $j$ *интерполяционная задача на прореженной сетке* $x_k = kN/J$ *однозначно разрешима в пространстве* $V^j$, *т.е. для любого набора чисел* $\{a_k\}_{k=0}^{J-1}$ *существует единственная функция* $\lambda \in V^j$ *такая, что* $\lambda(x_k) = a_k$.

Лемма 5. *Пусть последовательность функций* $\{\varphi^j\}_{j=1}^n$ *такова, что справедливы равенства (1.1), и компоненты векторов* $\vec\varphi^j$ *образуют базисы пространств* $V^j$. *Тогда найдутся такие, не зависящие от* $j$ *числа* $\{a_k\}_{k=0}^{N-1}$, *что для любого* $j$, $0 < j \leq N$, *имеем*

$$\varphi^{j-1}(\bullet) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi^j(\bullet - kN/J). \tag{3}$$

Замечание. Ввиду $N$-периодичности функций $\varphi^j$ последнее равенство может быть записано в виде

$$\varphi^{j-1}(\bullet) = \sum_{k=0}^{J-1} \left( \sum_{m=0}^{N/J-1} a_{k+mJ} \right) \varphi^j(\bullet - kN/J).$$

Из леммы 5, в частности, следует, что любой КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$ не только однозначно определяется функцией $\varphi^n$ и последовательностью $\{a_k\}$, определяющей переход от базиса $\vec\varphi^n$ к базису $\vec\varphi^{n-1}$, но и может быть восстановлен по простой и однородной для всех $j$ формуле (3).

Таким образом, для дискретного периодического случая имеет место теория КМА, сходная во многом с КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. В частности, любой КМА порождается сдвигами и растяжениями одной функции.

Согласно лемме 2 КМА может быть восстановлен по любому из пространств $V^j$. В частности, он может быть восстановлен по пространству $V^1$, которое, в свою очередь, определяется своим базисом Винера. Можно доказать, что базис Винера пространства $V^1$ состоит из функции $v_0^1(\bullet) \equiv \text{ const} \neq 0$ и функции $v_1^1(\bullet)$, в спектре которой присутствуют лишь нечетные гармоники. Различный, с точностью до общего коэффициента пропорциональности, выбор коэффициентов $\hat{v}_1^1(2k+1) \stackrel{\text{def}}{=} a_k, 0 \leq k < N/2$, при этих гармониках дает различные КМА. Нам остается только определить *допустимые* наборы коэффициентов. Справедлива

Теорема 2. *Последовательность чисел* $\{a_k\}_{k=0}^{N/2-1}$ *является допустимой, если*

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} a_{m+kN/2^{p+1}} \neq 0, 0 \leq m < N/2^{p+1}, p = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

*и только в этом случае.*

Определим теперь пространства всплесков традиционным способом. Пусть $\{V^j\}_{j=0}^n$ произвольный КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Пространством всплесков $W^j$ будем называть ортогональное дополнение пространства $V^j$ до пространства $V^{j+1}$. Таким образом, пространство $\tilde{\mathbb{C}}^N$ можно представить в виде ортогональной суммы

$$\tilde{\mathbb{C}}^N = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus \dots \oplus W^{n-1},$$

которая в нашем случае является еще и ортогональной.

Для того чтобы показать, что в каждом из пространств всплесков найдется функция, чьи соответствующие сдвиги образуют базис, покажем существование в каждом из пространств базисов $W^j$ базисов Винера. Поскольку для каждого $k = 1, 2, ..., 2^j - 1$ для некоторых $\alpha$ и $\beta$ справедливо представление

$$v_k^j = \alpha v_k^{j+1} + \beta v_{k+J}^{j+1}, \tag{4}$$

то в качестве элементов базиса Винера можно взять функции

$$w_k^j = \bar{\beta} v_k^{j+1} \|v_{k+J}^{j+1}\|^2 - \bar{\alpha} v_{k+J}^{j+1} \|v_k^{j+1}\|^2$$

и функцию $w_J^j = v_J^{j+1}$. В дальнейшем будем предполагать, что элементы базисов Винера в пространствах $V^j$ имеют единичную норму, тогда последняя формула записывается в виде

$$w_k^j = \bar{\beta} v_k^{j+1} - \bar{\alpha} v_{k+J}^{j+1}. \tag{5}$$

При этом согласно (4) $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, т.е. получим ортонормированность элементов базиса Винера пространств $W^j$. Взаимная ортогональность функций $w_k^j$ и их ортогональность пространству $V^j$ очевидны. Заметим, что нумерацию этих функций мы начинаем не с нуля, а с единицы, поскольку при естественной нумерации элементов базиса Винера оказывается, что гармоника с номером, равным нижнему индексу, присутствует в спектре функции. Нулевая же гармоника присутствует лишь в пространстве $V^0$. Впрочем, это несущественно, поскольку в дальнейшем естественно считать, что $w_{k+J}^j \equiv w_k^j$.

Рассмотрим теперь базисы в пространстве всплесков, состоящие из сдвигов одной функции, которые обычно являются исходными при введении пространств всплесков.

Мы уже знаем, что любой такой базис в пространстве $W^j$ может быть построен как линейная комбинация элементов базиса Винера с ненулевыми коэффициентами. Однако существует другой подход, при котором нет необходимости знать базисы Винера.

Пусть две функции $\varphi^j$ и $\varphi^{j+1}$ таковы, что наборы сдвигов

$$\{\varphi^j(\bullet - kN/J)\}_{k=0}^{J-1} \text{ и } \{\varphi^{j+1}(\bullet - kN/2J)\}_{k=0}^{2J-1}$$

являются базисами соответственно пространств $V^j$ и $V^{j+1}$;

$$\lambda_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle \varphi^j(\bullet), \varphi^{j+1}(\bullet - kN/2J)) \rangle.$$

Теорема 3. *Пусть*

$$\psi^j(m + N/2J) = \sum_{n=0}^{2J\text{-}1} (-1)^n \bar{\lambda}_n \varphi^{j+1}(m + nN/2J). \tag{6}$$

*Тогда система функций* $\{\psi^j(m - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ *образует базис пространства* $W^j$.

Замечание. Формула (6) по внешнему виду совпадает с хорошо известной для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ формулой разложения функции $\psi^j$

по базису, состоящему из компонент вектора $\vec{\varphi}^{j+1}$, при условии, что эти компоненты образуют ортонормированный базис. Фактически, формула (6) уточняет смысл коэффициентов. Ее аналог для всплесков в пространстве $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ получен в [CDF].

Теперь мы рассмотрим еще одно определение всплеск-пространств, главное преимущество которого состоит в том, что именно оно соответствует алгоритмам разложения пространств периодических распределений с непрерывным аргументом.

Далее значок $\oplus$ обозначает прямую (вообще говоря, неортогональную) сумму линейных пространств.

Определение 3. Пусть последовательность линейных пространств $\{V^j\}_{j=0}^n$ образует КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, $\varphi^j$, $0 < j \leq n$, — функции из формулировки теоремы 1, последовательность функций $\{\psi^j\}_{j=0}^{n-1}$ определена по формуле

$$\psi^j(\bullet) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \varphi^j(\bullet - kN/J).$$

Будем говорить, что пространства $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$, определяемые как линейные оболочки компонент $\vec{\psi}^j$, порождают всплеск-декомпозицию пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, если они удовлетворяет условию

$$V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus \ldots \oplus W^{k-1} = V^k, k = 1, 2, ..., n.$$

Оказывается, что для того чтобы пространства $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$ из Определения 3 порождали всплеск-декомпозицию пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, достаточно выполнения лишь условия $\tilde{\mathbb{C}}^N = V^{n-1} \oplus W^{n-1}$.

### §11. Спектральный аспект разложений по всплескам.

В §§9 и 10 мы видели, какую роль играют при построении теории периодических КМА базисы Винера. Кроме чрезвычайной их полезности для доказательств (как раз этот аспект нельзя до конца прочувствовать из конспективного изложения в §9) они несут в себе очень важную смысловую нагрузку — они образуют ортогональный базис, составленный из собственных векторов оператора естественного в пространстве $V^j$ или $W^j$ сдвига. Отсюда вытекают все остальные хорошие свойства.

В данном параграфе мы попытаемся сделать набросок возможного пути введения понятия базиса Винера для пространств, составляющих

КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Кроме того мы попытаемся взглянуть на уже упомянутые и некоторые новые результаты с точки зрения представления функций в базисе Винера.

Заметим, что, если в §§9 и 10 мы опускали доказательства, то здесь все что будет сказано носит характер правдоподобных рассуждений. Тем не менее, нам представляется важным взглянуть на построение КМА именно с этой точки зрения.

Вернемся к представлению (5.3) функции из $V^1$, но для упрощения записи перепишем его для пространства $V^0$. Любая функция $f \in V^0$ представима либо в виде

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varphi(x-n), \tag{1}$$

либо в частотной области в виде

$$\hat{f}(\omega) = m_f(\omega)\hat{\varphi}(\omega), \tag{2}$$

где

$$m_f(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega}.$$

Выражение (1) является дискретной сверткой последовательности $\{c_n\}$ с функцией $f$ непрерывного аргумента. Поэтому ясно, что формула (2) это обычная теорема о свертке в комбинированном виде, когда последовательность свертывается с функцией. Естественно, спектр (преобразование Фурье) свертки равен произведению спектров последовательности $\{c_n\}$ и функции $f$. Наша задача показать, что на самом деле функция $m_f$ не просто является преобразованием Фурье последовательности коэффициентов $\{c_n\}$, но и является **спектром** функции $f$ как элемента пространства $V^0$ в глубинном понимании этого термина.

Поясним, что мы имеем в виду. Обычно понятия спектра и преобразования Фурье функции считают синонимами. Однако, на наш взгляд, преобразование Фурье функции это всего лишь одна из четырех формул, применяемых в зависимости от того, где определена функция: на прямой, в целочисленных точках прямой, на окружности или на дискретной равномерной сетке точек окружности. Понятие же спектра несколько шире. Под спектром элемента $f$ инвариантного относительно сдвига $\tau$ пространства $S$ мы понимаем "коэффициенты разложения" этого элемента по "базису", состоящему из собственных функций оператора $\tau$-сдвига.

Мы здесь два раза воспользовались кавычками, поскольку и коэффициенты разложения, и базис нужно понимать в расширенном смысле. Например, для функции $f$ из $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega. \tag{3}$$

В этом выражении функции $e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$, играют роль базиса, значения преобразования Фурье $\hat{f}$ можно считать коэффициентами разложения по этому базису, а вместо суммы, обычной при разложении по базису, использован интеграл.

Напомним, что в привычной всем формуле (3) сконцентрировано много проблем, связанных с ее пониманием. Главная из которых состоит в том, что под интегралом находится несуммируемая функция. Кроме того, хотя трактовка формулы (3) как разложения по базису и хороша, но возникает вопрос, почему элементы базиса оказываются не принадлежащими исходному пространству. Разумеется, наиболее полные ответы на все эти вопросы можно дать лишь в рамках теории обобщенных функций.

Так же обстоит дело и со спектральным представлением функций пространства $V^0$. В самом этом пространстве нет функций, инвариантных относительно единичного сдвига, если взять тот же базис, что и в $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, т.е. множество всех комплексных экспонент, то мы получим в качестве коэффициентов разложения обычное преобразование Фурье. Однако, когда мы брали комплексные экспоненты в качестве базиса пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, то хотя они и не принадлежали самому этому пространству, но принадлежали его пополнению в топологии пространства обобщенных функций. Этот факт утрачивает силу, если мы рассматриваем пространство $V^0$. Для него нужно искать его собственный базис Винера (в терминологии §§9 и 10).

Пусть функции $\varphi \in V^0$ такова, что ее целочисленные сдвиги образуют ортонормированный базис пространства $V^0$. Согласно формуле (4.6) для почти всех $\omega$ имеем $2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2\pi n)|^2 = 1$. Таким образом, для почти всех $\omega \in [0, 2\pi)$ определены равные по норме 1-периодические функции

$$a_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\omega + 2\pi n) e^{i2\pi n x}.$$

В качестве же базиса Винера в понимании двух предыдущих параграфов следует взять семейство функций

$$v_\omega^0(x) = e^{i\omega x} a_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\omega + 2\pi n) e^{i2\pi n x}.$$

Ясно, что они являются собственными функциями оператора целого сдвига. В то же время, хотя они и не являются элементами пространства $V^0$, но они принадлежат его пополнению, если в этом пространстве ввести топологию пространства обобщенных функций. В самом деле, обозначив через $\delta_{2\pi}$ периодическую $\delta$-функцию, получим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x-n) e^{i\omega n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat\varphi(\xi) e^{i\xi(x-n)}\, d\xi\, e^{i\omega n} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat\varphi(\xi) \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(\omega-\xi)n} \right) e^{i\xi x}\, d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat\varphi(\xi) \delta_{2\pi}(\omega - \xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat\varphi(\omega + 2\pi n) e^{i(\omega+2\pi n)x} =$$

$$e^{i\omega x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat\varphi(\omega + 2\pi n) e^{i2\pi n x} = v_\omega^0. \quad (4)$$

Таким образом, функции семейства $v_\omega^0$ действительно принадлежат (в обобщенном смысле) линейной оболочке целочисленных сдвигов функции $\varphi$. При этом формула (4) является полным аналогом формул (9.2) и (10.2).

Давайте посмотрим, как трактуются с позиции разложения по базису Винера уже полученные ранее результаты и некоторые новые.

Теорема 1. *а) Функция $f$ принадлежит пространству $V^0$ в том и только том случае, когда она может быть представлена в виде*

$$f(x) = \int_0^{2\pi} m_f(\omega) v_\omega^0(x)\, d\omega,$$

*где $m_f$ — функция из $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.*

*б) Целочисленные сдвиги функции $f$ образуют ортонормированный базис пространства $V^0$ тогда и только тогда, когда почти всюду $|m_f(\omega)| = 1$.*

В пространстве $W^0$ также существует свой собственный базис Винера $w_\omega^0$ и для него справедливо утверждение теоремы 1. Заметим, что при доказательстве формулы (5.9) пункт б) теоремы 1 фактически уже был доказан.

## §12. Алгоритм, основанный на Дискретном Преобразовании Фурье

Рассмотрим сначала алгоритм разложения произвольной функции $f$ из $\tilde{\mathbb{C}}^N$ по базису, состоящему из объединения базисов Винера ортогональных пространств $W^j$. Иными словами, найдем алгоритм вычисления коэффициентов в формуле

$$f(\bullet) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{J} p_k^j w_k^j(\bullet) + q_0^0.$$

Как обычно, мы последовательно найдем представления функции $f$ в виде

$$f(\bullet) = \sum_{k=0}^{2^m-1} q_k^m v_k^m(\bullet) + \sum_{j=m}^{n-1} \sum_{k=1}^{J} p_k^j w_k^j(\bullet)$$

при $m = n, n-1, \dots, 1, 0$.

Ясно, что коэффициенты $q_k^n$ (случай $m = n$) с точностью до множителя $1/\sqrt{N}$ вычисляются при помощи ДПФ функции $f$.

После того как вычислены величины $q_k^{j+1}$, коэффициенты $q_k^j$ и $p_k^j$ согласно (10.4) и (10.5) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} q_0^j &= q_0^{j+1}, \quad q_k^j = \alpha q_k^{j+1} + \beta q_{k+J}^{j+1}, \quad k = 1, \dots, J-1, \\ p_J^j &= q_J^{j+1}, \quad p_k^j = \bar{\beta} q_k^{j+1} - \bar{\alpha} q_{k+J}^{j+1}, \quad k = 1, \dots, J-1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha$ и $\beta$ взяты из (10.4) и, естественно, различны для разных $k$ и $j$.

Очевидно, из (10.4) и (10.5) получаются также формулы реконструкции функции $f$, которые могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} q_0^{j+1} &= q_0^j, \quad q_k^{j+1} = \bar{\alpha} q_k^j + \beta p_k^j, \quad k = 1, \dots, J-1, \\ q_J^{j+1} &= p_J^j, \quad q_{k+J}^{j+1} = \bar{\beta} q_k^j - \alpha p_k^j, \quad k = 1, \dots, J-1. \end{aligned} \tag{2}$$

После реализации которых, для восстановления функции $f$ нужно вычислить ОДПФ вектора $\vec{q}^n$ и результат умножить на $\sqrt{N}$. Таким образом, алгоритмы разложения функции по базисам Винера и ее восстановления имеют сложность порядка $O(N \log N)$. Рассмотрим алгоритмы разложения произвольной функции $f \in \tilde{\mathbb{C}}^N$ по базисам $\vec{\psi}^j$ и ее реконструкции.

Переход от координат в базисе всплесков к координатам в базисе Винера и обратно осуществляется соответственно при помощи прямого и обратного ДПФ и, быть может, покоординатного умножения в частотной области. Этот очевидный факт следует из того, что для любой функции $f \in W^j$ имеем

$$f = \vec{\psi}^{jT} \vec{a} = \frac{1}{J} \vec{\psi}^{jT} F_J^* F_J \vec{a} = \vec{w}^{jT} \vec{b} = \vec{w}^{jT} F_J F_J^* \vec{b} / J,$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы координат функции $f$ соответственно в базисах $\vec{\psi}^j$ и $\vec{w}^j$. Поскольку компоненты базиса Винера определяются однозначно с точностью до ненулевых множителей, то покоординатное умножение в частотной области может появиться, если мы выбрали базис Винера, отличный от $\vec{w}^j$. Естественно, аналогичные формулы справедливы для пространств $V^j$ и базисов $\vec{\varphi}^j$ и $\vec{v}^j$.

Таким образом, алгоритмы разложения функций пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$ по базисам всплесков $\vec{\psi}^j$ и их реконструкции, использующие переход к базисам Винера, имеют сложность порядка $O(N \log N)$ независимо от того каким было исходное представление функции — в ее естественном виде $f(\bullet)$, в виде спектра или в виде ее разложения по некоторому базису $\vec{\varphi}^n$.

Как уже отмечалось в §10, ортогональные пространства дискретных всплесков хотя и имеют право на существование, но не они являются естественным инструментом для разложения пространств функций с непрерывным аргументом. Это объясняется тем, что для ортогональных пространств каждой пары $V^{j+1}$ и $W^j$ масштабирующее уравнение имеет свои коэффициенты. Это не очень удобно для численной реализации. При использовании предложенного выше алгоритма, основанного на ДПФ изначально требуется для всех $j$ вычислить коэффициенты $\alpha$ и $\beta$.

Перейдем теперь к неортогональным всплеск-разложениям пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Мы не будем сейчас пытаться получить максимально общий алгоритм. Наша цель — дискретные (вообще говоря, неортогональные) всплеск-разложения, порожденные традиционными ортогональными разложениями пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Итак, пусть мы имеем некоторый КМА $\{V^j\}$ пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ с ортонормированными базисами, образованными сдвигами и растяжениями функции $\varphi$. Более того, мы в дальнейшем предполагаем, что функция $\varphi$ такова, что все преобразования имеют смысл. Мы даже не всегда будем оговаривать при каких ограничениях эти преобразования корректны. Дело в том, что нам неизвестен точный ответ на большинство таких вопросов, а строгий подбор каких-нибудь ограничений и доказательство их достаточности уведут нас от сути дела. В любом случае некоторые из этих вопросов нетривиальны и нуждаются в дальнейшем исследовании. Для начала предположим, что $\varphi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. При таком предположении мы, очевидно, получим, что функция

$$\varphi^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+kN)$$

определена корректно и является суммируемой $N$-периодической функцией, а ее коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формуле

$$\hat{\varphi}^n(m) = \frac{1}{N}\int_0^N \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+kN)\right) e^{-2\pi i m x/N}\,dx = \\ \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i m x/N}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{N}\cdot\hat{\varphi}\left(\frac{2\pi m}{N}\right). \quad (3)$$

Линейная оболочка функций $\{\varphi^n(x+k)\}_{k=0}^{N-1}$ образует линейное конечномерное пространство $\tilde{V}^n$, которое совпадает с пространством, получающимся после $N$-периодизации суммируемых функций из пространства $V^0$. Этой же линейной оболочке принадлежат (см. (8.2)) и функции

$$v_k^n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}^n(k+mN) e^{2\pi i(k+mN)x/N} = \\ \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}^n\left(\frac{2\pi k}{N} + 2\pi m\right) e^{2\pi i(k+mN)x/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (4)$$

Заметим, что при сделанном предположении о суммируемости $\varphi$ мы не можем гарантировать принадлежность $\varphi^n$ к $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Это косвенно следует из того, что равенство (4.6) имеет место лишь почти всюду. Предположим, что функция такова, что (4.6) выполняется во всех точках. Тогда ввиду (3) и (4.6) функция $\varphi^n$, а значит и функции $v_k^n$, имеет суммируемый квадрат. Более того, согласно (3), (4) и (4.6) для норм функций $v_k^n$

имеем

$$\|v_k^n\|^2 = N\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\hat{\varphi}^n(k+mN))^2 = N\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\hat{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{N}+2\pi m\right)\right)^2 =$$

$$2\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\hat{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{N}+2\pi m\right)\right)^2 = 1.$$

Таким образом, функции $v_k^n$, поскольку среди них нет тождественно равных нулю, образуют базис Винера пространства $\tilde{V}^n$. А согласно Лемме 9.3 компоненты вектора $\vec{\varphi}^n$ образуют ортонормированный базис сдвигов этого пространства.

