КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ И ВСПЛЕСК-РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ[1]

А.П.Петухов

Даны определения кратномасштабного анализа (КМА) и всплеск-декомпозиции широкого круга квазибанаховых пространств периодических распределений. Исследованы элементарные свойства КМА.

Мы рассматриваем общий подход к определению Кратномасштабного анализа $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ широкого круга квазибанаховых пространств периодических распределений (обобщенных функций).

Обозначим через $\mathbb{D}$ пространство 2π-периодических распределений. Полное построение теории периодических распределений приводится, например, в [5]. Напомним некоторые основные свойства распределений. Распределения могут рассматриваться либо как ограниченные линейные функционалы, действующие на пространстве бесконечнодифференцируемых функций $\mathbb{C}^{\infty}$, либо как формальные тригонометрические ряды

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

с последовательностями коэффициентов Фурье $\hat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} c_n$, имеющими не более чем степенной рост. Свертка распределений f и g определяется по формуле $f * g\,(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)\exp(inx)$.

Через f_r мы обозначим свертку f с ядром Пуассона $\mathcal{P}_r$,

$$f_r(x) = f * \mathcal{P}_r\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}.$$

Пусть $X \subset \mathbb{D}$ — квазибанахово пространство. Через $M(X, \mathbb{L}^{\infty})$ мы обозначим пространство ограниченных операторов свертки (точнее, ядер таких операторов), действующих из X в $\mathbb{L}^{\infty}$.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 97 - 01 - 00443
Доклады РАН **356**(1997), N 2, 303 – 306

Определение 1. Через $\mathfrak{H}$ мы обозначим класс квазибанаховых пространств X с квазинормой $\| \bullet \mid X \|$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $\mathbb{C}^\infty \subset X \subset \mathbb{D}$;

b) $\| f \mid X \| = \sup\limits_{r<1} \| f_r \mid X \|$ для любого $f \in X$;

c) X инвариантно относительно замен переменных $x \mapsto \pm x + \tau$ и $x \mapsto 2x$, а также относительно замены $x \mapsto x/2$ для π-периодических функций;

d) X инвариантно относительно поточечного умножения на функции $\exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$;

e) $f \in X$ в том и только том случае, когда $\bar{f} \in X$.

Заметим, что большинство классических пространств распределений (таких, как пространства Лебега и Харди, пространства Бесова—Лизоркина—Трибеля, пространства Орлича, пространство конечных борелевских мер и многие другие) принадлежат $\mathfrak{H}$.

Нас интересуют лишь проблемы сходимости, а не ее скорости. Поэтому мы можем полагать, что нормы всех пространств $X \in \mathfrak{H}$ инвариантны относительно сдвигов аргумента и комплексного сопряжения. В противном случае, согласно свойствам c) и e) мы можем выполнить подходящую перенормировку.

В [9] мы ввели класс пространств распределений $\mathcal{H}$, который весьма близок к классу $\mathfrak{H}$. По крайней мере эти классы имеют много общих свойств.

Пусть $X \in \mathfrak{H}$, тогда через $\overset{\circ}{X}$ (или X°) обозначим пополнение пространства $\mathbb{C}^\infty$ по квазинорме пространства X;

$$\overset{\square}{X} \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathbb{D} \;\Big|\; \sup_{r<1} \| f_r \mid X \| < \infty \right\};$$

$$[X] \overset{\text{def}}{=} \left\{ Y \in \mathfrak{H} \;\Big|\; \overset{\circ}{X} \subset Y \subset \overset{\square}{X} \right\}.$$

Операция $[\bullet]$ разбивает $\mathfrak{H}$ на классы эквивалентности. Как обычно, через X^* обозначим пространство непрерывных линейных функционалов на X.

Далее $\langle f, g \rangle$ — значение линейного функционала $g \in X^*$ на распределении $f \in X$.

Хорошо известно, что в случае $X = \mathbb{C}^\infty$ мы можем полагать

$$\langle f, g \rangle \overset{\text{def}}{=} f(\bullet) * \bar{g}(-\bullet)(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\bar{\hat{g}}(n), \tag{1}$$

где ряд абсолютно сходится. Та же формула применима для произвольного пространства $X = \overset{\circ}{X}$. При этом ряд в (1) не сходится абсолютно, но суммируется методом Абеля — Пуассона.

Свойство 1. *Пусть $X \in \mathfrak{H}$, $Y \in [X]$. Тогда $M(Y, \mathbb{L}^\infty) = (\overset{\circ}{X})^* \in \mathfrak{H}$.*

Замечание. Можно также доказать, что для $X \in \mathfrak{H}$ множество компактных операторов свертки, действующих из X в $\mathbb{L}^\infty$, совпадает с $(\overset{\circ}{X})^{*\circ}$.

Свойство 2. *Пусть $X \in \mathfrak{H}$ — банахово пространство. Тогда*

$$M(M(X, \mathbb{L}^\infty), \mathbb{L}^\infty) = M(M(\overset{\square}{X}, \mathbb{L}^\infty), \mathbb{L}^\infty) = X^{\circ*\circ*} = \overset{\square}{X}.$$

Замечание. Для квазибанахова (но не банахова) пространства X Свойство 2 утрачивает силу. Это следует из того, что $X^{\circ*\circ*}$ — банахово.

Определение 2. Мы будем говорить, что $\{V^j\}_{j=0}^\infty$ — последовательность линейных подпространств пространства $\overset{\circ}{X} \in \mathfrak{H}$ — образует *Кратномасштабный анализ* (КМА) пространства $X \in \mathfrak{H}$, если она удовлетворяет условиям:

1) a) $V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^j \subset \ldots \subset X$;

b) $\dim V^j = 2^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup_{j \geq 0} V^j$ плотно в $\overset{\circ}{X}$;

3) a) V^0 состоит из постоянных;

b) если $f(x) \in V^j$, то $f(2x) \in V^{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

c) если $f(x) \in V^{j+1}$, то $f(x/2) + f(x/2 + \pi) \in V^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;

d) каждая функция пространства $f \in V^{j+1}$ представима в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x + 2\pi \cdot 2^{-j-1}) + f_3(2x)$, где $f_1, f_2, f_3 \in V^j$, $j = 1, 2, \ldots$

Замечание 1. Мы определили КМА не только для $\mathbb{L}^2$, но и для произвольного $X \in \mathfrak{H}$. Это определение отличается от других известных определений (см., напр., [8]) даже для $X = \mathbb{L}^2$. Мы изначально не требуем ни того, чтобы пространства V^j были линейной оболочкой сдвигов одной функции, ни даже инвариантности пространств V^j относительно сдвига аргумента на $2\pi 2^{-j}$. Тем не менее, определенные нами КМА обладают указанными свойствами. Главной же отличительной чертой нашего определения является тот факт, что оно гарантирует однозначность восстановления КМА по любому из пространств V^j $(j > 0)$. Этим свойством не обладают полиномиальные КМА, рассмотренные Ч.Чуи, Х.Маскаром [2] и И.Мейером [7]. Поэтому, с нашей точки зрения, они не являются КМА. Все другие, известные нам примеры периодических КМА, удовлетворяют Определению 2.

Естественно, Определение 2 может быть применено не только к пространствам из $\mathfrak{H}$, но и ко многим топологическим линейным пространствам, например к $\mathbb{C}^\infty$ или $\mathbb{D}$.

Пока не оговорено противное, мы полагаем $N = 2^n$, $L = 2^l$, $J = 2^j$ и так далее.