Таким образом, мы получили совсем неочевидный результат, заключающийся в том, что после $N$-периодизации ортонормированно базиса сдвигов пространства $V^0$ мы снова получим ортонормированный базис.

Давайте теперь применим к функциям пространства $\tilde{V}^n$ (в частности, к функции $\varphi^n$) оператор $T: f(x)\mapsto f(x/2)+f(x/2+\pi)$. Тогда результатом его применения к пространству $\tilde{V}^n$ будет некоторое пространство $T[\tilde{V}^n] = \tilde{V}^{n-1}$, и $T[\varphi^n] = \varphi^{n-1}$. Поскольку того же эффекта можно достичь, просто $N$-периодизируя пространство $V^{-1}$, то ясно, что функция $\varphi^{n-1}$ порождает ортонормированный базис 2-сдвигов пространства $\tilde{V}^{n-1}$. Таким образом, мы можем последовательно по формулам

$$\tilde{V}^{k-1} = T[\tilde{V}^k], \quad \varphi^{k-1} = T[\varphi^k], \quad k = n, n-1, \dots, 1,$$

построить последовательность вложенных пространств, составляющих (при некоторых дополнительных условиях) часть КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. При этом нетрудно заметить, что базисы Винера пространства $\tilde{V}^{k-1}$ пересчитываются через базисы Винера пространства $\tilde{V}^k$ по простой формуле

$$\hat{v}_m^{k-1}(m+Nl/2) = \hat{v}_{2m}^k(2m+Nl), \tag{5}$$

которая показывает, что переход от пространства с большим номером к пространству с меньшим номером при помощи оператора $T[\cdot]$ заключается в уничтожении нечетных гармоник и сжатии спектра.

После приведенного выше построения уже не покажется удивительным, что получающиеся после $N$-периодизации пространств $W^k$ пространства $\tilde{W}^{n-k}$, $k = -1, -2, -n$ оказываются взаимно ортогональными. Мы не будем здесь останавливаться на доказательстве этого факта, однако отметим, что проще всего это сделать доказав ортогональность элементов базисов Винера произвольной пары пространств $\tilde{V}^k$ и $\tilde{W}^k$, что можно сделать, действуя по аналогии с только что проведенными рассуждениями. Отметим также, что в случае, когда все коэффициенты Фурье $\hat{v}^n_m(m+Nl)$, $m = 1, 2, \dots, N-1$, $l \in Z$ отличны от нуля, согласно теореме 9.2 по пространству $\tilde{V}^n$ можно однозначно восстановить все пространства $\tilde{V}^m$ при $m > n$, получив при этом КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ в смысле Определения 9.2.

Пусть $\tilde{f}$ — функция пространства $\tilde{V}^n$. Тогда справедливо представление

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi^n(x - 2k\pi/N). \tag{6}$$

Коэффициенты последнего разложения могут быть получены из разных соображений. Если, например, функция $\tilde{f}$ получена периодизацией непериодической функции $f$, то коэффициенты $\{a_k\}$ получаются периодизацией исходной последовательности коэффициентов. Если мы имеем дело с непрерывными функциями, то коэффициенты разложения могут найдены из соображений интерполяции в равномерной сетке узлов, пользуясь формулой (6). При этом формула (6) превращается в систему линейных уравнений с циркулянтной матрицей. Следовательно, для нахождения коэффициентов можно воспользоваться формулой представления свертки через ДПФ.

Переписав формулу (6) в векторном виде, получим

$$\tilde{f}(x) = \vec{a}^T \vec{\varphi}^n(x) = \vec{a}^T F_J^T F_J^{-1} \vec{\varphi}^n(x) = (F_J \vec{a})^T F_J^{-1} \vec{\varphi}^n(x) = \vec{b}^T \vec{v}^n(x). \tag{7}$$

Как и в случае непериодических функций, мы можем рассматривать вектор $\vec{a}$ как элемент пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, а все дальнейшие вычисления можно рассматривать с точки зрения КМА периодических функций дискретного аргумента. Однако, хотя в данном случае и стоит иметь этот аспект в виду, но для построения алгоритма можно безболезненно обойтись без него.

В §§4 и 5, фактически было получено (см. (4.7), (5.6)), что матрица

$$M_0 = \begin{pmatrix} \overline{m_0(\omega)} & \overline{m_0(\omega+\pi)} \\ e^{i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)} & -e^{i\omega}\overline{m_0(\omega)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

является ортогональной для почти всех (а при наших предположениях для всех) $\omega$. Введем в рассмотрение последовательность векторов

$\{\vec{a}^j\}_{j=0}^{n-1}$, $\{\vec{c}^j\}_{j=0}^{n-1}$, состоящих из коэффициентов разложения проекций $\tilde{f}$ на пространства $\tilde{V}^j$, $\tilde{W}^j$ по базисам сдвигов, $\vec{a}^n \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}$. По аналогии с (7) получается, что переход к соответствующим базисам Винера и обратно пространств $\tilde{V}^j$ и $\tilde{W}^j$ задается формулами

$$\vec{b}^j = F_J \vec{a}^j, \vec{a}^j = F_J^{-1} \vec{b}^j,$$

$$\vec{d}^j = F_J \vec{c}^j, \vec{c}^j = F_J^{-1} \vec{d}^j,$$

где $\vec{d}^j$ — векторы коэффициентов разложения по базисам Винера пространств всплесков. Учитывая (4.3), (5.9), (5) и ортогональность матрицы (8), нетрудно видеть, что справедливы следующие формулы перехода от базисов Винера пространства $\tilde{V}^j$ к базисам пространств $\tilde{V}^{j-1}$ и $\tilde{W}^{j-1}$:

$$b_0^j = b_0^{j+1}, \quad b_k^j = m_0(\pi k/2K) b_k^{j+1} + m_0(\pi k/2K + \pi) b_{k+J}^{j+1}, \\ k = 1, \dots, J-1,$$

$$d_J^j = b_J^{j+1}, \quad d_k^j = e^{\pi k/2K} \overline{m_0(\pi k/2K + \pi)} b_k^{j+1} - e^{\pi k/2K} \overline{m_0(\pi k/2K)} b_{k+J}^{j+1}, \\ k = 1, \dots, J-1. \quad (9)$$

Очевидно, формулы реконструкции функции могут быть записаны в виде:

$$b_0^{j+1} = b_0^j, \quad b_k^{j+1} = \overline{m_0(\pi k/2K)} b_k^j + e^{-\pi k/2K} m_0(\pi k/2K + \pi) d_k^j, \\ k = 1, \dots, J-1,$$

$$b_J^{j+1} = d_J^j, \quad b_{k+J}^{j+1} = \overline{m_0(\pi k/2K + \pi)} b_k^j - e^{-\pi k/2K} m_0(\pi k/2K) d_k^j, \\ k = 1, \dots, J-1. \quad (10)$$

Таким образом, используя промежуточный переход от базисов сдвигов к базисам Винера, алгоритмы всплеск-разложения и последующего восстановления для любого исходного КМА можно реализовать при помощи БПФ за $O(N \ln N)$ арифметических операций.

## §13. Многомерные алгоритмы.

Мы обсудим здесь возможные подходы к определению КМА пространств функций многих переменных. Для упрощения выкладок будем рассматривать пространство $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Общий случай пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ может быть рассмотрен вполне аналогичным образом. Дадим наиболее естественное и максимально общее определение многомерного КМА.

Определение 1. Последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств

$$\dots \subset \boldsymbol{V}^{-1} \subset \boldsymbol{V}^0 \subset \boldsymbol{V}^1 \subset \boldsymbol{V}^2 \subset \dots \tag{1}$$

пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ называется *кратномасштабным анализом* этого пространства, если удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{V}^j} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$;

б) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{V}^j = 0$;

в) $f(x,y) \in \boldsymbol{V}^j \Leftrightarrow f(2x,2y) \in \boldsymbol{V}^{j+1}$;

г) найдется такая функция $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}^0$, которую называют *масштабирующей*, что множество ее сдвигов $\boldsymbol{\varphi}(x-n, y-m)$ образует ортонормированный базис пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

В таком общем виде многомерные КМА обычно не рассматриваются. Хотя за последнее время появилось много исследований в области построения подобных КМА и соответствующих им базисов всплесков, однако подобные базисы пока мало используются в приложениях. На практике поступают гораздо проще. Многомерные КМА обычно строятся как тензорное произведение КМА одномерных. Такие КМА называются *сепарабельными*, а общие КМА, не распадающиеся в тензорное произведение, называют *несепарабельными*.

Итак, пусть мы имеем $\{V^j\}$ — КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. В качестве $\boldsymbol{V}^j$ будем рассматривать тензорное произведение пространств $V^j$ на себя:

$$\boldsymbol{V}^j = V^j \otimes V^j = \operatorname{Span}\{f(x)g(y) \mid f,g \in V^j\},$$

где $\operatorname{Span} S$ — линейная оболочка множества $S$. Ясно, что в качестве базиса из пункта г) Определения 1 достаточно взять совокупность функций $\{\varphi(x-n)\varphi(y-m)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$, где $\varphi$ — масштабирующая функция пространства $V^0$.

Пространства всплесков при этом определяются так же, как и в одномерном случае, как ортогональные дополнения пространств с меньшим номером до пространств с большим номером (например, $\boldsymbol{V}^0$ до $\boldsymbol{V}^1$). Однако в таких пространствах нет возможности ввести базис, состоящий из (двумерных) сдвигов одной функции (изначально хотелось бы надеяться, что это будут сдвиги функции $\psi(x)\psi(y)$). Тем не менее, в качестве функций, порождающих базис в пространстве $\boldsymbol{W}^0$, можно взять функции $\boldsymbol{\psi}_1(x,y) = \psi(x)\psi(y)$, $\boldsymbol{\psi}_2(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ и $\boldsymbol{\psi}_3(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, которые мы будем называть соответственно функциями типа $\psi\psi$, $\psi\varphi$, $\varphi\psi$. В этом нет ничего удивительного, поскольку логично считать, что пространство $\boldsymbol{V}^0$ "в 4 раза меньше" пространства $\boldsymbol{V}^1$. Следовательно, пространство $\boldsymbol{W}^0$ составляет $3/4$ от пространства $\boldsymbol{V}^1$. Поэтому для его представления нужно "в три раза больше" базисных функций.

Схема процедуры нахождения коэффициентов разложения функции из $\boldsymbol{V}^1$ по базисам пространств $\boldsymbol{V}^0$ и $\boldsymbol{W}^0$ приведена на Рис. 1 и полностью сводится к одномерным алгоритмам. Для нахождения этих коэффициентов нужно расположить коэффициенты разложения по сдвигам масштабирующей функции пространства $\boldsymbol{V}^1$ в виде (бесконечной) матрицы. К каждой строке этой матрицы нужно применить одномерный алгоритм разложения на пространства $V$ и $W$. На выходе этой процедуры появятся две матрицы $A_V$ и $A_W$, соответствующие пространствам $V$ и $W$. На втором этапе нужно тот же алгоритм применить к столбцам этих матриц. Каждая из них снова распадется на две. Из матрицы $A_V$ получатся матрицы $A_{VV}$ и $A_{VW}$, а из $A_W$ — матрицы $A_{WV}$ и $A_{WW}$. При этом в матрице $A_{VV}$ окажутся коэффициенты разложения по базису сдвигов функции $\boldsymbol{\varphi}$ проекции исходной функции на пространство $\boldsymbol{V}$, а в оставшихся трех матрицах будут коэффициенты разложения по базисным функциям пространства всплесков. Дальнейший процесс разложения заключается в подаче на вход только что описанного алгоритма матрицы $A_{VV}$ и т.д.

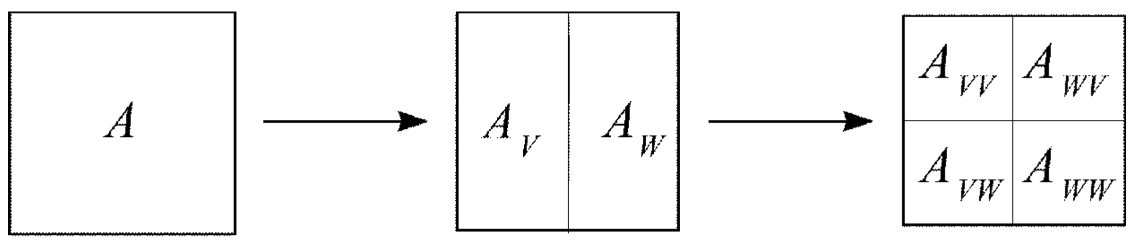



Рис. 1

Схема случая, когда описанная выше процедура итерируется три раза, приведена на Рис. 2. Мы в этом случае будем говорить, что *глубина преработки* массива равна трем.

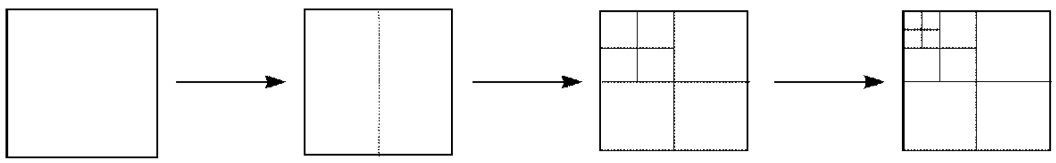


Рис. 2

Заметим, что, описанная выше концепция пространств всплесков имеет один очевидный изъян. Он состоит в том, что пространство всплесков $\boldsymbol{W}^0$ на самом деле является ортогональной суммой трех пространств:

$$\boldsymbol{W}^0 = (W^0 \otimes W^0) \oplus (W^0 \otimes V^1) \oplus (V^0 \otimes W^1),$$

только первое из которых можно по праву считать пространством всплесков. Два других состоят из функций, которые лишь "наполовину" (либо по вертикали, либо по горизонтали) являются всплесками. Поэтому, видимо, во многих случаях полезно по вертикали или по горизонтали провести дальнейшее разложение пространств $V$, т.е. использовать для обработки не рассмотренное нами представление

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{W}^j,$$

а разложение

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = (\oplus W^j) \bigotimes (\oplus W^j) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} W^i \otimes W^j.$$

С точки зрения вычислительных затрат это ведет совсем к их увеличению примерно в 1.6 раз, а идейно алгоритм разложения не становится сложнее. Изменение заключается в том, что по строкам матрицы $A$ как по одномерным сигналам вычисляются их коэффициенты разложения по базисам пространств $W^j$, а затем к тому что получилось на первом этапе применяется та же процедура по столбцам. Схема такой обработки приведена на Рис. 3.

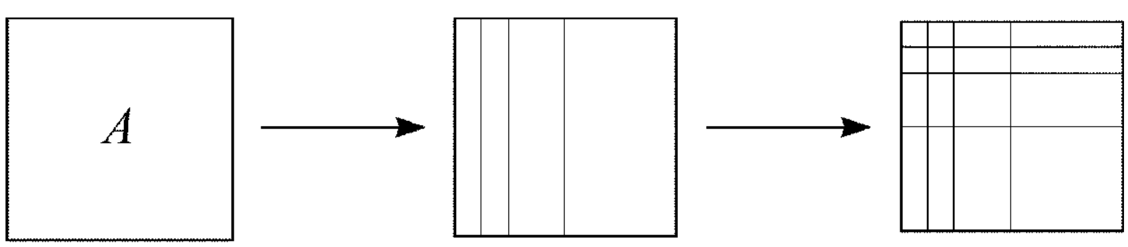



Рис. 3

Ясно, что одномерные процедуры могут быть реализованы любым из описанных ранее или предлагаемых нами в дальнейшем способов. Таким образом, с алгоритмической точки зрения при переходе к многомерному сепарабельному случаю не появляется новых проблем.

Заметим, что в качестве КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ мы брали тензорное произведение двух одинаковых одномерных КМА, но в случае необходимости, когда данные не однородны по всем измерениям, мы вполне можем брать для каждого измерения свой собственный КМА. Наиболее типичным примером такой неоднородности является видеоизображение, Для которого два пространственных измерения можно считать равноправными, а третье измерение (время) нуждается в своей специфической обработке. Сигнал вдоль временной координаты имеет существенно более высокую гладкость, чем относительно пространственных координат. Следовательно, согласно общему принципу о соответствии свойств базиса и приближаемой функции нужно выбирать по временной переменной КМА с повышенной гладкостью.

Еще один недостаток КМА, являющихся тензорным произведением, нагляднее всего проявляется на примере КМА с базисами сдвигов, имеющих компактный носитель. Носителями базисов в тензорном произведении будут прямоугольники, что не очень удобно, например, для представления изображений, форма объектов на которых имеет гладкие очертания. Кроме того отброшенные при сжатии изображения коэффициенты разложения ведут к появлению искажений правильной формы (прямоугольников или полос), которые видны более отчетливо, чем искажения неправильной формы. Способ борьбы с этим явлением один — построение многомерных КМА более общего вида, чем тензорное произведение одномерных КМА. Некоторые подходы к построению несепарабельных базисов приведены в [SZ1], [SZ2], [KS]. Стоит отметить работу [KS], где строится пример двумерного КМА, который не удовлетворяет Определению 1, поскольку в нем рассматривается не прямоугольная, а гексагональная решетка сдвигов. При этом КМА, построенный в этой работе имеет набор базисных (неортогональных) функций с носителем на правильном шестиугольнике, что значительно приятнее, чем прямоугольник. К сожалению, не видно, как этот пример можно адаптировать под конкретные задачи. Несмотря на его элегантность трудно предположить, что он окажется более эффективным, чем КМА, порожденные тензорным произведением.

Сделаем еще одно замечание, касающееся несепарабельных КМА. В общем случае разложение по таким базисам требует бóльших вычислительных затрат. В самом деле, при последовательной реализации одномерных сверток сначала по строкам, потом по столбцам массива (или наоборот). Затраты на один элемент массива равны $2 \cdot (2N - 1)$ операций сложения и умножения, где $N$ — длина свертывающего окна. В случае же прямой реализации двумерной свертки с окном размера $N \times N$ требуется $2N^2 - 1$ арифметическая операция. Таким образом, в задачах, требующих быстрой реализации, применение несепарабельных всплесков может быть оправдано лишь в случае, если они существенно превосходят по своим качествам сепарабельные базисы.

## §14. Всплески Мейера и Баттла — Лемарье.

Одним из самых первых примером всплесков являются всплески Мейера. Несмотря на то, что эти базисы не допускают сверхэффективных численных алгоритмов разложения и восстановления функций, они интересны ввиду простоты их конструкции и их важности для общей теории всплесков и их приложений. В частности, при помощи конструкции Мейера для многих функциональных пространств удалось решить давно стоявшую задачу о существовании безусловных базисов, состоящих из полиномов.

Построение базисов производится в частотной области. В качестве масштабирующей функции возьмем функцию $\varphi$, чье преобразование Фурье является четной функцией, удовлетворяющей соотношению

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & 0 \le \omega \le 2\pi/3, \\ 0, & \omega \ge 4\pi/3, \\ \alpha(\omega), & 2\pi/3 < \omega < 4\pi/3, \end{cases}$$

где нам предстоит определить, каким свойствам должна удовлетворять функция $\alpha$, для того чтобы $\varphi$ порождала некоторый КМА. Прежде чем приступить к нахождению этих свойств, сделаем два замечания. Во-первых, функция $\varphi$ является аналитической ввиду финитности носителя ее преобразования Фурье, что само по себе интересно и важно, однако этот факт говорит о неразумности применения этих базисов для кодирования и сжатия негладких сигналов типа звука и изображений. Во-вторых, как известно, скорость убывания функции на бесконечности зависит от гладкости ее преобразования Фурье. Таким образом, скорость убывания можно регулировать гладкостью функции $\alpha$ и гладкостью ее склейки с постоянной $(2\pi)^{-1/2}$ и нулем в точках $2\pi/3$ и $4\pi/3$.

Первое (и единственное) условие, которому должна удовлетворять функция $\alpha$, вытекает из равенства (4.6), являющегося необходимым и достаточным условием ортонормированности системы целочисленных сдвигов функции $\varphi$. Из (4.6) на интервале $(2\pi/3, 4\pi/3)$ получим

$$\frac{1}{2\pi} = |\alpha(x)|^2 + |\alpha(4\pi/3 - x)|^2.$$

Очевидно, существует бесконечно много решений, удовлетворяющих последнему уравнению. Если рассматривать лишь положительные решения, то удобно представить их в виде

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right),$$

где $\nu$ — произвольная определенная на интервале $(0,1)$ функция, удовлетворяющая соотношению $\nu(x) + \nu(1-x) = 1$. То, что никаких других ограничений на $\alpha$ не требуется, следует из того факта, что определив на периоде функцию $m_0(\omega) = \hat{\varphi}(2\omega)$. Получим, что $\hat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$. Этого достаточно, чтобы функция $\varphi$ порождала КМА.

Графики базисных функций Мейера и их преобразований Фурье приведены на Рис. 1.

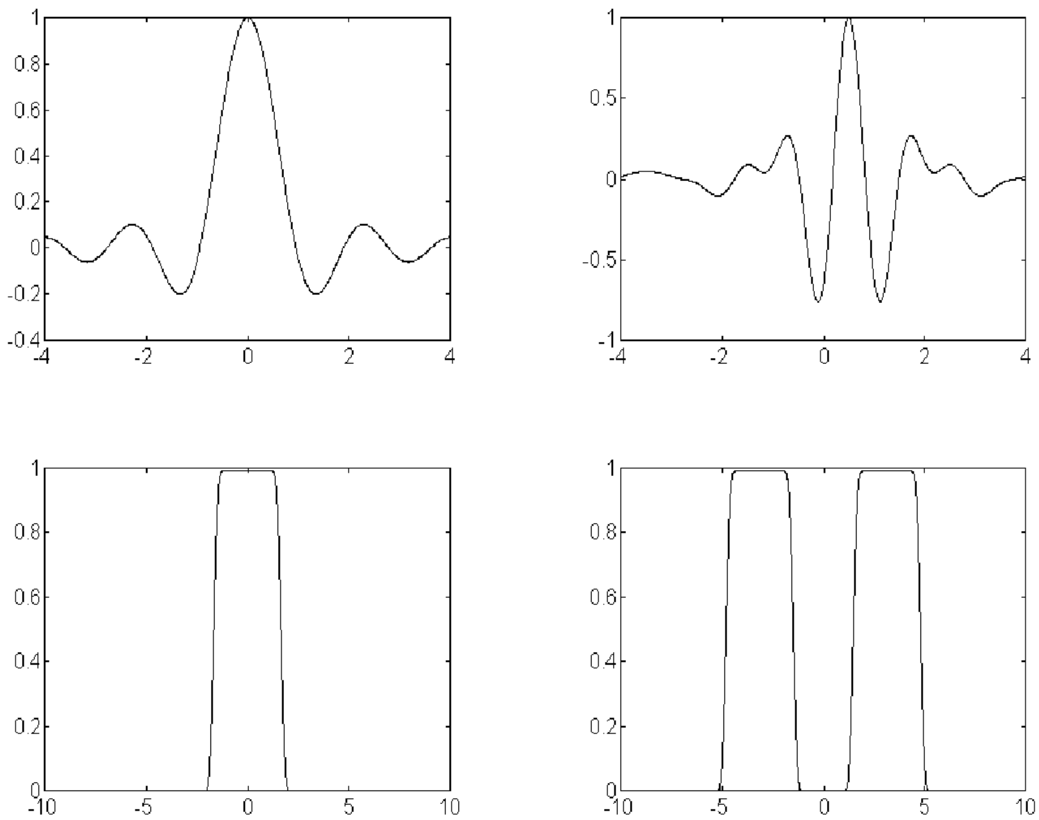



Рис. 1

Один из самых простых примеров КМА дают пространства $V^j$, состоящие из сплайнов минимального дефекта с узлами в точках $k2^{-j}$, $k \in \mathbb{Z}$. Напомним, что *сплайном порядка* $l$ *минимального дефекта* с узлами в целочисленных точках называется функция, являющаяся между любыми двумя соседними узлами полиномом порядка не выше $l$ и непрерывно дифференцируемая $l-1$ раз во всех точках (включая узлы). Случай $l = 0$ соответствует кусочно-постоянным функциям, а $l = 1$ — непрерывным кусочно-линейным. Зафиксируем $l$ и в качестве пространства $V^0$, порождающего КМА, возьмем совокупность сплайнов порядка $l$ с узлами в целочисленных точках, принадлежащих пространству $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Ясно, что это пространство инвариантно относительно целочисленных сдвигов аргумента, кроме того, очевидно, что $V^0 \subset V^1$. Возможность приближения функций из $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ с произвольной наперед заданной точностью сплайнами из $V^n$ также является известным из теории сплайнов фактом. Поэтому пространство $V^0$ является хорошим кандидатом для генерации КМА. Для доказательства свойства г) КМА нужно иметь подходящий базис пространства $V^0$, состоящий из целочисленных сдвигов одной функции, пригодный для последующей ортогонализации. Самым простым таким базисом является базис порожденный $B$-сплайном.

Напомним определение $B$-сплайна порядка $l$. Сначала дадим индуктивное определение. $B$-сплайном порядка 0 называют функцию

$$B_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x \notin [0,1). \end{cases}$$

Если нами определен $B$-сплайн порядка $l$, то сплайн $l+1$-го порядка определяется через свертку

$$B_{l+1} = B_l * B_0.$$

Сплайн $B_l$ имеет носитель, принадлежащий отрезку $[0, l+1]$, причем график $B$-сплайна симметричен относительно точки $(l+1)/2$. Ввиду того что

$$\hat{B}_0(\omega) = e^{-i\omega/2} \frac{\sin \omega/2}{\omega/2},$$

по теореме о свертке для произвольного $l$ получим

$$\hat{B}_l(\omega) = e^{-il\omega/2} \left( \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^l.$$

Базисы сдвигов $B$-сплайнов имеют массу достоинств. В частности, $B$-сплайны имеют минимальный размер носителя из всех сплайнов данного порядка. Однако целочисленные сдвиги $B$-сплайнов при $l > 0$ неортогональны.

Один из возможных способов ортогонализации системы сдвигов $B$-сплайнов был предложен Баттлом [B] и Лемарье [L].

Рассмотрим общий метод ортогонализации произвольного базиса сдвигов $\{\varphi(x-n)\}$ в пространстве $V^0$, являющегося *базисом Рисса*, т.е., когда найдутся такие две константы $C_1$ и $C_2$, что для любой последовательности $\{c_n\}$, для которой $\sum |c_n|^2 < \infty$, справедливы неравенства

$$C_1 \sum_n |c_n|^2 \le \left\| \sum_n c_n \varphi(\bullet - n) \right\|^2 \le C_2 \sum_n |c_n|^2. \tag{1}$$

Доказательство возможности ортогонализации произвольного базиса Рисса, состоящего их сдвигов одной функции таким образом, что новый (уже́ ортогональный) базис также состоит из сдвигов одной функции, является вторым (после определения КМА) важнейшим моментом классической статьи С.Малла [Ма].

Ввиду ортогональности преобразования Фурье норма функции равна норме ее преобразования Фурье, поэтому средний член последнего неравенства может быть представлен в виде

$$\left\|\sum_n c_n\varphi(\bullet - n)\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_n c_n e^{-in\omega}\hat\varphi(\omega)\right|^2 d\omega =$$
$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_n c_n e^{-in\omega}\right|^2 \sum_l |\hat\varphi(\omega+2\pi l)|^2\, d\omega = \int_0^{2\pi}|\alpha(\omega)|^2\Phi^2(\omega)\,d\omega,$$

где $\alpha(\omega)=\sum_n c_n e^{-in\omega}$ и $\Phi(\omega)=\left(\sum_l|\hat\varphi(\omega+2\pi l)|^2\right)^{1/2}$. Поскольку квадрат нормы функции $\alpha$ равен $2\pi\sum_n|c_n|^2$, то подбор $\varphi$, порождающих базис Рисса сводится к выяснению, каким образом может изменяться (увеличиваться или уменьшаться) норма функции из $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ после ее умножения на некоторую периодическую (в нашем случае положительную) функцию $\Phi$. Хорошо известно (и почти очевидно), что

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\frac{\|\alpha\Phi\|_2}{\|\alpha\|_2} = \operatorname{ess\,sup}|\Phi(\omega)| \stackrel{\text{def}}{=} M,$$

$$\inf_{\alpha\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\frac{\|\alpha\Phi\|_2}{\|\alpha\|_2} = \operatorname{ess\,inf}|\Phi(\omega)| \stackrel{\text{def}}{=} m.$$

Таким образом, для того чтобы базис сдвигов, порожденный функцией $\varphi$, был базисом Рисса, необходимо и достаточно выполнение неравенств $0<m\le M<\infty$. При этом $C_1=2\pi m^2$, $C_2=2\pi M^2$.

Следующая проблема — ортогонализация произвольного базиса Рисса, состоящего из сдвигов функции $\varphi$. Ясно, что нам достаточно в качестве функции $\phi$, порождающей ортонормированный базис сдвигов достаточно взять функцию, чье преобразование Фурье определяется формулой

$$\hat\phi(\omega)=\frac{\hat\varphi(\omega)}{\sqrt{2\pi}\Phi(\omega)}.$$

Ввиду неравенства $m > 0$ последнее равенство определено корректно. Кроме того, каждая из функций пары $\phi$ и $\varphi$ является линейной комбинацией целочисленных сдвигов другой функции. Это следует из того, что их преобразования Фурье отличаются множителем $\sqrt{2\pi}\Phi(\omega)$, являющимся $2\pi$-периодической ограниченной функцией, обратная к которой $1/\sqrt{2\pi}\Phi(\omega)$ также ограничена. Следовательно, коэффициентами разложения одной из функций по базису сдвигов другой являются коэффициенты Фурье функции $\sqrt{2\pi}\Phi(\omega)$ или обратной к ней ограниченной функции. Легко видеть, что определенная таким образом функция $\phi$ удовлетворяет равенству (4.6) — необходимому и достаточному условию ортогональности сдвигов.

В случае $B$-сплайнов при $l = 1$ справедлива формула

$$\Phi^2(\omega) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos^2\frac{\omega}{2}\right), \tag{2}$$

а сплайн Баттла — Лемарье 1-го порядка определяется формулой

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} e^{-i\omega} \frac{4\sin^2\omega/2}{\omega^2(1 + 2\cos^2\omega/2)^{1/2}}.$$

Комплексную экспоненту здесь можно опустить, поскольку это приведет всего лишь к сдвигу графика функции вправо на единицу.

При $l = 2$

$$\Phi^2(\omega) = \frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos\omega + \frac{1}{30}\cos^2\omega, \tag{3}$$

а сплайн Баттла — Лемарье 2-го порядка определяется формулой

$$\hat{\phi}(\omega) = e^{-i3\omega/2}\frac{8\sin^3\omega/2}{\omega^3(1 + 2\cos^2\omega/2)^{1/2}}\left(\frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos\omega + \frac{1}{30}\cos^2\omega\right)^{-1/2}.$$

Формулы для функции $\Phi$ при произвольном $l$ можно найти в книге Ч.Чуи [Ch].

## §15. Ортогональные всплески Добеши.

Появление в 1988 году (см. [D1]) ортогональных базисов всплесков с компактным носителем стало тем импульсом, благодаря которому началось лавинообразное развитие всей теории всплесков. Сама идея построения таких базисов после приведенной выше общей теории всплесков кажется лежащей на поверхности. Но нужно учитывать, что фактически всплески с компактным носителем были построены еще до установившихся общих взглядов.

Важно также отметить, что построение базисов И.Добеши́ проводится исходя лишь из требования конечности носителя базисных функций, т.е. по большому счету, из требования минимизации вычислительных затрат для алгоритмов декомпозиции и реконструкции. При этом оказывается, что получающиеся базисы обладают и другими хорошими свойствами, необходимыми для того, чтобы они могли быть использованы как аппарат для обработки сигналов или приближения функций. В первую очередь, важно, что получающиеся функции обеспечивают хорошее разделение частот между разными частотными уровнями разложения. Впрочем, этот параметр является в определенной степени регулируемым.

Итак, перейдем непосредственно к построению базисов Добеши. Предположим, что функция $\varphi$ с компактным носителем порождает ортогональный базис всплесков тогда коэффициенты в масштабирующем уравнении (4.1) могут быть вычислены по формуле

$$h_n = 2\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(2x-n)}\, dx.$$

Ввиду компактности носителя функции $\varphi$ лишь конечное число коэффициентов $h_n$ отлично от нуля. Таким образом, функция

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_n e^{-in\omega}$$

является тригонометрическим полиномом. И задача построения ортогональных базисов с компактным носителем сводится к нахождению полиномиальных решений уравнения (4.7).

Прежде чем заняться решением уравнения (4.7), найдем метод восстановления функции $\varphi$ по ее полиному $m_0$. Во-первых, для $\varphi$ с компактным носителем ее преобразование Фурье является аналитической функцией. При этом можно доказать, что уже из непрерывности функции $\hat{\varphi}$ в нуле следует (см. [D2]), что $\hat{\varphi}(0) \neq 0$.[9] Невыполнение этого условия влечет нарушение условия плотности пространств $V^n$ в $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Тогда из масштабирующего уравнения (4.3) получим, что $m_0(0) = 1$.

[9]Более того, $|\hat{\varphi}(0)| = 1/\sqrt{2\pi}$.

Воспользовавшись нужное число раз масштабирующим уравнением (4.3), получим

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega/2) m_0(\omega/2) =$$
$$\hat{\varphi}(\omega/4) m_0(\omega/4) m_0(\omega/2) = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega). \quad (1)$$

Пусть теперь $m_0$ — тригонометрический полином, удовлетворяющий уравнению (4.7). Каким дополнительным свойствам он должен удовлетворять, чтобы по формуле (1) получалась функция, которая имеет компактный носитель и порождает КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$?

Справедливы следующие две леммы[10]

Лемма 1. [Ma]. *Если $m_0$ — $2\pi$-периодическая функция, удовлетворяющая уравнению (4.7), и произведение (1) сходится почти всюду, то его предел является функцией из $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ с нормой $\|\hat{\varphi}\|_2 \le 1$.*

Лемма 2. [DD]. *Если для тригонометрического полинома $T(\omega) = \sum_{k=N_1}^{N_2} \gamma_k e^{-ik\omega}$ справедливо равенство $T(0) = 1$, то $\prod_{n=1}^{\infty} T(2^{-n}\omega)$ является целой функцией экспоненциального типа, чье преобразование Фурье принадлежит отрезку $[N_1, N_2]$.*

К сожалению, выполнение условия (4.7) еще не гарантирует того, что функция $\varphi$, существование которой следует из Леммы 1, порождает КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Для того чтобы функция $\varphi$ порождала КМА нужно, чтобы она удовлетворяла условию (4.6). Классический примером, когда для $m_0$ справедливо равенство (4.7), а порождаемая по формуле (1) функция $\hat{\varphi}$ не удовлетворяет (4.6), является функция

$$m_0(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \left(1 - e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}\right) = \frac{1 + e^{-3i\omega}}{2} = e^{-3i\omega/2} \cos\frac{3\omega}{2}.$$

Подстановка ее в формулу (1) даст нам функцию

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{e^{-3i\omega/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin 3\omega/2}{3\omega/2},$$

[10] Их доказательство также можно найти в [D2]

для которой справедливо равенство

$$\sum |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\cos\omega + \frac{2}{9}\cos 2\omega\right).$$

Последнее выражение обращается в нуль при $\omega = 2\pi/3$, поэтому сдвиги функции $\varphi$ не только не образуют ортогонального базиса, но даже не являются базисом Рисса.

Однако существует условие сформулированное А.Коэном [C] в терминах нулей функции $m_0$, которое полностью описывает полиномы $m_0$, порождающие КМА. Будем говорить, что компактное подмножество прямой $K$ *конгруэнтно* отрезку $[-\pi, \pi]$ по модулю $2\pi$, если его мера равна $2\pi$, и для каждого $\xi \in [-\pi, \pi]$ найдется такое целое $l$, что $\xi + 2\pi l \in K$. Иными словами, если прямую, на которой находится множество $K$, "намотать" на единичную окружность, то каждая точка окружности будет покрыта какой-нибудь из точек множества $K$.

Справедлива следующая теорема, принадлежащая Коэну (см. [C]).

Теорема 1. *Пусть $m_0$ — тригонометрический полином, удовлетворяющий условию (4.7), а функция $\varphi$ определена по формуле (1). Тогда функции $\{\varphi(x - n)\}$ образуют ортонормированную систему в том и только том случае, когда найдется компактное множество $K$, конгруэнтное отрезку $[-\pi, \pi]$ и содержащее окрестность нуля, для которого*

$$\inf_{k>0} \inf_{\omega \in K} |m_0(2^{-k}\omega)| > 0.$$

Условие ортогональности, приведенное в Теореме 1 проверить не очень просто. Однако в большинстве случаев можно ограничиться очевидными следствиями Теоремы 1. Например, для ортогональности сдвигов достаточно[11] выполнение неравенства

$$\inf_{|\omega| \le \pi/2} |m_0(\omega)| > 0.$$

На самом деле, из Теоремы 1 можно вывести (Коэн (см. [C]), что для ортогональности достаточно отсутствие нулей полинома $m_0$ на отрезке $[-\pi/3, \pi/3]$. Однако этот факт ужé не является тривиальным следствием Теоремы 1. Заметим, что для стандартных практически важных приложений для проверки ортогональности достаточно воспользоваться самым

[11] См. Малла [Ma]

слабым из следствий, так как в большинстве случаев $m_0$ обращается в нуль лишь в точках $\omega = \pm\pi$.

Перейдем теперь непосредственно к поиску полиномиальных решений

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_n e^{-in\omega}$$

уравнения (.7). Как было отмечено в начале этого параграфа, функция $m_0$ обязана иметь нуль в точке $\pi$. Пусть этот нуль имеет кратность[12] $N$. Тогда для полинома $m_0$ справедливо представление

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\omega),$$

где $\mathcal{L}(\omega)$ — тригонометрический полином. Мы будем рассматривать случай вещественного КМА, поэтому все коэффициенты $h_n$ вещественны. Следовательно, вещественны и коэффициенты полинома $\mathcal{L}$. Введем в рассмотрение новый неотрицательный тригонометрический полином

$$M_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |m_0(\omega)|^2.$$

Согласно (4.7) полином $M_0$ удовлетворяет уравнению

$$M_0(\omega) + M_0(\omega+\pi) = 1 \tag{2}$$

и может быть представлен в виде

$$M_0(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N} L(\omega),$$

где $L(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$. Ввиду того, что полином $\mathcal{L}$ имеет вещественные коэффициенты, полином $L$ является четным, следовательно, он является алгебраическим полиномом относительно $\cos\omega$, а значит, алгебраическим полиномом $P$ относительно $\sin^2\omega/2 = (1-\cos\omega)/2$. Введя обозначение $x = \sin^2\omega/2$, получим, что задача (2) сводится к нахождению решения уравнения

$$(1-x)^N P(x) + x^N P(1-x) = 1. \tag{3}$$

Разумеется, поскольку $0 \le \sin^2\omega/2 \le 1$, нам необходимо выполнение последнего равенства лишь на отрезке $[0,1]$, однако ясно, что при этом оно будет справедливо на всей вещественной оси.

Для доказательства разрешимости уравнения (3) сформулируем и докажем следующую лемму.

[12] Увеличение кратности этого нуля ведет к повышению гладкости базисных функций.

Лемма 3. *Пусть* $P_1$, $P_2$, $R$ *— алгебраические полиномы степени соответственно* $m$, $n$ *и* $< m+n$, *причем полиномы* $P_1$ *и* $P_2$ *не имеют общих корней. Тогда найдутся такие полиномы* $Q_1$ *и* $Q_2$ *степени не выше* $n-1$ *и* $m-1$, *что*

$$P_1(x)Q_1(x) + P_2(x)Q_2(x) = R(x). \tag{4}$$

*Полиномы* $Q_1$ *и* $Q_2$ *определяются однозначно.*

Замечание. Данная лемма в чуть менее общей форме приводится в [D2, с. 169] и [D1]. Приведенное ниже доказательство основано на другой идее и несколько короче.

Доказательство леммы 3. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ — нули полинома $P_1$. Тогда, поскольку степень полинома $Q_2$ может достигать $m-1$, он может быть построен исходя из интерполяционных условий $Q_2(x_i) = R(x_i)/P_2(x_i)$, где равество выполняется с кратностью корня $x_i$. Деление здесь определяется корректно, поскольку $P_2(x_i) \neq 0$. Полином $Q_1$ находится аналогичным образом по значениям в точках $\{y_i\}_{i=1}^n$ — нулях полинома $P_2$.

Выполнение равенства (4) следует из его выполнения с учетом кратности в $n+m$ точках, поскольку его левая и правая части — полиномы порядка не выше $n+m-1$.

Ввиду единственности решения рассмотренной выше интерполяционной задачи (вообще говоря, с кратными точками) полиномы $Q_1$ и $Q_2$ определяются однозначно.

Таким образом, согласно Лемме 3 найдется единственная пара полиномов $P_1$ и $P_2$ порядка не выше $N-1$, удовлетворяющих уравнению

$$(1-x)^N P_1(x) + x^N P_2(x) = 1. \tag{5}$$

Сделав в последнем равенстве замену $x \mapsto 1-x$, ввиду единственности решения уравнения (5) получим, что $P_1(x) = P_2(1-x)$. Значит, полином $P_0(x) = P_1(x)$ является единственным решением уравнения (3) порядка не выше $N-1$.

Если не требовать чтобы решение уравнения (3) имело минимальную степень, то его выбор становится неоднозначным. Однако минимизация степени полинома равнозначна минимизации размера носителя функций базиса, что объясняет особую важность такого решения. Существует еще один аргумент в пользу такого выбора. С точки зрения прикладных задач важно, чтобы частотная характеристика фильтра $m_0$ по возможности хорошо приближала ступеньку — функцию, равную единице при $|\omega| < \pi/2$ и равную нулю при $\pi/2 < |\omega| < \pi$. В частности, это требование означает, что функция $m_0(\omega)$ должна иметь максимально плоский график вблизи точек 0 и $\pi$, где $m_0(0) = 1$, $m_0(\pi) = 0$. Степень же плоскости графика в непосредственной близости от этих точек определяется лишь кратностью в них нуля производной функции $m_0$. Таким образом, минимальность носителя при фиксированном $N$ и максимальная плоскость решения уравнения (4.7) в двух точках при данных размерах носителя (или степени полинома $m_0$) приводят к одному и тому же результату.

Для решения минимальной степени легко выписать его явный вид. В самом деле, уравнение (3), воспользовавшись формулой Тейлора, можно переписать в виде

$$P_0(x) = (1-x)^{-N}\left(1 - x^N P_0(1-x)\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k + O(x^N).$$

Поскольку $P_0$ — полином порядка $N-1$, то слагаемое $O(x^N)$ в последнем равенстве можно отбросить.