Пусть $\varphi^l \in X$, и нижний индекс l определяет принадлежность φ^l к V^l, тогда через $\vec{\varphi}^l$ мы обозначим вектор-функцию

$$\vec{\varphi}^l(x) = \left(\varphi^l(x), \varphi^l(x - 2\pi/L), \ldots, \varphi^l(x - 2\pi(L-1)/L)\right)^T.$$

Если ее компоненты линейно независимы, мы будем называть их *базисом сдвигов*. В дальнейшем эта договоренность распространяется только на функции, обозначаемые греческими буквами.

Теорема 1. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Тогда существует такой набор функций $\{\varphi^j\}_{j=0}^{\infty}$, что компоненты векторов $\vec{\varphi}^l$ образуют базисы пространств V^l. Кроме того, для любых j_1, j_2, $0 \le j_1 < j_2$, имеем*

$$\varphi^{j_1}(J_2 x/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1-1} \varphi^{j_2}(x + 2\pi k J_1/J_2).$$

Следствие. *Зафиксируем $j_0 > 0$. Если при условиях Теоремы 1 φ^j удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J_0-1} a_n \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J)$$

при $j = j_0$, то φ^j удовлетворяют этому уравнению при всех $j \le j_0$.

Последвательность коэффициентов масштабирующего уравнения называется *маской.*

Доказательство Теоремы 1 опирается на несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть последовательность пространств $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ образует КМА пространства X. Тогда для каждого $j \ge 0$ найдется базис $v_n^j(x)$, $n = 0, 1, \dots, J-1$, удовлетворяющий при $m \in \mathbb{Z}$ условиям:*
1) $v_0^j \equiv 1$, $j \ge 0$;
2) для любого $k \ne n$, $0 \le k, n < J$, $m \in \mathbb{Z}$, имеем $\hat{v}_n^j(k + Jm) = 0$;
3) справедливы рекуррентные соотношения
a) *$\hat{v}_n^{j+1}(n+2Jm) = \hat{v}_n^j(n+2Jm)$ при нечетных n (здесь и в дальнейшем мы полагаем $v_l^j \equiv v_{l+J}^j$);*
b) *$\hat{v}_n^{j+1}(n + 2Jm) = \hat{v}_{n/2}^j(n/2 + Jm)$ при четных n.*

Замечание. Очевидно, формулы пунктов 3a) и 3b) дают один и тот же результат для всех n кроме случая $n = J$.

Базисы v_n^j, существование которых следует из Леммы 1, в случае периодических сплайнов изучались многими авторами (см. [6], [10],[11]).

Сформулируем некоторые следствия Леммы 1.

Следствие 1. *Пространства $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ инвариантны относительно сдвига аргумента на $2\pi/J$.*

Следствие 2. *Любая из функций v_n^j, $j > 0$, $0 < n < J$ представима в виде*

$$v_n^j(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{n+Jm}^j \exp(i(n + Jm)x),$$

с ненулевыми коэффициентами.

Введем обозначение $\vec{v}^j$ для вектора $(v_0^j, \dots, v_{J-1}^j)^T$.

Лемма 2. *Компоненты вектора $\vec{\varphi}^j$ образуют базис пространства V^j в том и только том случае, когда функция φ^j является линейной комбинацией элементов вектора $\vec{v}^j$ с ненулевыми коэффициентами.*

Напомним, что согласно теореме Винера линейная оболочка сдвигов функции $f \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$ плотна в $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$. В нашем случае пространство V^j инвариантно относительно $2\pi/J$-сдвига, а элементы базиса $\vec{v}^j$ являются собственными функциями этого сдвига. Поэтому коэффициенты разложения функции по базису $\vec{v}^j$ можно рассматривать как ее спектр. Таким образом, Лемма 2 является аналогом теоремы Винера. Поэтому мы будем называть вектор-функцию $\vec{v}^j$ *базисом Винера* пространства V^j. Очевидно, что в каждом из пространств V^j существует единственный с точностью до перенормировки и перестановки элементов базис Винера. Мы будем пользоваться естественной нумерацией его элементов, когда номер определяется гармониками, входящими в спектр данной функции. Базисы Винера и базисы сдвигов связаны между собой (с точностью до умножения функций v_n^j на ненулевые множители) прямым ($F_J[\bullet]$) и обратным ($F_J^{-1}[\bullet]$) ДПФ порядка J:

$$\vec{v}^j(x) = F_J^{-1}[\vec{\varphi}^j(x)], \quad \vec{\varphi}^j(x) = F_J[\vec{v}^j(x)].$$