Найдем теперь общий вид полиномиального решения уравнения (3) для фиксированного $N$. Пусть $P(x) = P_0(x) + P_1(x)$. Тогда

$$(1-x)^N P_1(x) + x^N P_1(1-x) = 0. \tag{6}$$

Следовательно, полином $P_1(x)$ делится на $x^N$, т.е. $P_1(x) = x^N Q(x)$. Выполнив подстановку $P_1$ в (6) и сократив полученное выражение на $x^N$, получим, что $Q(x) + Q(1-x) = 0$. Таким образом, в качестве $Q$ можно взять произвольный полином, чей график центрально симметричен относительно точки (0,1/2). Значит, можно считать, что $Q(x) = R(1/2 - x)$, где $R$ — произвольный нечетный полином. Окончательно получим, что произвольное полиномиальное решение уравнения (3) представимо в виде

$$P(x) = P_0(x) + x^N R(\frac{1}{2} - x),$$

а значит, произвольное решение $M_0$ уравнения (2) выразится в виде

$$M_0(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N} L(\omega) =$$
$$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N} \left(P_0\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right) + \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2N} R\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\right).$$

Нам остается разобраться с разрешимостью уравнения $|\mathcal{L}(\omega)|^2 = L(\omega)$. Ясно, что для разрешимости этого уравнения необходима неотрицательность полинома $L$. Оказывается, что выполнения этого условия достаточно для разрешимости. Точнее, справедлива следующая лемма, принадлежащая Риссу.

Лемма 4. *Пусть*

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos k\omega, \quad a_m \in \mathbb{R},$$

*неотрицательный тригонометрический полином. Тогда найдется такой тригонометрический полином*

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{K} b_k e^{ik\omega}, \quad b_m \in \mathbb{R},$$

*что* $|B(\omega)|^2 = A(\omega)$.

Таким образом, мы получили исчерпывающее описание всех полиномов, удовлетворяющих (4.7). Для того чтобы проверить, порождает ли конкретное решение $m_0$ ортогональный базис с компактным носителем, нужно воспользоваться теоремой 1. В частности, $m_0$ будет порождать ортонормированный базис сдвигов, если $P(x)$ — положителен на отрезке $[0, 1]$. Заметим, что полином $P_0$ положителен для любого $N$.

При $N = 1$, $R(z) \equiv 0$ получается базис Хаара. Графики базисных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и абсолютных величин соответствующих им функций $m_0(\omega)$, $m_1(\omega)$ при $N = 2, 3$ приведены соответственно на Рис. 1 и 2.

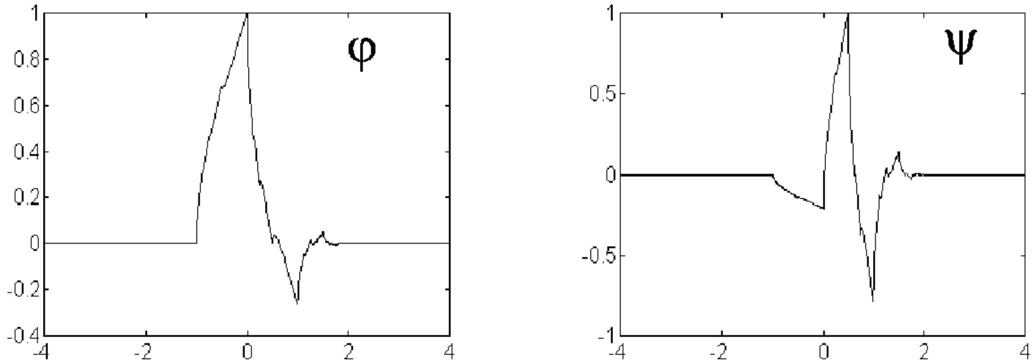



Рис. 1

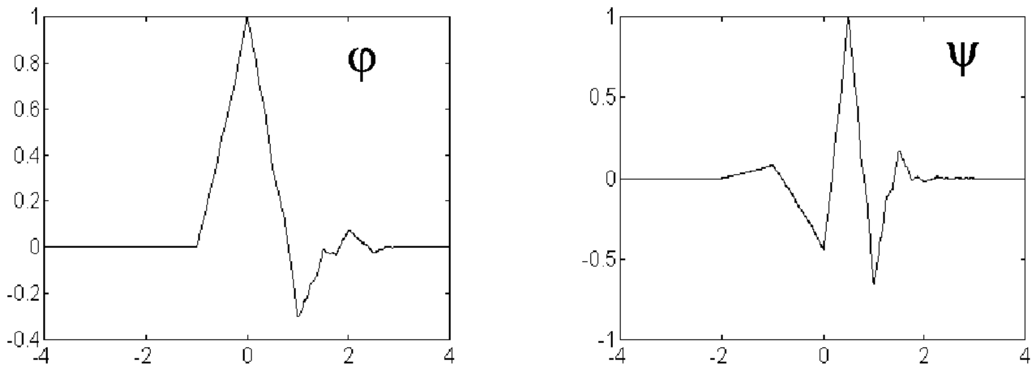



Рис. 2

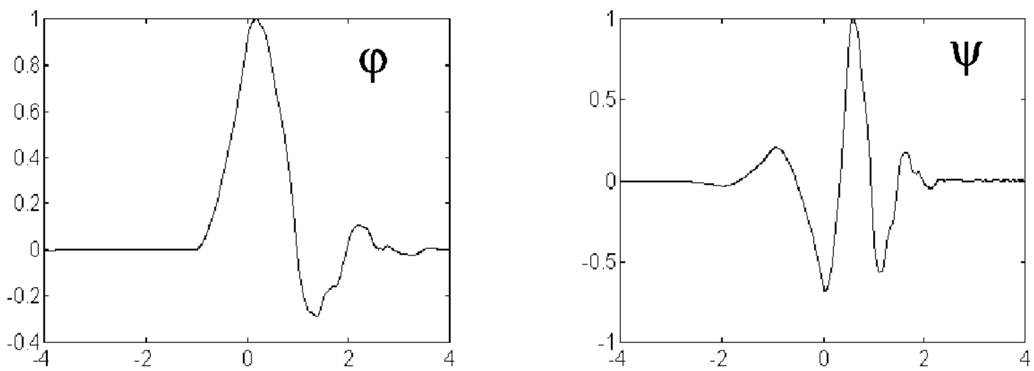
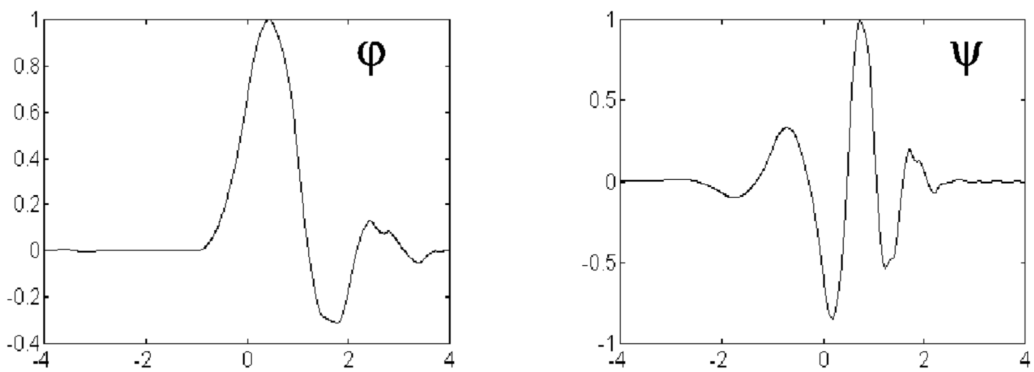



Рис. 3



## §16. Базисы всплесков с неограниченными носителями, допускающие эффективные численные алгоритмы

Более глубокий анализ и реализацию идей, изложенных в этом параграфе можно найти в работах [HV] [П4].

Начнем с некоторых частных примеров, ставших источником общей идеи. В каком-то смысле мы объединим здесь подходы к построению базисов, развитые в §§14 и 15.

Когда мы решали в предыдущем параграфе уравнение (4.7), то свели его к более простому уравнению (15.2). После его решения, нам остается подобрать функцию $m_0$, для которой $|m_0(\omega)|^2 = M_0(\omega)$. Таким образом, выбор функции $|m_0|$ однозначен, а выбор $m_0$ — неоднозначен. И. Добеши выбрала решение, гарантированное леммой Рисса. В результате функция $m_0$ оказывается полиномом, что ведет к алгоритмам разложения и восстановления, реализуемым в виде сверток с окном малого размера. Такие свертки в радиотехнике называют фильтрами с *конечной импульсной характеристикой* или КИХ-фильтрами. Баттл и Лемарье при ортогонализации системы всплесков, порожденных $B$-сплайнами, при необходимости "извлечь корень" пошли другим путем. Они выбрали при решении уравнений (14.2) и (14.3) арифметический корень. При этом получающиеся функции $m_0$ не являются полиномами, поэтому соответствующие фильтры имеют *бесконечную импульсную характеристику* (БИХ-фильтры).

На первый взгляд, кажется, что мы сравниваем разные задачи. Но на самом деле уравнения (14.2) и (14.3) можно легко переформулировать в терминах функции $m_0$. Для кусочно-линейных сплайнов

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4 \frac{1+2\cos^2\omega/2}{1+2\cos^2\omega}, \tag{1}$$

а для кусочно-квадратичных сплайнов

$$|m_0(\omega)|^2 = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^6 \frac{16+13\cos\omega+\cos^2\omega}{16+13\cos 2\omega+\cos^2 2\omega}. \tag{2}$$

Правые части уравнений (1) и (2) являются рациональными функциями от переменной $\omega$. Причем и числитель, и знаменатель этой функции — неотрицательные четные полиномы. К ним применима лемма Рисса. Поэтому существует рациональная комплексная тригонометрическая функция $m_0$ с вещественными коэффициентами числителя и знаменателя. На первый взгляд, может показаться, что такое решение не приведет к сколь-нибудь полезным свойствам базисов. Полученная рациональная тригонометрическая функция имеет бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье. По-прежнему, как и для сплайнов Баттла — Лемарье, придется иметь дело с БИХ-фильтрами, т.е. при прямой форме реализации алгоритма разложения (см. §6) необходимо вычислять свертки с весьма быстро (экспоненциально) убывающей, но все-таки бесконечной, последовательностью. При этом в отличие от них последовательность коэффициентов Фурье новых функций не будет симметричной, а графики порождающих базис функций $\varphi$ и $\psi$ не будут ни четными, ни нечетными функциями, что при прочих равных условиях является существенным преимуществом сплайнов Баттла-Лемарье.

Преимущество рациональных решений уравнений (1) и (2) заключается в том, что часть алгоритма разложения, соответствующая числителю, реализуется как свертка с финитным окном, а часть, соответствующая знаменателю, реализуется с помощью так называемого *рекурсивного фильтра.*

Поясним, как это делается. Но сначала напомним, что $z$-преобразованием последовательности $\{a_n\}$ называется функция $A(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^{-k}$, если последний ряд равномерно сходится в некотором кольце, содержащем единичную окружность, или в другом, подходящем для конкретной задачи смысле. Иногда имеет смысл считать, что $A(z)$ — формальный ряд Лорана. Ясно, что $z$-преобразование связано с преобразованием Фурье соотношением $\hat{a}(\omega) = A(e^{i\omega}$. Свертка числовой последовательности $\{x_k\}$ с фильтром $\{h_k\}$ может быть представлена либо во временной области по формуле $y_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n h_{k-n}$ (или $y = x * h$), либо в частотной области в виде $\hat{y}(\omega) = \hat{x}(\omega)\cdot\hat{h}(\omega)$, либо в области $z$-преобразования $Y(z) = X(z)H(z)$. Поскольку рациональная тригонометрическая функция $H(e^{i\omega}$, не имеющая полюсов на вещественной оси, представима в виде

$$H(e^{i\omega}) = Ce^{iN\omega}\frac{\prod_{k=1}^{K}(1-\alpha_k e^{i\omega})}{\prod_{k=1}^{M_1}(1-\xi_k e^{i\omega)}\prod_{k=1}^{M_2}(1-\zeta_k e^{-i\omega})},$$

где все числа $\{\xi_k\},\{\zeta_k\}$ по модулю не превышают единицу, то свертка с последовательностью, имеющей преобразование Фурье $H(e^{i\omega)}$, можно реализовать в виде композиции простейших операторов четырех типов:

1) Умножение сигнала на константу $C$;

2) Сдвиг сигнала на $N$ отсчетов; 3) Свертка с двухточечным окном вида $\{1, -\alpha_k\}$ (множители числителя дроби); 4) Свертка с последовательностью вида

$$h_n = \begin{cases} \xi^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0; \end{cases} \qquad \left( \text{или } h_n = \begin{cases} \xi^{-n}, & n \leq 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \right)$$

Реализация операторов 1) — 3) является частным случаем реализации оператора свертки в прямой форме. Остановимся подробнее на реализации четвертого оператора, когда требуется вычислить свертку с последовательностью $\{h_n\}$, имеющую $z$-преобразование вида $H(z) = (1 - \xi z^{-1})^{-1}$. Несмотря на то, что последовательность $\{h_n\}$ имеет неограниченный носитель, алгоритм свертки может быть реализован в компактной форме. В аналоговой радиотехнике этот прием называют *обратной связью*, а в цифровой обработке — *рекурсивным фильтром.*

Поскольку для $|\xi| < 1$ имеем

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n z^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n} \frac{1}{1 - \xi z^{-1}} =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n} \sum_{n=0}^{+\infty} \xi^n z^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} x_{n-k} \xi^k \right) z^{-n},$$

то

$$y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{n-k} \xi^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{n-1-k} \xi^{k+1} + x_n = (\sum_{k=0}^{+\infty} x_{n-1-k} \xi^k) \xi + x_n = y_{n-1} \xi + x_n.$$

Полученная рекуррентная формула называется *элементарным рекурсивным фильтром.*

Если найдется такое $N$, что $x_n = 0$ при $n < N$, при тех же $n$ имеем $y_n = 0$, и рекурсивный фильтр дает точную реализацию формулы свертки с последовательностью $\{h_n\}$. Разумеется, в этом случае прямая реализация формулы также допускает точную реализацию, однако арифметические затраты на прямую реализацию значительно выше затрат, которые требует рекурсивный фильтр.

Если же носитель сигнала двусторонне неограничен, то ввиду того, что реальный алгоритм свертки начинает свою работу с некоторого фиксированного отсчета $k_0$, на выходе получим лишь приближенное значение свертки. Однако точность его возрастает со временем его функционирования в геометрической прогрессии, где знаменатель прогрессии равен $\xi$. Ясно, что рекурсивная реализация фильтров неизбежно ведет к некоторым искажениям на краях обрабатываемого сигнала и это нужно учитывать, однако обычно что эти искажения невелики (если мала величина $|\xi|$) и оказывают лишь несущественное влияние на качество обработки.

В случае, когда существуют ненулевые $b_n$ с как угодно большими отрицательными номерами, рекурсивный фильтр может быть реализован, начиная с некоторого номера $N$, поэтому в его реализации неизбежно присутствует погрешность, которая убывает с каждым шагом со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\xi$.

Аналогичным образом оператор, задаваемый формулой

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n z^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1-\xi z}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n},$$

может быть реализован в виде элементарного рекурсивного фильтра $y_n = y_{n+1}\xi + x_n$. Реализация свертки с такой последовательностью отличается тем, что сигнал на рекурсивный фильтр нужно подавать в порядке убывания индексов.

Заметим, что в дальнейшем нам иногда будет удобно отклоняться от реализации сверток по только что изложенной общей схеме. Например, нам будет удобно оставлять в знаменателе множители вида $1-\xi e^{-2i\omega}$, поскольку соответствующий им рекурсивный фильтр реализуется в виде $y_n = y_{n-2}\xi + x_n$, что проще, чем последовательная реализация двух фильтров с единичным сдвигом.

Посмотрим, как извлекается корень из равенств (1) и (2). У уравнения

$$1 + 2\cos^2\omega/2 = 2 + \cos\omega = |a + be^{i\omega}|^2$$

существует четыре вещественных решения $a_1 = (\sqrt{2}-1)/2$, $b_1 = (\sqrt{2}+1)/2$; $a_2 = (-\sqrt{2}-1)/2$, $b_2 = (-\sqrt{2}+1)/2$; $a_3 = -(\sqrt{2}-1)/2$, $b_3 = -(\sqrt{2}+1)/2$; $a_4 = -(-\sqrt{2}-1)/2$, $b_4 = -(-\sqrt{2}+1)/2$. Второе и четвертое решения ведут к неустойчивым рекурсивным фильтрам, и потому мы их отбрасываем. Первое и третье решения приводят к одному и тому же базису с точностью до перемены знака. В итоге получаем 4 разных решения уравнения (1):

$$m_0^1(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 \frac{1+(2-\sqrt{3})e^{i\omega}}{1+(2-\sqrt{3})e^{2i\omega}},$$

$$m_0^2(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 \frac{1+(2-\sqrt{3})e^{-i\omega}}{1+(2-\sqrt{3})e^{2i\omega}},$$

$$m_0^3(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 \frac{1+(2-\sqrt{3})e^{i\omega}}{1+(2-\sqrt{3})e^{-2i\omega}},$$

$$m_0^4(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2 \frac{1+(2-\sqrt{3})e^{-i\omega}}{1+(2-\sqrt{3})e^{-2i\omega}}.$$

Графики базисных функций, соответствующих $m_0^3$ и $m_0^4$ отличаются от $m_0^1$ и $m_0^2$ лишь симметрией.

Для уравнения (2) удобно сначала разложить выражение $16+13\cos\omega+\cos^2\omega$ на множители $(\cos\omega+c_1)(\cos\omega+c_2)$, где $c_{12} = -(13 \pm \sqrt{105})/2$ ($c_1 \approx 1.37625$, $c_2 \approx 11.6235$). Уравнение вида $\cos\omega + \alpha = |a+be^{i\omega}|^2$, где $\alpha > 1$, имеет две пары вещественных решений

$$a_1 = \frac{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha-1}}{2}; \quad b_1 = \frac{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha-1}}{2};$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha-1}}{2}; \quad b_2 = \frac{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha-1}}{2};$$

и еще два решения, отличающихся от приведенных знаком. Как и при решении уравнения (1), полезным для нас оказывается лишь первое решение. Несмотря на это уравнение имеет много решений. Одно из них

$$m_0^1(\omega) \approx \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^3 \frac{(1+0.43070e^{i\omega})(1+0.0431e^{i\omega})}{(1+0.43070e^{2i\omega})(1+0.0431e^{2i\omega})}.$$

Остальные 15 решений получаются как все возможные комбинации при изменении знака аргументов экспонент. Следует заметить, что разные решения имеют незначительные отличия. Они имеют одинаковый амплитудный спектр (модуль преобразования Фурье), совпадающий с амплитудным спектром сплайнов Баттла — Лемарье. Однако, учитывая, что носители базисных функций ограничены с одной стороны, вероятно, для некоторых задач (например, для представления речевых сигналов) существенна сторона с которой ограничен носитель базисных функций.

Мы рассмотрели задачу "рационализации" базисов кусочно-линейных и кусочно-параболических сплайнов. Разумеется, те же рассуждения можно провести и для сплайнов более высокого порядка. Но мы сейчас попытаемся исследовать более общую задачу нахождения КМА, допускающих конечномерную реализацию алгоритмов разложения и восстановления сигналов, т.е. алгоритмов, которые можно организовать как композицию свертки с конечной последовательностью и элементарных рекурсивных фильтров.

Действуя по аналогии с §15, мы будем искать решения уравнения (15.2), но не среди тригонометрических полиномов, а среди четных положительных рациональных тригонометрических функций. При этом вместо уравнения (15.3) мы получим уравнение

$$(1-x)^N \frac{\mathcal{P}(x)}{\mathcal{Q}(x)} + x^N \frac{\mathcal{P}(1-x)}{\mathcal{Q}(1-x)} = 1, \tag{3}$$

где $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ — алгебраические полиномы, неотрицательные на отрезке $[0,1]$. Включив степенной множитель в полином $\mathcal{P}$ и выполнив замену переменной $x=(y+1)/2$, получим эквивалентное уравнение

$$\frac{P(y)}{Q(y)} + \frac{P(-y)}{Q(-y)} = 1, \tag{4}$$

где $P(y)=\mathcal{P}((y+1)/2)$, $Q(y)=\mathcal{Q}((y+1)/2)$. Нас устроят любые положительные на интервале $(-1,1)$ рациональные функции $P/Q$. Несмотря на отсутствие в (4) степенных множителей, нам нужно помнить, что, поскольку $m_0(0)=1$, $m_0(\pi)=0$, рациональная функция $P(x)/Q(x)$ обязана в точках 1 и –1 обращаться соответственно в нуль и в единицу. Таким образом, этот множитель неявно присутствует в $P$, по крайней мере, в степени $N=1$.

Покажем, что $Q(x)$ — четный положительный на $[-1,1]$ полином. Положительность его следует из того, что на интервале $(-1,1)$ неотрицательна дробь $P/Q$, которую при этом естественно считать несократимой. Четность, очевидно, следует из того факта, что для выполнения (4) необходимо, чтобы полиномы $Q(x)$ и $Q(-x)$ имели нули одинаковой кратности, что достаточно для четности полинома $Q$. Таким образом, уравнение (4) перепишется в очень простом виде

$$P(y)+P(-y)=Q(y). \tag{6}$$

Совсем нетрудно описать все возможные его решения. Все неотрицательные на $[-1,1]$ полиномы $P$, удовлетворяющие двум условиям:

а) $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$;

б) полином $P$ не имеет пар корней вида $\pm a$ (условие несократимости дроби $P/Q$);

дают все возможные решения уравнения (6). Таким образом, дробь $P/Q$ однозначно восстанавливается по своему числителю.

Знаменатель же дроби $Q$ не позволяет однозначно восстановить дробь. Действительно, $Q(y) = \sum b_{2k} y^{2k}$. При этом удобно считать, что $Q(-1) = Q(1) = 1$. Поэтому в качестве $P$ знаменателю подходит любой полином $P(y) = \sum a_k y^k$, удовлетворяющий условиям а) и б), для коэффициентов которого имеем $2a_{2k} = b_{2k}$. Таким образом, в выборе коэффициентов полинома $P$ при нечетных степенях имеется определенный произвол. При если учесть, что $Q(y) > 0$ при $y \in [-1, 1]$, то становится ясно, что таких решений бесконечно много.

Ясно, что очень непросто ориентироваться в таком многообразии решений. Для того чтобы иметь представление о свойствах конкретных решений нужно найти решения экстремальные в том или ином смысле.

Мы здесь решим очень простую задачу максимизации производной дроби $P/Q$ в нуле. При этом мы ограничимся случаем, когда полином $P$ имеет лишь вещественные корни, которые к тому же не принадлежат интервалу $(-1, 1)$.

Требование достижения производной максимума в точке 0 является естественным, поскольку оно фактически соответствует требованию максимизации крутизны октавного фильтра $m_0$. При этом, конечно, ничто не обязывает полученную экстремальную функцию быть монотонной или порождать базис всплесков с хорошо локализованным носителем. Однако оказывается, что при весьма нелогичном требовании вещественности корней экстремальное решение окажется вполне пригодным, как с точки зрения разделения частот, так и с точки зрения локализации во временной области. При этом, разумеется, задача поиска подходящих решений с полиномом $P$, имеющим комплексные корни или корни на интервале $(-1, 1)$ остается актуальной. Однако в этом случае необходимы другие ограничения, чтобы исключить решения типа полиномов Чебышева $P_n(x) = (\cos n \arccos x + 1)/2$ нечетной степени, которые, хотя и имеют большую производную в нуле (при этом $P_n(x) + P_n(-x) \equiv 1$), но трудно представить себе задачу, в которой полином $P_n$ был бы интересен как фильтр. Ясно, что большой интерес для нашей задачи представляют дроби Золотарева, приближающие наилучшим образом функцию $\operatorname{sign} x$ на двух отрезках $[-1, \varepsilon]$ и $[\varepsilon, 1]$.

Итак, оценим производную дроби $P(y)/Q(y)$ в точке $y = 0$. Учитывая (6), в частности, что $Q$ — четный полином, имеем

$$\left(\frac{P}{Q}\right)'(0) = \frac{P'(0)Q(0) + Q'(0)P(0)}{Q^2(0)} = \frac{P'(0)}{Q(0)} = \frac{P'(0)}{2P(0)}. \tag{7}$$

Значение логарифмической производной $P'(y)/P(y)$ алгебраического полинома $P$ порядка $n$ выражается по формуле

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y - c_k},$$

где $c_k$ — корни полинома $P$, встречающиеся в этой последовательности столько раз, какова их кратность. Следовательно, абсолютная величина правой части формулы (7) достигает максимума, если все $c_k$ равны 1 или $-1$. При этом сама величина максимума равна $n/2$.

Таким образом, экстремальный полином порядка $N$ запишется в виде

$$R_N(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(y)}{Q(y)} = \frac{(1-y)^N}{(1-y)^N + (1+y)^N}. \tag{8}$$

Полученная функция определяет частотную характеристику хорошо известного в радиотехнике фильтра Буттерворта. Проанализируем, что нам дает формула (8) при некоторых малых значениях $N$.

При $N = 1$ мы, разумеется, получим систему Хаара.

При $N = 2$ имеем $R_2 = (1-y)^2/2(1+y^2)$. При $N = 3$ имеем $R_3 = (1-y)^3/2(1+3y^2)$. Сравним оптимальные базисы, построенные на основе фильтров Буттерворта, с полученными выше базисами из сплайнов и с базисами Добеши. Для однообразия при помощи замены переменной $x \mapsto (x+1)/2$ представим полиномы $P_0$, соответствующие базисам Добеши, и рациональные функции, соответствующие сплайнам, в форме удобной для сравнения.

Для полиномов, соответствующих базисам Добеши имеем

$N = 2, \quad P_0(x) = \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2 (2+x), \quad P_0'(0) = -\frac{3}{4}$

$N = 3, \quad P_0(x) = \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^3 \left(4 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{3}{2}x^2\right), \quad P_0'(0) = -\frac{15}{16}$

$N = 4, \quad P_0'(0) = -\frac{35}{32}.$

Для кусочно-линейных сплайнов

$$S_1(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \frac{2-x}{1+2x^2}, \quad S_1'(0) = -\frac{5}{4},$$

а для кусочно-параболических сплайнов

$$S_2(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^3 \frac{16-13x+x^2}{4+22x^2+4x^4}, \quad S_2'(0) = -\frac{61}{32}.$$

Ясно, что затраты на разложение и восстановление функций грубо можно считать пропорциональными суммарной степени числителя и знаменателя функции $|m_0|^2$. Оценка эта не совсем точна, поскольку множители вида $1-x$ обходятся в два раза "дешевле" с точки зрения арифметических затрат. То же касается знаменателя дроби. Так как в него входят лишь четные степени, то соответствующие им рекурсивные фильтры действуют на прореженной в два раза последовательности отсчетов, что, естественно, ведет к двухкратной экономии арифметических затрат.

Из приведенных графиков масштабирующих функций и соответствующих им функций $m_0$ видно, что выбор в качестве $|m_0|^2$ функции $R_2$ приводит с точки зрения пространственных и спектральных свойств базисов практически к тому же эффекту, что и для функции $P_0$, соответствующей случаю $N = 3$, т.е. для базисной функции $D_3$. Однако при рекурсивной реализации фильтра для одномерных сигналов затраты на полную декомпозицию составляют 6 операций на точку, а в случае фильтра Добеши 14 операций на точку. Случай $R_3$ примерно соответствует случаю $D_7$. При этом арифметические затраты соответственно равны 8 и 38 операций на точку. При дальнейшем росте порядка рекурсивного фильтра выигрыш по отношению к сходному по характеристикам фильтру Добеши становится еще более заметным.

Сравним теперь затраты на реализацию оптимального рекурсивного фильтра и неоптимальных сплайн-фильтров. Фильтр $S_1$ с точки зрения разделения частот примерно соответствует фильтрам $R_3$ и $D_5$. При этом арифметические затраты равны соответственно 10, 8 и 26. Таким же образом с высокой точностью близки $S_2$, $R_4$ и $D_{10}$. А для их реализации требуется соответственно 18, 12 и 56 операций на точку.

Разумеется, для сжатия звуковых сигналов и изображений последний пример, вероятно, представляет малый интерес, так как в этом случае базисные функции слишком гладкие. Однако для фильтрации сигналов гладкость не является помехой, а лишь ведет к более качественному разделению частот.

## §17. Миф о линейной фазе.

Большинство статей, в которых строятся новые базисы всплесков или их аналоги, начинаются с утверждения, что базисы всплесков Добеши с компактным носителем, несмотря на многие их положительные свойства, обладают тем существенным недостатком, что графики функций этих базисов принципиально не могут быть симметричными или центрально симметричными. По этой причине фильтры $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ также не обладают свойством симметрии, что означает отсутствие у таких фильтров свойства линейности фазы. Вторым недостатком отсутствия симметрии, точнее, достоинством ее присутствия, является возможность упростить за счет симметрии некоторые вычисления.

Поясним последнее на примере. Если числа последовательности $\{h_k\}$ отличны от нуля лишь при $k = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$ и симметричны относительно нулевого отсчета, то при прямой реализации свертки $\sum_{k=m-n}^{m+n} c_k h_{k-m}$ требуется $4n+1$ арифметическая операция на точку, а если учесть симметрию фильтра, то тот же выходной сигнал можно представить в виде $c_m h_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_{m-k} + c_{m+k})h_k$. Поэтому для такой реализации требуется всего $3n+1$ операция. Разумеется, это рассуждение является достаточно серьезным аргументом для поиска базисов всплесков с эффективными алгоритмами разложения и восстановления, чьи графики обладают симметрией. Однако относительно этой проблемы можно заметить, что реально достичь 30-процентного выигрыша в вычислительных затратах на практике удается не всегда, поскольку используемые в настоящее время быстрые алгоритмы реализуются при помощи специальных процедур, а не на прямом вычислении сверток.

Более глубокого рассмотрения заслуживает проблема отсутствия у фильтра линейной фазы. Эта проблема важна, когда для обработки сигналов используются алгоритмы, для которых важны не только амплитудные, но и фазовые характеристики обрабатываемых сигналов. Это прежде всего относится к алгоритмам обнаружения сигналов, когда алгоритм настраивается на определенный фазовый характер полезного сигнала, позволяющий осуществлять его накопление. При этом внесение искажений в фазу ведет к самоуничтожению сигнала при накоплении. Поэтому к фильтру предъявляется требование, чтобы он влиял лишь на амплитуду частотных компонент, но не на их фазу. В крайнем случае, разрешается временной сдвиг сигнала, что в частотной области ведет к умножению спектра на $e^{i\tau\omega}$. Таким образом, эта проблема может возникнуть, если разложение по всплескам используется как промежуточная операция предварительной обработки. В случае же, когда для задач фильтрации или сжатия разложение по всплескам используется как конечная цель обработки, отсутствие линейной фазы не является недостатком обработки.

Посмотрим теперь, действительно ли несимметричные последовательности $h_k$ ведут к фильтрам с нелинейной фазой, а симметричные — с линейной.

Пусть, как это нами обсуждалось ранее, исходному дискретному сигналу $\{f_n\}$ поставим в соответствие последовательность коэффициентов $c^{j+1}$ разложения по сдвигам масштабирующей функции пространства $V^{j+1}$ при фиксированном $j$. Найдем по формулам (6.11) и (6.12) коэффициенты проекций $c^j$ и $d^j$ сигнала $c^{j+1}$ на пространства $V^j$ и $W^{j+1}$. Разумеется, если считать что последовательности $c^j$ или $d^j$ являются выходными сигналами, то они, действительно, являются результатом воздействия на входной сигнал $c^{j+1}$ фильтра $\bar{h}_n$ или $\bar{g}_n$, но не только этих фильтров, но и оператора прореживания, поэтому композиция таких двух фильтров не является оператором свертки и говорить о его фазовой характеристики можно лишь в некотором приближенном смысле. Тем не менее, согласно (7.2) имеем

$$\hat{c}^j(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{c}^{j+1}(\omega/2)\overline{m_0(\omega/2)} + \hat{c}^{j+1}(\omega/2+\pi)\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\right).$$

Поэтому, считая, что второе слагаемое в скобках мало (что вполне резонно), получим

$$\hat{c}^j \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{c}^{j+1}(\omega/2)\overline{m_0(\omega/2)}.$$

В последней формуле уже можно говорить о линейной фазе фильтра. Аналогичным образом можно поступить и с коэффициентами проекции на пространство всплесков. Для них справедливо соотношение

$$\hat{d}^j(\omega) \approx -\frac{e^{i\omega/2}}{\sqrt{2}}\hat{c}^{j+1}(\omega/2+\pi)m_0(\omega/2).$$

Если же вспомнить о том, что последовательности $c^j$ и $d^j$ это всего лишь коэффициенты разложения сигнала по некоторым базисам, а чтобы вернуться к самим проекциям сигнала на пространства $V^j$ и $W^j$ (точнее к их спектрам) нам нужно подставить в (7.5) поочередно значения $\hat{c}^j(\omega)$ и $\hat{d}^j(\omega)$ из формул (7.2) и (7.4), считая другое значение нулевым, то получим, что сигнал $c^{j+1}$ является суммой своей низкочастотной компоненты $\gamma^{j+1}$ (проекции на $V^j$)

$$\hat{\gamma}^{j+1}(\omega) = \hat{c}^{j+1}(\omega)|m_0(\omega)|^2 + \hat{c}^{j+1}(\omega+\pi)m_0(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)} \qquad (1)$$

и высокочастотной компоненты $\beta^{j+1}$ (проекции на $W^j$)

$$\hat{\beta}^{j+1}(\omega) = \hat{c}^{j+1}(\omega)|m_0(\omega+\pi)|^2 - \hat{c}^{j+1}(\omega+\pi)m_0(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)}. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что произведение $m_0(\omega)\overline{m_0(\omega+\pi)}$ мало, поскольку, если $m_0$ — частотная характеристика фильтра низкой частоты, который пропускает частоты ниже $\pi/2$ и подавляет частоты в диапазоне от $\pi/2$ до $\pi$, то в каждой точке мал либо один, либо другой сомножитель.

Таким образом, видно что первое слагаемое в (1) есть спектр сигнала, получающегося в результате воздействия на сигнал $c^{j+1}$ фильтра с частотной характеристикой $|m_0(\omega)|^2$. Этот фильтр независимо от функции $m_0(\omega)$ не оказывает никакого влияния на фазу выходного сигнала. При этом второе слагаемое в (1) вносит в выходной сигнал не инвариантное относительно сдвига входного сигнала возмущение. Причем величина этого возмущения зависит только от качества разделения частот фильтром $m_0(\omega)$ и никак не связана с его фазовой характеристикой.

Аналогичные рассуждения можно привести и для формулы (2).

Приведенные простые расчеты показывают, что при некоторых видах обработки сигнала, например, когда одинаково изменяются все коэффициенты $c^j$ или $d^j$ (как это может быть сделано для октавного эквалайзера) полученный итоговый фильтр можно считать фильтром с линейной фазой независимо от симметрии выбраной последовательности $\{h_n\}$. Таким образом, следует иметь в виду, что даже в задачах, где требование линейности фазы фильтров является естественным, иногда можно воспользоваться несимметричными базисами.

## §18. ДПФ как инструмент для всплеск-разложений или наоборот ?

Напомним, что в §12 был рассмотрен алгоритм вычисления коэффициентов разложений по всплескам, основанный на разложении сигналов по функциям промежуточных базисов, названных нами базисами Винера. Главное достоинство этого алгоритма состоит в его универсальности. Арифметические затраты на его реализацию не зависят ни от пространств всплесков, ни от базисов сдвигов в этих пространствах. Если сигнал разбивается на участки по $N = 2^n$ отсчетов, то благодаря использованию алгоритма БПФ число арифметических операций на одну точку пропорциональны $N \log_2 N$. Что совсем неплохо, если сравнивать с затратами на прямую сверточную реализацию алгоритмов для КМА, имеющих масштабирующее уравнение с большим числом коэффициентов. При этом алгоритмы с малыми окнами сверток или рекурсивные алгоритмы имеют меньшие арифметические затраты. Кроме того, такие алгоритмы позволяют обрабатывать сигнал целиком, не разбивая на участки и избегая тем самым проблемы краевых эффектов, связанных с периодизацией кусков и их стыковкой.

В то же время, имеются причины, позволяющие надеяться на возможность применения алгоритмов типичных для всплеск-разложений для вычисления преобразований типа ДПФ.

Сначала мы приведем наиболее яркий пример, иллюстрирующий сказанное выше. Рассмотрим в вещественном пространстве 1-периодических функций, КМА, порожденный базисом Хаара. Напомним, что в качестве функции $\varphi^n$ базиса Хаара для пространства $V^n$ берется функция

$$\varphi^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sqrt{n}, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & x \notin [0, 1/n], \end{cases}$$

а в качестве базисного всплеска в пространстве $W^n$ рассматривается функция $\psi^n(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1)$. Ясно, что при этом

$$m_0(\omega) = \frac{1 + e^{i\omega}}{2}.$$

Пусть известны коэффициенты разложения $\{c_k^n\}$ проекции $f_n$ функции $f$ на пространство $V^n$ по базису сдвигов $\varphi^n$. Тогда если полностью реализовать процедуру разложения в пакет всплесков, как это описано в §8, то, оказывается (см., напр., [CM]) , что коэффициенты разложения проекций на одномерные пространства $W_k^0$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, на выходе алгоритма в точности совпадают с коэффициентами разложения по базису Уолша, а сами пространства $W_k^0$, естественно, состоят из функций Уолша. Таким образом, алгоритм разложения функции в пакет всплесков, индуцированный КМА с базисом Хаара, это алгорим Быстрого Преобразования Уолша. Его можно реализовать за $N\log_2 N = 2^n n$ сложений и $N$ умножений. Таким же образом реализуется и Обратное Быстрое Преобразование Уолша как алгоритм реконструкции функции по коэффициентам ее всплеск-пакета.

К сожалению, для Дискретного Преобразования Фурье нет такой прямой связи с пакетами всплесков. Однако различие между алгоритмами не очень велико. Фактически алгоритм БПФ представляет собой почти полный аналог алгоритма разложения в пакет всплесков. Отличие состоит в том, что при реализации БПФ нет фиксированной функции $m_0$, а в качестве $m_0$ используются функции вида $m(\omega) = (1 + \gamma e^{iN\omega/2})/2$, где $\gamma$ — один из корней $N$-й степени из единицы. Интересно отметить, что для той части алгоритма такого "псевдо пакета всплесков", которая соответствует разложению по всплескам, т.е. проекциям на пространства $W^j = W_1^j$, коэффициент $\gamma$ функции $m_0$ неизменен и равен единице, так что сама функция равна $m_0(\omega) = (1 + e^{iN\omega/2})/2$. Ясно, что такая функция $m_0$ далека от того, что мы понимаем под фильтром нижних частот, а функции базисов сдвигов пространств $W^j$, формально являясь всплесками, вряд ли пригодны для рассмотренных выше задач сжатия сигналов. Во всяком случае, промежуточные ортогональные базисы и порожденные ими пространства, получающиеся в процессе разложения, еще нуждаются в дальнейшем осмыслении. Одно бесспорно — в этих пространствах частоты перемешаны, и для того чтобы организовать полосовой фильтр нужно полностью выполнить дискретное преобразование Фурье и оставить в спектре гармоники, соответствующие частотам полосы пропускания фильтра.

Совсем нетрудно подобрать такую функцию $m_0$ с хорошими спектральными свойствами, что на выходе алгоритма разложения в пакет всплесков получится спектр сигнала, а все промежуточные пространства содержат определенную полосу спектра. Для этого достаточно взять функцию

$$m_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

Любую полосу частот можно набрать из полос пространств $W_k^j$. Однако построение такого разложения является достаточно дорогим удовольствием. Алгоритм разложения в пакет всплесков будет иметь сложность порядка $N^2 \log_2 N$, а базисы всплесков будут плохо локализованы.

Таким образом, при точном построении фильтра с произвольной заданной АЧХ придется выполнить процедуру БПФ до конца. В то же время, разложения по всплескам (пакетам всплесков) могут пригодиться, если требуется приближенное построение фильтра. Для этой цели годятся любые КМА с хорошим разделением частот между пространствами, однако наиболее перспективными для этой цели представляются КМА, имеющие базисы, состоящие из рекурсивных всплесков. Это вызвано тем, что рациональная функция даже малого порядка может обеспечить хорошую крутизну фильтра $m_0$.

Покажем, каким образом можно сконструировать полосовой фильтр с заданной полосой пропускания $[\omega_l, \omega_u) \subset [0, \pi)$. При этом естественно считать, что $\omega_l = d_l\pi$, $\omega_u = d_u\pi$, где $d_l, d_u$, $0 \le d_l, d_u \le 1$, — двоично-рациональные числа, которые можно записать при помощи не более, чем $n = \log_2 N$ цифр после запятой. Через $\Delta$ обозначим совокупность таких двоичных чисел из интервала $[d_l, d_u)$.

Далее будем пользоваться обозначениями §8. Алгоритм состоит из двух этапов и строится следующим образом. На первом этапе по индукции конструируем вложенную последовательность пространств

$$V^n = W_0^n \supset W_{k_{n-1}}^{n-1} \supset \ldots \supset W_{k_m}^m$$

так, что спектр каждого из этих пространств покрывает множество $\pi\Delta$. По другому этот факт задается включениями $[k_l 2^l/2^n, (k_l+1)2^l/2^n) \subset \Delta$, $l = n, n-1, \ldots, m$. Заметим, что может случиться, что $m = n$. Пусть мы получили пространство $W_{k_p}^p = W_{2k_p}^{p-1} \oplus W_{2k_p+1}^{p-1}$. Тогда в случае, когда $(2k_p+1)2^{p+1}/2^n \notin \Delta$, в качестве $W_{k_{p-1}}^{p-1}$ выбирается то из пространств прямой суммы, чей спектр покрывает множество $\Delta\pi$. В случае же, когда $(2k_p+1)2^{p+1}/2^n \in \Delta$, переходим ко второму этапу алгоритма.