Согласно Лемме 1 каждый КМА пространства X порождается одной функцией v_1^1. Для описания всех возможных КМА пространства X достаточно найти все *допустимые* функции v_1^1.

Теорема 2. *Функция $v_1^1 \in \overset{\circ}{X} \in \mathfrak{H}$ порождает КМА пространства X тогда и только тогда, когда*

$$v_1^1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(i(2n+1)x),$$

где все a_n отличны от нуля.

Традиционный подход к всплеск-пространствам W^j состоит в их определении как ортогонального дополнения пространства V^j до V^{j+1}. Этот метод всплеск-представления функций $f \in \mathbb{L}^2$ основан на их аппроксимации ортогональными проекциями на пространства $V^j \subset \mathbb{L}^2$. Однако концепция "ортогональной проекции" теряет свое значение для произвольных пространств $X \in \mathfrak{H}$.

Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Компоненты вектор-функций $\{\vec{v}^j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют базисы Винера пространств V^j. Если $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ — КМА пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ с базисами Винера $\{\vec{p}^j\}_{j=0}^{\infty}$, и такой, что $\langle v_n^j, p_n^j \rangle \neq 0$, $n = 0, 1, \dots, J-1$, $j = 0, 1, 2, \dots$, тогда мы будем говорить, что КМА $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ определяет *всплеск-проекцию* на КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$. Проектирование $X \mapsto V^j$ определяется формулой

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{J-1} \frac{\langle f, p_n^j \rangle}{\langle v_n^j, p_n^j \rangle} v_n^j.$$

Всплеск-пространствами называются пространства

$$W^j = \{f \in V^{j+1} \mid \langle f, p_n^j \rangle = 0, n = 0, 1, \dots, J-1\}.$$

Легко видеть, что в пространствах W^j существует базис Винера, который может быть вычислен по формулам

$$\begin{aligned} w_n^j &= \langle v_{n+J}^{j+1}, p_n^j \rangle v_n^{j+1} - \langle v_n^{j+1}, p_n^j \rangle v_{n+J}^{j+1}, \quad n = 1, 2, \dots, J-1, \\ w_J^j &= v_J^{j+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, пространства W^j инвариантны относительно сдвига аргумента на $2\pi/J$. Кроме того, имеет весто представление

$$V^j = V^0 \oplus W^0 \oplus \dots \oplus W^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\oplus$ обозначает прямую сумму линейных пространств.

Очевидно, согласно Свойству 2 пространств из $\mathfrak{H}$ для банаховых пространств X имеет место двойственная ситуация. КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ устанавливает всплеск-проекцию пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ на пространства $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ и определяет всплеск-пространства $\{Q^j\}_{j=0}^{\infty}$. Это утверждение остается также в силе и для квазибанахова пространства X. В самом деле, если $\{V^j\}$ образует КМА квазибанахова пространства $X \subset Y \overset{\text{def}}{=} X^{\circ * \circ *}$, то все нечетные гармоники функции v_1^1 отличны от нуля. Значит, согласно Теореме 2 $\{V^j\}$ образуют КМА банахова пространства Y. Однако КМА квазибанахова пространства X не определяют все возможные всплеск-проекции на КМА $\{P^j\}$ пространства $(\overset{\circ}{X})^*$.