Началом второго этапа служат пространства $W_{2k_m}^{m-1}$, $W_{2k_m+1}^{m-1}$. Каждое из этих двух пространств порождает свою вложенную последовательность пространств, в которой каждое последующее пространство "в два раза меньше" предыдущего. Рассмотрим построение последовательности, соответствующей "левой" части спектра, т.е. принадлежащей $W_{2k_m}^{m-1}$. Построение ведется по следующей схеме. Полученное на предыдущем шаге пространство представляется в виде суммы двух пространств, что соответствует делению полосы частот, покрываемой текущим пространством, пополам.

Существуют три варианта положения точки деления частоты.

Если точка деления является левым концом полуинтервала $\pi\Delta$, то проекция на низкочастотное пространство зануляется, а высокочастотная часть включается в выходной сигнал, при этом процесс заканчивается.

Если точка деления частоты попадает внутрь множества $\pi\Delta$, то проекция сигнала на высокочастотное пространство включается в выходной сигнал, а низкочастотная часть (точнее, пространство, ее содержащее) включается в упомянутую вложенную последовательность. Далее полоса частот, которую покрывает выбранное пространство, снова делится пополам.

Наконец, в случае, когда точка деления частоты оказывается вне множества $\pi\Delta$, проекция на низкочастотное пространство выводится из рассмотрения, а высокочастотное пространство включается в конструируемую вложенную последовательность.

С пространством $W^{m-1}_{2k_m+1}$ поступим совершенно аналогичным образом. В итоге, на выходе алгоритма получим коэффициенты проекций входного сигнала на пространства из пакета всплесков, по которым можно восстановить выходной сигнал.

Ясно, что этот алгоритм дает лишь приближенную реализацию полосового фильтра. Однако точность может регулироваться количеством отводов рекурсивного фильтра (степенью знаменателя функции $m_0$).

Построенная схема обработки не является чем-то абсолютно новым. Фактически, с точностью до малой добавки получается обычный рекурсивный фильтр. Однако предлагаемая схема обладает большой гибкостью и простотой реализации любого полосового фильтра.

Заметим, что, как было показано в предыдущем параграфе, можно считать, что получающиеся фильтры имеют симметричную частотную характеристику. Поэтому с точки зрения классической аналоговой обработки сигналов они не могут быть физически реализуемыми. Однако для нас это означает всего лишь то, что мы не можем обрабатывать сигнал по мере его поступления, а должны иметь обрабатываемый участок целиком до началом обработки.

## §19. Мультивсплески.

Уже в статье И.Добеши [D1], где были впервые построены ортогональные базисы всплесков с компактным носителем, было показано, что за исключением КМА с базисом Хаара, не существует других КМА с ортогональными базисами, чьи элементы имеют компактный носитель и либо ось симметрии, либо центр симметрии. Следовательно, операторы проектирования на пространства всплесков нельзя трактовать как фильтры с линейной фазой.

Хотя, как это было показано в §17, на наш взгляд, об отсутствии линейности фазы можно говорить лишь в случае, когда рассматривается проекция, на пространство коэффициентов разложения сигналов по базису, а не на само пространство сигналов, тем не менее, этот аргумент послужил основным импульсом к поиску новых всплескоподобных базисов чьи элементы после подходящего сдвига аргумента становятся либо четными, либо нечетными функциями.

Наиболее перспективным направлением поиска подобных базисов считается построение базисов мультивсплесков.

За последние годы теория базисов мультивсплесков стала предметом детального рассмотрения (см., напр. [LLS1], [LLS2], [LLS3], [Sh]). Отправной точкой для поиска базисов мультивсплесков служит интуитивно оправданная идея построения КМА в котором свойство г) Определения 2.1 можно сформулировать в виде:
г) найдется набор таких функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in V^0$, что множество их сдвигов $\{\{\varphi_1(x-n)\}, \{\varphi_2(x-n)\}, \ldots, \{\varphi_k(x-n)\}\}$ образует ортонормированный базис пространства $V^0$.

Хотя в приведенной выше формулировке нет ни слова о линейной фазе или симметрии графиков функций, большинство исследователей (см., напр., [PS], [SS], [S], [SH]) строят КМА с базисами, удовлетворяющими именно таким свойствам. При этом всегда дополнительно требуется, чтобы базисы имели финитные носители. Эти требования оправданы тем, что масштабирующее уравнение для таких КМА приобретает вид

$$\Phi(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_k \Phi(2t-m), \tag{1}$$

где $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots \varphi_k(t))^T$, $C_k$ — матрицы размера $k \times k$. Поэтому арифметическая сложность алгоритмов резко увеличивается за счет их матричной природы. Значит, для того, чтобы надеяться на возможность их применения на практике, они должны обладать какими-то свойствами, которыми не обладали их предшественниики — ортогональные всплески Добеши.

Хотя в упомянутых выше работах рассмотрен общий подход к построению базисов мультивсплесков мы рассмотрим здесь лишь пример КМА, исследуемый в работе [SH]. Этот пример соответствует случаю $k = 2$. Коэффициенты масштабирующего уравнения (1) равны

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix};$$

а коэффициенты в масштабирующем уравнении

$$\Psi(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} D_k \Phi(2t - m), \tag{2}$$

определяющем базисные функции в пространстве всплесков определяются формулами

$$D_0 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \\ 1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D_1 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -10 \\ -9 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -3 \\ 9 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D_3 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обе базисные функции, определяемые масштабирующим уравнением (1) являются четными и имеют носители длины 1 и 2. Обе функции, задающие базис в пространстве всплесков, определяемые масштабирующим уравнением (2), имеют носитель длины 2, причем одна из них четна, а другая — нечетна. Заметим дополнительно, что полученный КМА обладает тем свойством, что проекция линейной функции на любое из пространств $V^n$ совпадает с этой функцией.

Пусть функция $f(t)$ принадлежит пространству $V^0$ тогда

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c^{(0)}_{1,n}\varphi_1(t-n) + c^{(0)}_{2,n}\varphi_2(t-n)).$$

Проекция функции $f(t)$ на пространство $V^{-1}$ задается формулой

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v^{(-1)}_{1,n} \\ v^{(-1)}_{2,n} \\ v^{(-1)}_{1,n+1} \\ v^{(-1)}_{2,n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \vdots \\ v^{(0)}_{1,n} \\ v^{(0)}_{2,n} \\ v^{(0)}_{1,n+1} \\ v^{(0)}_{2,n+1} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом задается проекция на пространство $W^{-1}$.

Таким образом, если мы имеем коэффициенты проекции $f(t)$ пространство $V^0$, не составляет труда реализовать алгоритм разложения. Однако построение проекции процедура достаточно неприятная. В случае $k = 1$ мы пришли к выводу, что можно прагматично полагать, что коэффициенты разложения проекции на пространство $V^0$ совпадают с отсчетами $f(n)$ функции. Для мультивсплесков такой метод не проходит, например, потому что коэффициентов разложения в $k$ раз больше, чем отсчетов.

В [SH] проводится сравнительный анализ нескольких вариантов для случая $k = 2$

Самый простой из этих вариантов взять две копии выборки сигнала $f(n)$ в качестве коэффициентов разложения по сдвигам базисных функций $\varphi_1$. Недостатки такого метода очевидны. Прежде всего это ведет к искаженияю сигнала, чего нет в случае $k = 1$. В самом деле, для классических всплесков, восстановив сигнал после сжатия, мы получим коэффициенты разложения по базису целочисленных сдвигов функции $\varphi$. И если мы изначально полагали, что они совпадают со значениями сигнала, то и восстановленые коэффициенты нужно считать восстановлеными значениями сигнала. Для мультивсплесков такой прием не проходит, поскольку в качестве входного сигнала для алгоритма сжатия берется две копии одного и того же сигнала, на выходе же алгоритма восстановления получатся два, вообще говоря, разных вектора, из которых придется собирать исходный сигнал. Другая неприятность подобного подхода связана с избыточностью подаваемой на вход алгоритма информации. Несмотря на то, что при правильно выбранном методе сжатия избыточность будет ликвидирована, однако обработка избыточной информации неизбежно ведет к увеличению арифметических затрат.

Второй рассмотренный в [SH] метод основан на выборе коэффициентов, исходя из условия интерполяции сигнала в полуцелых точках. Он может быть использован для произвольной системы мультивсплесков. Для его использования нужно рассмотреть сигнал на сетке с шагом $1/k$ и решить интерполяционную задачу (систему линейных уравнений). В случае системы мультивсплесков из [SH] задача решения системы резко упрощается за счет того, что во всех целых точках функция $\varphi_1$ обращается в нуль.

Построим алгоритм проектирования функции $f$ на пространство $V^0$. Введем в рассмотрение последовательность $f_n$, определенную по формулам $f_{2n} = f(n)$, $f_{2n+1} = f(n+1/2)$. Тогда коэффициенты проекции определяются из формул

$$f_{2n} = \varphi_2(1)v^{(0)}_{2,n-1},$$

$$f_{2n+1} = \varphi_2(3/2)v^{(0)}_{2,n-1} + \varphi_1(1/2)v^{(0)}_{1,n-1} + \varphi_2(1/2)v^{(0)}_{2,n}.$$

Нетрудно видеть, что отсюда имеем

$$v^{(0)}_{1,n} = \frac{\varphi_2(1)f_{2n+1} - \varphi_2(1/2)f_{2n+2} - \varphi_2(3/2)f_{2n}}{\varphi_2(1)\varphi_1(1/2)},$$

$$v^{(0)}_{2,n} = \frac{f_{2n+2}}{\varphi_2(1)},$$

а с учетом симметрии функции $\varphi_2$

$$v^{(0)}_{1,n} = \frac{\varphi_2(1)f_{2n+1} - \varphi_2(1/2)(f_{2n+2} + f_{2n})}{\varphi_2(1)\varphi_1(1/2)}.$$

## §20. Неортогональные базисы всплесков с компактным носителем.

Совокупность КМА, имеющих базисы сдвигов одной функции с компактным носителем, значительно шире, чем КМА, описанные И.Добеши, поскольку базисы в таких пространствах могут и не быть ортогональными. Разумеется, самым важным источником КМА такого рода являются сплайн-КМА. Базисы в них порождаются B-сплайнами (см. §14), сдвиги которых неортогональны. Изучению внутренних свойств посвящены многочисленные исследования (см., напр., [Ch], [ChL], [ChW]). Однако, благодаря не совсем точным высказываниям авторов этих исследований, может сложится впечатление, что неортогональные базисы с компактным носителем не допускают экономичных алгоритмов разложения и восстановления функций. Мы имеем ввиду такие алгоритмы, когда затраты на разложение и восстановление функции пропорциональны количеству дискретных отсчетов функции. Аргументация этого заблуждения вкратце такова.

Пусть сдвиги $\{\varphi(x-n)\}$ функции $\varphi$ с компактным носителем образуют (вообще говоря, неортогональный) базис сдвигов в пространстве $V^0$ и

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 \varphi(x-k).$$

Для того, чтобы построить ортогональную проекцию $f$ на пространство $V^{-1}$ в случае ортонормированности базиса $\varphi(x-n)$ мы должны посчитать скалярные произведения:

$$c_m^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(\bullet), \varphi\left(\frac{\bullet}{2} - m\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 \left\langle \varphi(\bullet - k), \varphi\left(\frac{\bullet}{2} - m\right)\right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 \overline{h_{k-2m}}, \quad (1)$$

что приводит к свертке с конечным окном. Если же сдвиги функции $\varphi$ не образуют ортонормированной системы, то для вычисления проекции на $V^{-1}$ нам понадобится биортогональный базис $\tilde{\varphi}(\bullet - n)$, т.е. базис пространства $V^0$, удовлетворяющий условиям

$$\langle \varphi(\bullet - n), \tilde{\varphi}(\bullet - m)\rangle = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Тогда формула вычисления коэффициентов проекции (1) преобразуется к виду

$$c_m^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(\bullet), \tilde{\varphi}\left(\frac{\bullet}{2} - m\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 \left\langle \varphi(\bullet - k), \tilde{\varphi}\left(\frac{\bullet}{2} - m\right)\right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^0 \tilde{h}_{k-2m}, \quad (2)$$

где окно свертки уже́ не будет конечным. Аналогичным образом строится ортогональная проекция на пространство $W^{-1}$.

Ясно, что в случае, когда масштабирующее уравнение (4.1) имеет лишь конечное число слагаемых,[13] то алгоритм реконструкции реализуется как свертка с конечным окном, что не очень существенно улучшает положение дел в целом.

[13] Для базисов B-сплайнов это условие выполнено

В данной схеме можно поменять ролями функции $\varphi$ и $\tilde{\varphi}$. В этом случае экономичным является алгоритм разложения, но не является таковым алгоритм реконструкции.

В качестве возможных вариантов выхода из подобной ситуации в упомянутых статьях рекомендуется либо воспользоваться алгоритмом перехода в частотную область, опирающимся на БПФ, либо на тот факт, что в (2) последовательность $\tilde{h}_n$ имеет экспоненциальный порядок убывания, поэтому, формулу (2) можно приближенно реализовать как свертку с конечным окном.

Заблуждение, что биортогональный базис с неограниченным носителем не позволяет эффективно реализовать алгоритм разложения сродни заблуждению, к которому склонны студенты, прослушавшие теоретический курс линейной алгебры и полагающие после этого, что для решения системы линейных уравнений нужно домножить вектор из правой части системы на матрицу, обратную к матрице системы. В то же время, даже для матрицы системы общего вида в три раза экономичнее оказывается метод основанный на треугольном разложении исходной матрицы, а уж для ленточных матриц выигрыш в арифметических затратах при правильно выбранном алгоритме может составлять несколько порядков.

Мы сейчас покажем, что наше сравнение с задачей решения системы линейных уравнений справедливо для данной задачи не только в переносном, но и прямом смысле.

Мы будем далее рассматривать периодические дискретные КМА. Как и ранее, полагаем, что термин "локальный носитель" размера $p$ соответствует случаю, когда найдется такая функция $\varphi^n$, порождающая базис пространства $V^n$, что функции, определенные рекуррентно по формулам (9.3), имеют носитель, принадлежащий отрезку $[0, pN/J]$, где $p << N$. Из формулы (9.6), в частности, следует, что базис всплесков $\vec{\psi}^j$ в пространствах $W^j$ можно выбрать таким образом, что функции $\psi^j$ также имеют локальный носитель.

Остановимся теперь на вычислительных аспектах процедур разложения и восстановления функций по всплеск-базисам с локальным носителем.

Покажем, что процедуры разложения произвольной функции по базисам всплесков с локальным носителем и процедуры ее восстановления могут быть реализованы за $O(pN)$ арифметических операций, где $p$ — введенный выше параметр, характеризующий размер носителя базисных функций. Будет видно, что эти алгоритмы состоят из операций решения систем линейных уравнений с циркулянтными матрицами, имеющими $O(p)$ ненулевых диагоналей, и операций обобщенных сверток с окнами размера $O(p)$.

Итак, пусть $\{\varphi^j\}_{j=0}^n$ — набор функций с локальным носителем размера $p$, удовлетворяющих условиям Теоремы 9.1, $\{\psi^j\}_{j=0}^{n-1}$ — полученные по формуле (9.6) функции, определяющие базисы всплесков.

Нам нужно получить алгоритм разложения произвольной функции $f \in \tilde{\mathbb{C}}^N$ в сумму вида $f(\bullet) = f_k(\bullet) + \sum_{m=k}^{n-1} g_m(\bullet)$, где $f_k \in V^k$, $g_m \in W^m$, $k = 0, 1, \ldots, n$; точнее, мы должны найти коэффициенты разложения $f_k$ и $g_k$ по соответствующим базисам сдвигов. Построение проведем обратной индукцией по $k$, начиная с $k = n$.

Поскольку

$$f_n(\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} f(\bullet) = \vec{a}^{nT} \vec{\varphi}^n(\bullet),$$

где $\vec{a}^n$ — искомый вектор коэффициентов, то, очевидно, $\vec{a}^n$ является решением системы линейных уравнений с $p$-диагональной циркулянтной матрицей (напомним, что $\vec{\varphi}^n(\bullet)$ можно считать либо вектор-функцией, либо матрицей размера $N \times N$).

Предположим, мы уже нашли разложение функции $f_{k+1}(0 \leq k < n)$ по базису $\vec{\varphi}^{k+1}(\bullet)$, тогда справедливы разложения

$$f_{k+1}(\bullet) = \left(\vec{a}^{k+1}\right)^T \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet) = f_k(\bullet) + g_k(\bullet) = \vec{a}^{kT} \vec{\varphi}^k(\bullet) + \vec{b}^{kT} \vec{\psi}^k(\bullet). \quad (3)$$

Домножив (3) скалярно справа сначала на компоненты вектора $\vec{\varphi}^k(\bullet)$, а затем на компоненты $\vec{\psi}^k(\bullet)$, получим

$$\left(\vec{a}^{k+1}\right)^T \left\langle \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet), \vec{\varphi}^k(\bullet) \right\rangle = \vec{a}^{kT} \left\langle \vec{\varphi}^k(\bullet), \vec{\varphi}^k(\bullet) \right\rangle, \quad (4)$$

$$\left(\vec{a}^{k+1}\right)^T \left\langle \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet), \vec{\psi}^k(\bullet) \right\rangle = \vec{b}^{kT} \left\langle \vec{\psi}^k(\bullet), \vec{\psi}^k(\bullet) \right\rangle. \quad (5)$$

Легко видеть, что левые части (4) и (5) можно рассматривать как свертки $\vec{a}^{k+1}$ с окнами размера $O(p)$, а векторы коффициентов $\vec{a}^k$ и $\vec{b}^k$ являются решениями систем линейных уравнений с циркулянтными матрицами, имеющими $O(p)$ диагоналей.

Алгоритмы восстановления функции $f$ также могут быть получены из формул (3). Действительно, зная векторы коэффициентов $\vec{a}^k$ и $\vec{b}^k$ при $0 \leq k < n$, мы можем найти $\vec{a}^{k+1}$, домножив равенство

$$\left(\vec{a}^{k+1}\right)^T \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet) = \vec{a}^{kT} \vec{\varphi}^k(\bullet) + \vec{b}^{kT} \vec{\psi}^k(\bullet)$$

на $\vec{\varphi}^{k+1}(\bullet)$ и получив при этом относительно вектора $\vec{a}^{k+1}$ систему линейных уравнений

$$\left(\vec{a}^{k+1}\right)^T \left\langle \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet), \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet) \right\rangle =$$

$$= \vec{a}^{kT} \left\langle \vec{\varphi}^{k}(\bullet), \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet) \right\rangle + \vec{b}^{kT} \left\langle \vec{\psi}^{k}(\bullet), \vec{\varphi}^{k+1}(\bullet) \right\rangle.$$

Заметим, что для решения системы $L$ линейных уравнений с $m$-диагональной матрицей необходимо выполнить треугольное разложение матрицы, затраты на выполнение которого имеют порядок $O(m^2 L)$. Однако в этих вычислениях не участвует функция, чье разложение по базису всплесков мы ищем. Поэтому их можно выполнить предварительно до процедуры разложения.

Таким образом, общие арифметические затраты на разложение и восстановление произвольной функции $f$ не превышают $O(pN)$.

## §21. Неоотогональные пространства всплесков.

Мы будем здесь действовать в рамках второго определения (Определение 10.3) всплеск-разложения пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Аргументация введения неортогональных разложений пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$ была приведена в §10. Одним из аргументов в пользу введения таких всплеск-разложений был факт существования экономичных алгоритмов. Это касается не только дискретных всплесков, но и всплесков непрерывного аргумента, в том числе и всплесков, определенных на прямой (см. [CDF], [D2]).

Пусть мы имеем КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, в котором существуют базисы сдвигов, удовлетворяющие соотношению (10.3), с малым по сравнению с $N$ числом отличных от нуля коэффициентов (или в спектральной терминологии — малой степенью тригонометрического полинома $m_0(\omega)$). Наша задача показать, что существует такое разложение в прямую (вообще говоря, неортогональную) сумму всплеск-пространств, что алгоритмы разложения и восстановления функций реализуются при помощи сверток с малым окном аналогично формулам (6.11), (6.12) и (6.14), которые преобразуются к виду

$$c_k^j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n^{j+1} r_{n-2k}, \tag{1}$$

$$d_k^j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n^{j+1} s_{n-2k} \tag{2}$$

и

$$c_k^{j+1} = \sum_{n=0}^{N/2-1} c_n^j a_{k-2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} d_n^j b_{k-2n}. \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. *Пусть для некоторого КМА в пространствах $V^j$ выбраны базисы $\vec{\varphi}^j$, удовлетворяющие (10.1) и (10.3). Тогда для данного КМА существуют такие базисы $\vec{\phi}^j$, также удовлетворяющие (10.1) и (10.3), т. е. для любых $j_1$, $j_2$, $0 \le j_1 < j_2 \le n$,*

$$\phi^{j_1}(2^{j_2-j_1}m) = \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1}-1} \phi^{j_2}(m + k2^{n-j_2+j_1}),$$

*и для любого $j$, $0 \le j < N$,*

$$\phi^{j-1}(\bullet) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \phi^j(\bullet - lN/J),$$

*что для характеристический полинома*

$$P_\phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^l$$

*базисов $\vec{\phi}^j$ имеем $|P_\phi(z)|^2 + |P_\phi(-z)|^2 > 0$ для всех $z$. При этом степень полинома $P_\phi$ не превышает степени $P_\varphi$.*

Аналог леммы 1 для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ можно найти, например, в работе Ч.Чуи и Ж.Ванга [ChW].

Доказательство леммы 1. Необходимость. Если характеристический полином

$$P_\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{K} a_l z^l,$$

где $K < N$, не имеет пар корней вида $\pm c$ и $P_\varphi(0) \neq 0$, то утверждение леммы 1 выполнено. Пусть числа $z = \pm c_0$ являются корнями полинома $P_\varphi, C = c_0^2$. Тогда справедливо представление

$$P_\varphi(z) = (C - z^2) \sum_{l=0}^{K-2} d_l z^l. \qquad (4)$$

Рассмотрим процедуру перехода к новым базисным функциям $\vec{\phi}_1^j$, которая позволяет уменьшить на единицу порядок характеристического полинома $P_\varphi$. Введем в рассмотрение функцию

$$\phi_1^{j-1}(\bullet) = \sum_{l=0}^{K-2} d_l \varphi^j(\bullet - lN/J). \qquad (5)$$

Поскольку согласно (4) $\varphi^{j-1}(\bullet) = C\phi_1^{j-1}(\bullet) - \phi_1^{j-1}(\bullet - 2N/J)$, то набор функций $\phi_1^{j-1}(\bullet - l2N/J)$, $l = 0, 1, \ldots, J/2 - 1$, образует базис пространства $V^{j-1}$ для $j > 0$, при этом для $j < n$ функции $\phi_1^j$ определяются по формуле (5), а для $j = n$ существование искомой функции $\phi_1^n$ следует из теоремы 10.1 и леммы 10.5.

Ясно, что связь между базисными функциями при различных $j$ выражается равенствами

$$\phi_1^{j-1}(\bullet) = \sum_{l=0}^{K-1} a_l' \phi_1^j(\bullet - lN/J),$$

где коэффициенты $a_l'$ определяются по формуле

$$\sum_{l=0}^{K-1} a_l' z^l = (C - z) \sum_{l=0}^{K-2} d_l z^l.$$

Будем повторять указанную процедуру до тех пор, пока полученный в итоге характеристический полином имеет корни вида $\pm c$. Поскольку каждый раз мы понижаем степень характеристического полинома на единицу, то за конечное число шагов придем к искомому базису $\vec{\varphi}_*^j$. Если $P_{\varphi_*}(0) \neq 0$, то полагаем $\vec{\phi}^j = \vec{\varphi}_*^j$. В противном случае $\vec{\phi}^j(\bullet) = \vec{\varphi}_*^j(\bullet + N/J)$.

Перейдем непосредственно к построению алгоритма декомпозиции функций. Пусть совокупность пространств $\{V^j\}$ определяет КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, $\{\vec{\varphi}^j\}$ — набор базисов этих пространств, причем эти базисы удовлетворяют соотношению (10.1) и соответствующий характеристический полином, чьи коэффициенты определяются из (10.3), имеет порядок $K < N$, и $|P_\phi(z)|^2 + |P_\phi(-z)|^2 > 0$ для всех $z$.

Мы покажем, что существует разложение пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$ в прямую, но, вообще говоря, неортогональную сумму всплеск-пространств $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$, для которых (в некотором базисе) алгоритмы декомпозиции произвольной функции и ее реконструкции осуществляются как дискретная свертка с окном размера не более $K+1$. Более того, свертывающие окна, задающие проекции на пространства $W^j$ и $V^j$ и восстанавливающие функцию $g \in V^{j+1}$ по ее проекциям на эти пространства, могут быть выбраны независящими от $j$. Это означает, что для произвольной функции

$$f(\bullet) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m^n \varphi^n(\bullet - m) \in \tilde{\mathbb{C}}^N$$

можно выполнить разложения

$$f(\bullet) = \sum_{m=0}^{J-1} c_m^j \varphi^j(\bullet - mN/J) + \sum_{l=j}^{n-1} \sum_{m=0}^{L-1} d_m^l \psi^l(\bullet - mN/L),$$

где $\vec{\psi}^l$ — базисы пространств $W^l$, и коэффициенты $\left\{\{c_m^j\}_{m=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{n-1}$ и $\left\{\{d_m^j\}_{m=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{n-1}$ могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$c_m^{j-1} = \sum_{l=\xi}^{\xi+K} c_{l+2m}^j r_l, \qquad d_m^{j-1} = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} c_{l+2m}^j s_l, \tag{6}$$

где $\xi$, $\zeta \in \mathbb{Z}$. Далее будет показано, что верхний предел суммирования в первой формуле может быть уменьшен на единицу. Последовательности $c_m^j$ и $d_m^j$ являются $J$-периодическими по нижнему индексу, а последовательности $r_l$ и $s_l$ можно считать определенными для всех целых индексов, но отличными от нуля только при $l = \xi, \xi+1, \ldots, \xi+K-1$ для первой последовательности и при $l = \zeta, \zeta+1, \ldots, \zeta+K$ — для второй. В дальнейшем мы полагаем $\zeta = \xi$, если $\xi + K$ — нечетно, и $\zeta = \xi - 1$ —

в противном случае. Сохраняя размер окон, мы можем перемещать их путем изменения параметра $\xi$, получая при этом новые решения нашей задачи. Единственное требование на расположение окна $r_l$ заключается в том, что оно должно иметь непустое пересечение с отрезком $[0, K]$ или с его сдвигом на $lN$, где $l \in \mathbb{Z}$. В противном случае первый из операторов (6) при $j = n$ отобразит функцию $\varphi^{n-1}$ на функцию вида

$$\sum_{l=0}^{N/2-1} \alpha_l \varphi^{n-1}(\bullet - 2l),$$

где $\alpha_0 = 0$, что невозможно, поскольку это оператор проектирования пространства $V^n$ на $V^{n-1}$. Мы полагаем, что $\xi$ — любое целое число, принадлежащее отрезку $[1-K, K]$.

Будем конструировать пространства $W^j$, исходя из условий, что их базисы $\vec{\psi}^j$ определяются соотношениями

$$\psi^{j-1}(\bullet) = \sum_{m=0}^{K} b_m \varphi^j(\bullet - mN/J),$$

где постоянные $b_m$ нам предстоит определить. Поскольку соотношения (6) задают операторы проектирования на пространства $V^{j-1}$ и $W^{j-1}$, то для $m = 0, 1, \dots, N/2-1$ справедливы равенства

$$\delta_{0m} = \sum_{l=\xi}^{\xi+K-1} a_{l-2m} r_l, \tag{7}$$

$$\delta_{0m} = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} b_{l-2m} s_l, \tag{8}$$

$$0 = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} a_{l-2m} s_l, \tag{9}$$

$$0 = \sum_{l=\xi}^{\xi+K-1} b_{l-2m} r_l \tag{10}$$

(здесь мы, естественно, полагаем, что последовательности $\{a_l\}, \{b_l\}$ являются $N$-периодическими и вне своих естественных областей определения доопределяются нулями). Хорошо известно (см. напр. [Ch] и [D2]) и нетрудно проверить, что для решения полученной системы уравнений в свертках достаточно найти решение системы уравнений

$$A(z)R(z)+A(-z)R(-z)\equiv 2, \tag{11}$$

$$B(z)S(z)+B(-z)S(-z)\equiv 2, \tag{12}$$

$$A(z)S(z)+A(-z)S(-z)\equiv 0, \tag{13}$$

$$B(z)R(z)+B(-z)R(-z)\equiv 0, \tag{14}$$

где

$$A(z)=\sum_{l=0}^{K}a_l z^l, \qquad B(z)=\sum_{l=0}^{K}b_l z^l,$$

$$R(z)=\sum_{l=\xi}^{\xi+K-1}r_l z^{-l}=z^{-\xi-K+1}\sum_{l=0}^{K-1}r_{\xi+K-1-l}z^l \stackrel{\mathrm{def}}{=} z^{-\xi-K+1}\overset{\vee}{R}(z),$$

$$S(z)=\sum_{l=\zeta}^{\zeta+K}s_l z^{-l}=z^{-\zeta-K}\sum_{l=0}^{K}s_{K+\zeta-l}z^l \stackrel{\mathrm{def}}{=} z^{-\zeta-K}\overset{\vee}{S}(z).$$

Уравнения (11) — (13) можно переписать в виде

$$A(z)\overset{\vee}{R}(z)+(-1)^{\xi+K-1}A(-z)\overset{\vee}{R}(-z)=2z^{\xi+K-1}, \tag{15}$$

$$B(z)\overset{\vee}{S}(z)+(-1)^{\zeta+K}B(-z)\overset{\vee}{S}(-z)=2z^{\zeta+K}, \tag{16}$$

$$A(z)\overset{\vee}{S}(z)+(-1)^{\zeta+K}A(-z)\overset{\vee}{S}(-z)=0, \tag{17}$$

$$B(z)\overset{\vee}{R}(z)+(-1)^{\xi+K-1}B(-z)\overset{\vee}{R}(-z)=0, \tag{18}$$

Согласно лемме 15.3 и выбору $\xi$ существует единственная пара полиномов $Q_1$ и $Q_2$ порядка не выше $K-1$, удовлетворяющая уравнению

$$A(z)Q_1(z)+(-1)^{\xi+K-1}A(-z)Q_2(z)=2z^{\xi+K-1}.$$

При этом, очевидно, $Q_1(z)=Q_2(-z)$. Таким образом, полином $\overset{\vee}{R}(z)=Q_1(z)$ удовлетворяет уравнению (15).

Если $\xi + K$ — нечетно, то нетрудно проверить, что функции $B(z) = z\overset{\vee}{R}(-z)$ и $\overset{\vee}{S}(z) = A(-z)$ удовлетворяют уравнениям (15) — (17). В случае же четного $\xi + K$ решениями этих уравнений являются функции $B(z) = \overset{\vee}{R}(-z)$ и $\overset{\vee}{S}(z) = -A(-z)$.

Несмотря на кажущийся произвол при выборе полиномов $B$ и $\overset{\vee}{S}$, пространства $W^j$ полностью определяются выбором полинома $\overset{\vee}{R}$, поскольку коэффициенты этого полинома полностью определяют оператор проектирования на пространство $V^j$ вдоль пространства $W^j$.

Для того, чтобы показать, что полученные пространства $W^j$ действительно имеют размерность $J$, докажем справедливость формулы реконструкции (3) которая по отношению к оператору проектирования пространства $V^{j+1}$ на пространства $W^j$ и $V^j$ является обратным оператором. Значит,

$$\dim W^j = \dim V^{j+1} - \dim V^j = 2J - J = J.$$

В справедливости же формулы (19) достаточно убедиться при $j = n + 1$. Обозначим через $A$ матрицу размера $2^{n-1} \times 2^n$, первая строка состоит из элементов $a_0$, $a_1$, … , а последующие получаются из предыдущей циклическим сдвигом вправо на две позиции. Аналогичным образом построим матрицы $B$, $R$, $S$. Тогда система уравнений (7) — (10) может быть записана в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (R^T S^T) = E.$$

Следовательно, матрица $(R^T S^T)$ имеет обратную $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, значит, она невырождена и оператор реконструкции функции задается формулой (3).

Разумеется, когда $K$ велико, более привлекательным оказывается описанный в §12 подход, основанный на переходе к базисам Винера. Поскольку для любого $j = 1, \ldots, n$ и любого $l$, как и в ортогональном случае, линейные оболочки пар функций $v_l^j$, $v_{l+J/2}^j$ и $v_l^{j-1}$, $w_l^{j-1}$ совпадают, то формулы (12.1) — (12.2) переносятся (конечно, с другими коэффициентами) на случай неортогональных пространств всплесков.

## §22. Всплески и сжатие изображений.

Вопрос обработки (главным образом сжатия) изображений является наиболее популярным среди исследователей и наиболее продвинутым. Методы разложения изображений по базисам всплесков для последующего сжатия развиты достаточно для их применения для хранения изображений и передачи их на расстояние. В определенной степени эту тематику можно считать завершенной, и в ближайшее время едва ли можно ожидать революционных изменений в рамках классической теории всплесков. Разумеется, поиск новых базисов всплесков может привести как к большим коэффициентам сжатия, так и к некоторому уменьшению арифметических затрат на реализацию алгоритмов, однако, на наш взгляд, маловероятно, что эти улучшения превысят 20%.

Главным конкурентом всплеск-разложений и текущим стандартом сжатия изображений является JPEG формат представления данных. В двух словах JPEG-разложение состоит в следующем. Изображение разбивается на квадраты размера $8 \times 8$ пикселей. К каждому из этих квадратов применяется косинус-преобразование Фурье, что соответствует ДПФ дополненной четным образом текущей матрицей размера $8 \times 8$ до матрицы размера $16 \times 16$. Напомним, что экспоненциальный базис является оптимальным (в том смысле, что коэффициенты разложения по нему можно считать некоррелированными случайными величинами) для стационарных сигналов. В то же время, рассматривая ДПФ на малом квадрате, можно сигнал считать стационарным. Такой подход позволяет при помощи локализации обработки воспользоваться оптимальностью ДПФ. Дальнейшая обработка заключается в квантовнии полученных коэффициентов разложения в соответствии с требуемым коэффициентом компрессии и последующем "сжатии без потерь" при помощи кода Хаффмана переменной длины, арифметического кодирования или им подобных методов. При этом, несмотря на то, что арифметическое кодирование несколько эффективнее метода Хаффмана, в большинстве коммерческих разработок используется код Хаффмана. Это обусловлено тем, что метод арифметического кодирования и все его вариации запатентованы фирмой IBM.

Стандарт JPEG хранения изображений достаточно гибок и позволяет использовать внутри себя многочисленные варианты кодирования. Два основных варианта отличаются последовательностью кодирования: по пространству или по частоте. Первый из этих методов позволяет восстанавливать сигнал последовательно по строкам (точнее по горизонтальным полосам шириной 8 пикселей. Второй же метод позволяет сначала грубо восстановить изображение, раскодировав низкочастотные компоненты, постепенно уточняя его, насыщая высокими частотами.

Восстановленное после сильного ($>25$ раз) сжатия изображение имеет типичные участки постоянства интенсивности, совпадающие с квадратами разбиения.

Алгоритм сжатия, опирающийся на разложение по базисам всплесков, во многом похож на алгоритм JPEG. Формальное отличие состоит лишь в том, что вместо локализованных базисов косинусов он использует базис всплесков. Однако на самом деле развитие алгоритмов кодирования коэффициентов всплеск-разложений привело к разработке очень эффективных методов, ориентированных исключительно на всплеск-разложения. Изначально такой алгоритм был предложен в работе Дж.Шапиро [Sh]. Остановимся кратко на сути этих методов. При кодировании одномерных и числовых или символьных последовательностей предварительно кодируются последовательности нулей. Затем каждому символу в зависимости от частоты его появления в последовательности ставится в соответствие код, длина которого тем меньше, чем выше частота появления символа. Именно так поступают в традиционном алгоритме JPEG. В случае, когда отсутствует корреляция между соседними ненулевыми элементами последовательности такой подход является в определенном смысле оптимальным. Однако при сведении многомерной последовательности к одномерной обычно теряется существенная часть информации. Примером такой потери является замена многомерной области состоящей из нулей в множество нулевых последовательностей, нуждающихся в независимом кодировании. Основная идея Дж.Шапиро основана на наблюдении, что если некоторый коэффициент разложения по базису пространства $W^j$ равен нулю, то и все коэффициенты разложения для пространств $W^k$, $k>j$, соответствующие тем же пространственным координатам, с большой вероятностью также равны нулю. Таким образом, указав в коде лишь координату корня, получившегося дерева нулей, мы закодируем тем самым все "дерево нулей". По этой причине все современные алгоритмы компрессии изображений (см. напр, [SP], [MC], [XRO]) в той или иной мере основаны на кодировании дерева нулей.

Таким образом, благодаря возможности значительно больших (в 1.5 – 2 раза) коэффициентов сжатия и быстрым алгоритмам, эффективность таких алгоритмов не вызываввает сомнений специалистов. Принимаемый в настоящее время стандарт сжатия JPEG2000 включает в себя всплеск-преобразование как основной режим сжатия фотографических изображений.

Рассмотрим поэтапно процедуру кодирования изображения со сжатием. Сначала обсудим, каким образом следует оценивать "расстояние между изображениями", т.е. качество представления исходного изображения при помощи изображения, восстановленного после сжатия. К настоящему моменту нет полной ясности, как математически описать понятие близости объектов с точки зрения человеческого глаза. С одной стороны, вопрос определения качества восстановленного после сжатия изображения можно свести к экспертной оценке. Несмотря на субъективность такого подхода он, вероятно, более объективен, чем поиск какой-нибудь метрики, адекватной человеческому восприятию. С другой же стороны, мы все-таки обязаны прийти к некоторой договоренности о подходящем математическом описании близости изображений. Это обусловлено следующим обстоятельством, связанным с квантованием коэффициентов разложения.

Пусть исходная функция (изображение) представлена в виде разложения по некоторому базису

$$f(x) = \sum a_i \varphi_i(x), \tag{1}$$

и необходимо перед отправкой коэффициентов $\{a_i\}$ на хранение выполнить их квантование — заменить их приближенными значениями $\tilde{a}_i$. Разумеется, ущерб наносимый изображению заменой $a_i$ на $\tilde{a}_i$ определяется не только разностью этих величин, а вкладом в изображение базисной функции $\varphi_i$. Этому вкладу ставится в соответствие некоторый весовой коэффициент $k_i$, после чего осуществляется равномерное квантование величин $a_i k_i$. Несмотря на то, что такой подход к квантованию имеет очевидные существенные недостатки, на которых мы остановимся далее, он является общепринятым. Для JPEG-сжатия существует набор таблиц весов для коэффициентов косинус-преобразования Фурье, в которых коэффициентам при низкочастотных гармониках соответствуют большие веса, а при высокочастотных — меньшие. В разных случаях при разных коэффициентах сжатия используются разные таблицы весов. Ущербность такого подхода следует хотя бы из того факта, что погрешность восстановленного после сжатия изображения не определяется для глаза суммой погрешностей по каждой компоненте разложения.

В частности, восприятие добавки к изображению какой-либо гармоники зависит от фона к которому она добавляется. Однако с одной стороны, о существовании какого либо лучшего алгоритма нам не известно, а с другой стороны, даже в случае его существования, вероятно, пришлось бы пойти на значительные арифметические затраты, что оказалось бы неприемлемым для практической реализации.

Мы при выборе весовых коэффициентов будем пользоваться даже более простыми соображениями, чем те, котрые используются при составлении таблиц в JPEG. Мы будем опираться на $\mathbb{L}^p$-веса компонент разложения, где следует выбрать число $p > 0$, наиболее адекватно отражающее восприятие человека. В терминах представления (1) это означает, что при фиксированном $p$ весовые коэффициенты $k_i$ выбираится из условия, что для любых $i$ и $j$ имеем

$$\frac{\|\varphi_i\|_p}{k_i} = \frac{\|\varphi_j\|_p}{k_j},$$

где

$$\|\varphi\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Что касается выбора подходящего $p$, то хотя в литературе и нет полного согласия на этот счет, но расхождения не принципиальны, поскольку различие в качестве представления изображений при выборе $p$ в диапазоне $1 \leq p \leq 2$ мало. Таким образом, хотя обычно норма пространства $\mathbb{L}^1$ считается наиболее подходящей при обработке изображений, но евклидова норма также вполне приемлема и если ее использование ведет к некоторому упрощению в теоретических вопросах, то имеет смысл опираться именно на евклидову норму. Заметим, что при обработке звуковых сигналов самой подходящей оказывается метрика пространства $\mathbb{L}^\infty$.

При вычислении коэффициентов разложения изображения по базису всплесков наиболее тонким моментом является борьба с краевыми эффектами. Несмотря на хорошую локализацию базисов всплесков, проблема краев все-таки возникает.

Самый простой вариант учета краев — их ликвидация при помощи периодизации изображения, основанной на склейке противоположных краев. Таким образом, периодизированное изображение можно считать функцией, определенной на торе.

Недостатком такого варианта являются скачки в местах склейки, для представления которых требуется присутствие в разложении по базису высокочастотной компоненты. Это ведет к использованию значительной части ресурсов на бесполезную борьбу со скачком и, следовательно, к уменьшению допустимого уровня сжатия. Потери в коэффициенте сжатия могут достигать примерно полутора раз. Тем не менее, такой метод пригоден для всех базисов всплесков, и ему можно отдать предпочтение, когда имеется изображение на однородном фоне или когда изображение достаточно сложное и имеет шумоподобный вид. При этом в первом случае склейка получается гладкой, а во втором случае ресурсы, затраченные на борьбу со склейкой, малы по сравнению с ресурсами затраченными на точное отображение сложного рельефа изображения. Правда стоит отметить, что во втором случае коэффициет сжатия будет мал и на самом деле, можно сформулировать очевидное правило: чем меньше коэффициент сжатия изображения, тем менее существенна проблема краев вообще и скачка в месте склейки в частности.

Второй способ борьбы с краями состоит четном продолжении функции относительно двух перпендикулярных краев и последующей периодизации в точности так, как это делается в JPEG для квадратов $8 \times 8$. Такое продолжение изображения за края выгодно отличается тем, что если исходное изображение было непрерывной функцией, то и продолженное тоже останется непрерывной функцией. К сожалению, если исходная функция была гладкой, то гарантировать гладкость в склейке можно лишь в точках границы, где соответствующая односторонняя частная производная была равна нулю. Вообще продолжение функции многих переменных через границу с сохранением гладкости в том или ином смысле является тонким вопросом и в каждом конкретном случае решается индивидуально. Для изображений, несмотря на появление угла в месте склейки, четное непрерывное продолжение является вполне приемлемым. Изображение становится в 4 раза больше и для представления его разложения по произвольному базису всплесков требуется в 4 раза больше слагаемых. Однако в случае базисов всплесков, состоящих из функций, которые с точностью до сдвига их графиков по горизонтальной оси, являются четными или нечетными, ни затраты на вычисление коэффициентов разложения, ни количество самих коэффициентов не увеличивается. К сожалению, при разложении по произвольному базису всплесков такая периодизация не решает всех проблем. В самом деле, если мы не хотим увеличивать количество коэффициентов, используемых для представления изображения, то должны хранить лишь коэффициенты, соответствующие основной части изображения. Для их вычисления мы можем использовать симметричную относительно края часть отображения. А вот точно восстановить исходное изображение по "четверти" коэффициентов мы не можем. Поэтому нужно вырабатывать принципы экстраполяции последовательности коэффициентов за край для минимизации искажений в граничных точках. При этом симметричное продолжение, хотя и является возможным, но не является наилучшим.

Все дальнейшие оценки коэффициентов сжатия основаны на применении после разложения по базисам всплесков комбинации кодирования длин последовательностей нулей с последующим применением метода Хаффмана.

Еще одна проблема, которую нужно обсудить до представления основных результатов, это выбор глубины переработки, т.е. выбор числа отщепленных от исходного пространства $V^n$ всплеск-пространств. Таким образом, глубина переработки это число $d$ в формуле

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{W}^{n-1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}^{n-d} \oplus \mathbf{V}^{n-d}.$$

С одной стороны, каждый новый шаг в последней формуле по арифметическим затратам обходится в 4 раза дешевле, чем предыдущий. Поэтому построение полного разложения с максимально возможной глубиной ненамного дороже, чем разложение с глубиной 1. Следовательно, может показаться, что всегда стоит строить полное разложение.

С другой стороны, при глубине переработки $d$ пространству $\mathbf{V}^{n-d}$ соответствует всего лишь $1/4^d$ часть от полного набора коэффициентов разложения. Поэтому для сжатия нет необходимости брать $d$ слишком большим поскольку даже при $d = 4$ только 0.4% общего количества коэффициентов соответствует пространству $\mathbf{V}^{n-5}$. Поэтому, ввиду того, что реальные коэффициенты сжатия не превосходят 100, последующая переработка коэффициентов проекции на пространство $\mathbf{V}^{n-d}$ не имеет смысла. Более того, нет особого смысла заботиться о квантовании этих коэффициентов и последующем их кодировании.

Таким образом, из двух последних абзацев может сложиться впечатление, что при $d \geq 4$ безразлично делать или нет более глубокую переработку. Для всплесков с симметричными графиками это действительно безразлично. Однако при отсутствии симметрии, когда становится актуальной борьба с краевыми искажениями, глубина переработки $d = 4$ является оптимальной, поскольку, чем глубже переработка, тем шире носители базисных функций, и тем глубже искажения с краев перемещаются внутрь изображения. Кроме того, изображения не всегда имеют размеры в пикселах, являющиеся степенью двойки. А для того чтобы провести разложение по базису с глубиной $d$, необходимо, чтобы размеры изображения были кратны $2^d$. Таким образом, необходимо экстраполировать изображение за край. И если $d$ достаточно велико, то эта экстраполяция становится неприятной с точки зрения разного рода дополнительных затрат задачей. Если $d = 4$, нам нужно экстраполировать изображение самое большее на 15 столбцов и 15 строк. С другой стороны, увеличение глубины разложения ведет к деревьям нулей, состоящих из большего числа элементов, что ведет к увеличению коэффициента компрессии. Однако увеличение размера дерева можно достичь объединением "корней" этих деревьев, поэтому, упомянутые выше алгоритмы кодирования используют разложение на глубину, не превышающюю 4.

Мы будем здесь пользоваться следующими обозначениями. Поскольку нас будут интересовать биортогональные пары базисов вплесков, то формулы декомпозиции будут записываться в виде

$$c_n^1 = \sum_k \bar{h}_{k-2n} c_k^0, \qquad d_n^1 = \sum_k \bar{g}_{k-2n} c_k^0,$$

а формула реконструкции

$$c_l^0 = \sum_n \left( \tilde{h}_{l-2n} c_n^1 + \tilde{g}_{l-2n} d_n^1 \right),$$

где $h_n$ может не совпадать с $\tilde{h}_n$, при этом справедливы соотношения

$$g_n = (-1)^{n+1} \tilde{h}_{-n+1}, \tilde{g}_n = (-1)^{n+1} h_{-n+1}.$$

В настоящее время общепризнанным лидером, обеспечивающим достаточно высокий коэффициент сжатия при относительно низких вычислительных затратах, является биортогональный базис (мы будем называть его CDF9/7, применение которого для сжатия изображений впервые было рассмотрено в [ABMD] (см. также [CDF], [D2, стр 279]). Коэффициенты сверток задаются следующим образом:

$$h_0 = 0.852699, \quad h_{\pm 1} = 0.377402, \quad h_{\pm 2} = -0.110624,$$

$$h_{\pm 3} = -0.023849, \quad h_{\pm 4} = 0.037828,$$

$$\tilde{h}_0 = 0.788486, \quad \tilde{h}_{\pm 1} = 0.418092, \quad \tilde{h}_{\pm 2} = -0.040689, \quad \tilde{h}_{\pm 3} = -0.064539.$$

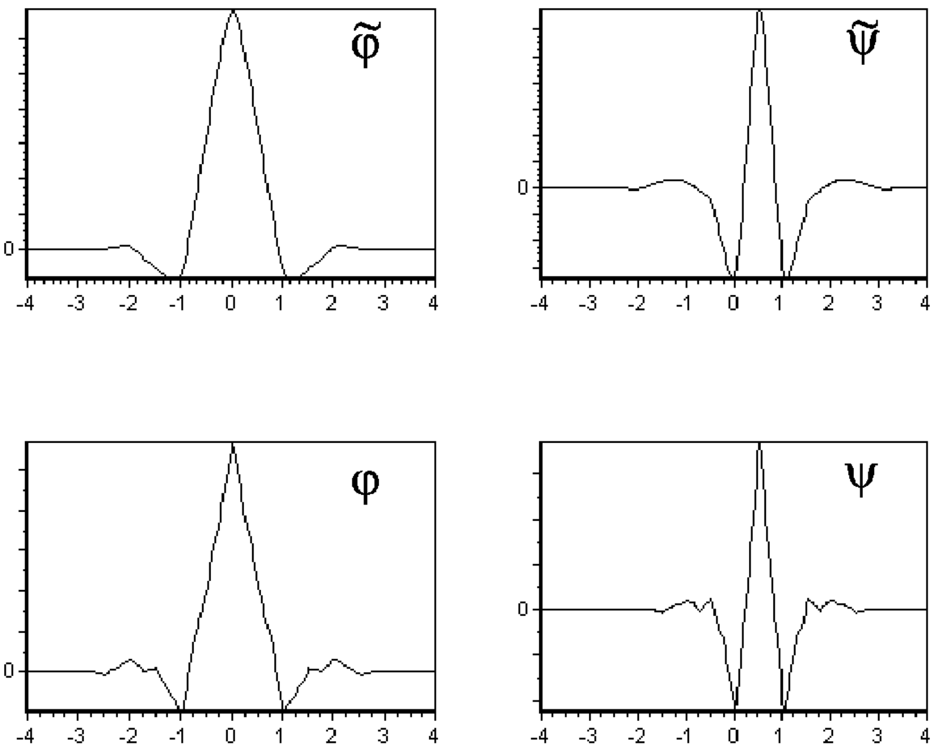



Рис. 1

Графики функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$, определяющие базисы, по которым производится разложения, а также двойственные им функции $\varphi$ и $\psi$ приведены на Рис. 1. Алгоритмы сжатия, использующие разложение по данному базису, обеспечивают выигрыш в коэффициенте сжатия (который может быть разным для разных изображений) по отношению к стандарту JPEG в пределах 1.5 – 2 раз.

В недавней работе [WPB] был построена биортогональная пара базисов, дающая дополнительный выигрыш в сжатии в пределах 3-10 %. Ниже мы приводим соответствующие им последовательности $h_n$ и $\tilde{h}_n$.

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \phantom{-}0.730018808, & h_2 &= \phantom{-}0.078814418, & h_3 &= -0.142800426,\\
h_4 &= \phantom{-}0.018097252, & h_5 &= \phantom{-}0.036833941, & h_6 &= -0.0093268515,\\
h_7 &= -0.0065812408, & h_8 &= \phantom{-}0.001207186, & h_9 &= \phantom{-}0.000975453,\\
h_{10} &= -0.000071375, & h_{11} &= -0.00006039;
\end{aligned}
$$

$$\tilde{h}_1 = \quad 0.648022975, \qquad \tilde{h}_2 = \quad 0.162005743, \qquad \tilde{h}_3 = -.097203451,$$
$$\tilde{h}_4 = -.02777241, \qquad \tilde{h}_5 = \quad 0.021600768, \qquad \tilde{h}_6 = 0.0029456,$$
$$\tilde{h}_7 = -.002492395;$$

$h_{1-k} = h_k$, $k = 1, ..., 11$; $h_{1-m} = h_m$, $m = 1, ..., 7$. Графики соответствующих им базисных функций приведены на Рис. 2.

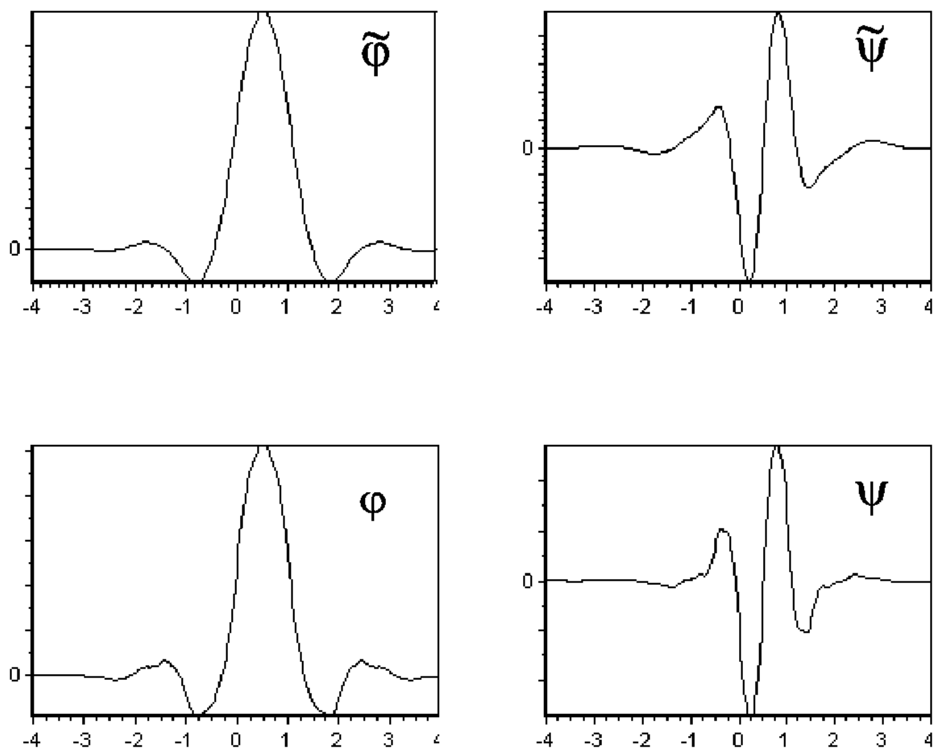



Рис. 2

К сожалению, вычислительные затраты на разложение по таким базисам более чем в 3 раза превышают затраты на разложение по базисам CDF9/7.

## Заключение

Мы рассмотрели лишь основные направления теории всплесков и только одну прикладную задачу — сжатие изображений. Среди нерассмотренных, но важных прикладных задач остались обработка и сжатие одномерных (в частности, звуковых) сигналов, очистка изображений от шума, численные методы решения уравнений в частных производных.

Среди вопросов, имеющих одинаковое значение, как для теории, так и для практики, мы совсем не касались таких двух новых направлений, которые приобрели стройные очертания к концу 1996 года, как всплеск-преобразования, переводящие целые числа в целые, и реализация всплеск-преобразований при помощи lifting scheme (см., напр., [DS]). Первое направление важно из-за возможности его точной реализации в устройствах с целой арифметикой, кроме того оно позволяет создание алгоритмов сжатия сигналов и изображений без потери информации, другое — позволяет достичь серьезной экономии в вычислительных затратах при реализации алгоритмов разложения и восстановления.

Разумеется прилагаемый список литературы далек от полноты. В настоящее время существует два журнала, практически полностью посвященные теории всплесков, а также несколько журналов, постоянно публикующих статьи по этой тематике. При этом динамика появления новых статей такова, что журнальные публикации лишь фиксируют то знание, которое научное сообщество получило через Интернет или общение на конференциях за 2 – 3 года до выхода журнала. Поэтому журнальные публикации сейчас дают лишь возможность делать точные общедоступные ссылки, но, как правило, не являются источником информации. Для получения информации о текущем состоянии всех направлений исследований по базисам всплесков и их приложениям можно воспользоваться сайтом *http://www.wavelet.org*.

## Литература


[ABMD] Antonini M., Barlaud M., Mathieu P., Daubechies, I., *Image coding using wavelet transforms*, IEEE Trans. on Image Process. V. 1 (1992), No 2.

[B] Battle G., *A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarier functions*, Comm. Math. Phys. V. 110 (1987). P. 601 – 615.

[BDR] de Boor C., DeVore R.A., Ron A., *On the Constuction of Multivariate (Pre) Wavelets*, Constr. Approx. V. 9 (1993). P. 123 – 166.

[Ch] Chui Ch. K., *An Introduction to wavelets*, 1992.

[ChL] Chui Ch. K., Li Chun, *Nonorthogonal wavelet packets*, SIAM J. Math. Anal V. 24 (1993). No 3. P. 712 – 738.

[ChW] Chui Ch. K., Wang J.-Zh., *A general framework of compactly supported splines and wavelets*, J. of Approx. Th. V. 71 (1992). No 3. P. 263 – 304.

[ChM] Chui Ch.K., Mhaskar H.N., *On trigonometric Wavelets*, Constr. Approx. V. 9 (1993). P. 167 – 190.

[C] Cohen A., *Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres mirror en quadratures*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire V. 7 (1990). P. 439 – 459. (1992), SIAM, Philadelphia.

[CD] Cohen A., Daubechies I., *Orthonormal bases of compactly supported wavelets. III. Better frequency resolution.*, SIAM J. Math. Anal. V. 24 (1993). # 2. P. 520 – 527.

[CDF] Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.-C., *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. V. 45 (1992). # 5. P. 485 – 560.

[CS] Cohen A., Schlenker J.-M., *Compactly supported Bidimensional Wavelet Bases with Hexagonal Symmetry*, Constr. Approx. V. 9 (1993). # 2–3. P. 209 – 236.

[CM] Coifman R. R., Meyer Y., Wickerhauser V., *Wavelet Analysis and Signal Processing Wavelets and their Applications*, Wavelets and their Applications, Jones and Barlett, Boston. 1992. P. 153 – 178.

[D1] Daubechies I., *Orthonormal basis of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 1988. V.41. P. 909 – 996.

[D2] Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[DS] Daubechies I., Sweldens W., *Factoring wavelet transforms into lifting steps*, J. Fourier Anal. Appl. V. 4 (1998) # 3 (1998).

[DD] Deslauriers G, Dubuc S. 1987, *Interpolation diadique*, Fractals, dimensions non entiéres et applications (Cherbit G., ed.), Masson, Paris. 1987. P. 44 – 45.

[HV] Herley C., Vetterli M., *Wavelets and recursive filter banks*, IEEE Trans. Signal Process. V. 41 (1993). P. 2536 – 2556.

[H] Holschneider M., *Wavelets. An Analysis Tool.*, 1995.

[KS] Kovačevič J., Sweldens W., *Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions* (December 1997), Preprint. Submitted to IEEE Trans. on Image Processing.

[LLS1] Lee S. L., Lawton W., Shen Z. “Stability and orthonormality of multivariate refinable functions”, SIAM Journal of Mathematical Analysis, V. 28 (1997), # 4, P 999 – 1014.

[LLS2] Lee S. L., Lawton W., Shen Z., *An algorithm for matrix extension and wavelet construction*, Mathematics of Computation V. 65 (1996). # 214 P. 723 – 737.

[LLS3] Lee S. L., Lawton W., Shen Z., *Convergence of multidimensional cascade algorithm,*, Numerische Mathematik V. 78 (1998), P. 427 – 438.

[L] Lemarie P.G., *Une nouvelle base d'ondelettes de $L^2(R^n)$*, J. de Math. Pures et Appl. V. 67 (1988). P. 227 – 236.

[Ma] Mallat S., *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L_2(R)$*, Trans. AMS. V. 315 (1989). P. 69 – 87.

[MF] Mallat S., Falzon F., *Understanding Image Transform Code*, Proceedings of the SPIE Aerospace Conference, Orlando (1997).

[MC] Marpe D., Cycon H.L., *Very low bit rate video coding using wavelet-based techniques*, IEEE Trans. on CSVT (1999).

[M1] Meyer Y., *Wavelets and operators*, Cambrige University Press, 1992.

[M2] Meyer Y., *Wavelets and Operators in analysis at Urbana.*, LMS Lecture Notes (Berkson etc. ed) V. 137 (1989).

[M3] Meyer Yves, *Wavelets: Algorithms & Applications*, 1993. 133 P.

[M4] Meyer, Y., *Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs*, Seminaire Bourbaki. 1985 – 1986. # 662.

[PB] Perrier V. and Basdevant C., *Periodical wavelets analysis, a tool for inhomogeneous field investigation.*, // La Recherche Aerospatiale 1989. # 3. P. 53 – 67.

[PS] Plonka G., Strela V., *Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry*, Preprint. 1995. 35 P.

[SP] Said A., Pearlman W.A., *A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees*, IEEEE Trans. on CSVT, V.6 (1996), #3, P. 243 – 250.

[Sh] Shapiro J.M., *Embedded image coding using zertrees of wavelet coefficients*, IEEE Trans. on Signal Processing, V.41(1993), #12, 3445 – 3462..

[Sk] Skopina M.A., *Multiresolution analysis of periodic function*, East J. on Approx. V.3 (1997), P. 203 – 224.

[Sh] Shen Z., *Refinable function vectors*, SIAM J. on Math. Anal. V.29 (1998). #1 P. 235 – 250.

[SZ1] Stanhill D., Zeevi, Y.Y., *Two-dimensional linear phase orthogonal filter-banks and wavelets* (June 1995), Preprint.

[SZ2] Stanhill D., Zeevi Y.Y., *Two-dimensional orthogonal wavelets with vanishing moments* (June 1995), Preprint.

[SN] Strang G., Nguyen T., *Wavelets and Filter Banks. 1996.*

[SS] Strang G., Strela V., *Short wavelets and matrix dilation equations*, Preprint. 1995. 16 P.

[S] Strela, V., *Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform*, Preprint. 1995. 15 P.

[SH] Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C., *The application of multiwavelet filter banks to image processing*, Preprint. 1995. 29 P.

[V] Vetterli M., *Filter banks allowing perfect reconstruction.*, Signal Process. V.10 (1986). P. 219 – 244.

[WPB] Wei D., Pai H.-T., Bovik A.C., *Antisymmetric biorthogonal coiflets for image coding*, Preprint, 1998..

[XRO] Xiong Z., Ramchandran K., Orchard M.T., *Space-frquency quantization for wavelet image coding*, IEEE Trans. on IP, 1997.

[Ж1] Zheludev, V.A., *Periodic splines and wavelets*, Mathematical analysis, Wavelets, and Signal Processing (Cairo, 1994), Contemporary Math. V.190 (1995). P. 339 – 354.

[Ж2] Желудев В.А., *Операционное исчисление, связанное с периодическими сплайнами*, ДАН. Т. 313 (1990). P. 1309 – 1315.

[Ж3] Желудев В.А., *О вейвлетах на базе периодических сплайнов*, Докл. РАН. Т. 335 (1994). # 1. С. 9 – 13.

[НС] Новиков И.Я., Стечкин С.Б., *Основы теории всплесков*, Успехи матем. наук V. 53 (1998) # 6, С. 53 – 128.

[П1] Петухов А.П., *Periodic wavelets: Construction and Algorthms*, Program on Spline Functions and the Theory of Wavelets. Abstracts. Centre de Recherches Matematiques. 1996.

[П2] Петухов А.П., *Периодические дискретные всплески*, Алгебра и анализ. Т. 8 (1996). # 3, С. 151 – 183.

[П3] Петухов А.П., *Кратномасштабный анализ и разложение по всплескам пространств периодических распределений*, Докл. РАН. Т. 356 (1997), # 2, 303 – 306..

[П4] Петухов А.П., *Периодические всплески*, Матем. сб. Т.188 (1997), #10, С. 69 – 95.

[П5] Петухов А.П., *О приближении периодических распределений в метрике Хаусдорфа*, Докл. РАН, Т. 336 (1994), # 1, С. 25 – 28.

[СВ] Стейн И., Вейс Г., *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М.: Мир, 1974 336 С.

[Т] Трибель, Х, *Теория функциональных пространств*, М.: Мир. 1986. 448 С.

[Э] Эдвардс Р., *Ряды Фурье в современном изложении*, М.: Мир, 1985.

# СОДЕРЖАНИЕ