Теорема 3. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$, КМА $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ определяет всплеск-проекцию, $\{W^j\}_{j=0}^{\infty}$ — соответствующие всплеск-пространства. Тогда найдется такой набор функций $\{\psi^j\}_{j=0}^{\infty}$, что компоненты векторов $\vec{\psi}^l$ образуют базисы пространств W^l. Кроме того, для любых j_1, j_2, $0 \le j_1 < j_2$ имеем*

$$\psi^{j_1}(J_2 x/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1 - 1} \psi^{j_2}(x + 2\pi k J_1/J_2).$$

Следствие. *Зафиксируем $j_0 > 0$. Если при условиях Теоремы 3 ψ^j удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\psi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J_0 - 1} b_n \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J),$$

при $j = j_0$, то ψ^j удовлетворяют ему для всех $j \le j_0$.

Укажем один из способов нахождения функций ψ^j. Пусть $\vec{\xi}^n$ — базис сдвигов пространства P^n двойственного КМА. Введем обозначения

$$\gamma_m = \langle \varphi^{n+1}(\bullet - 2\pi m/2N), \xi^n(\bullet) \rangle, \quad m = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Теорема 4. *Пусть*

$$\psi^n(\bullet + 2\pi/2N) = \sum_{m=0}^{2N-1} (-1)^n \gamma_m \varphi^{n+1}(\bullet + 2\pi m/2N). \tag{2}$$

Тогда система функций $\{\psi^n(\bullet - 2\pi m/N)\}_{m=0}^{N-1}$ *образует базис пространства* W^n.

Соотношение (2) напоминает хорошо известную формулу представления функции ψ^n через компоненты вектора $\vec{\varphi}^{n+1}$ с ортогональными компонентами (см., [3],[4]). Фактически (2) уточняет смысл коэффициентов. В некотором смысле формулу (2) можно считать известной. Во всяком случае, ее аналог для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ может быть легко получен из формулы (5.4) работы [1].

Принципиальным вопросом, связанным со всплеск-проекциями, является вопрос о возможности аппроксимации произвольной функции с наперед заданной точностью. Мы даем на него ответ в простейшем случае $X = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$, где

$$\| f \mid \ell^p \| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^p \right)^{1/p} .$$

Как обычно, полагаем $q = p/(p-1)$ при $p > 1$; $q = \infty$ при $p = 1$.

Теорема 5. *Пусть* $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ *устанавливает всплеск-проекцию на КМА* $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ *пространства* ℓ^p, $1 \le p < \infty$. *Любое распределение из* ℓ^p *может быть приближено с произвольной точностью своими проекциями на* V^j *тогда и только тогода, когда множество чисел* $\left\{\{\Delta_{nj}\}_{n=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\{\| p_n^j \mid \ell^q \| \cdot \| v_n^j \mid \ell^p \| / \langle v_n^j, p_n^j \rangle\}_{n=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{\infty}$ *ограничено.*

Замечание. Поскольку $(\ell^\infty)^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_0 \ne (\ell^\infty)^\circ$, то Теорема 5 остается в силе лишь для $\mathbf{c}_0$, а не для ℓ^∞.

Список литературы

1. de Boor C., DeVore R.A., Ron A., // Constr. Approx. 1993 V. 9. P. 123 – 166.
2. Chui C.K., Mhaskar H.N., // Constr. Approx. 1993. V. 9. P. 167 – 190.
3. Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
4. Daubechies I., // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V.41. P. 909 – 996.
5. Эдвардс Р., *Ряды Фурье в современном изложении*, М.: Мир, 1985.
6. Kamada M., Toraici K., Mori Riochi, // J. Approx. Th. 1988. V. 55. P. 27 – 34.
7. Meyer Y., *Wavelets and operators*, Cambrige University Press, 1992.
8. Perrier V. and Basdevant C., // La Recherche Aerospatiale 1989. # 3. P. 53 – 67.
9. Петухов А.П., //Докл. РАН 1994. V. 327. P. 187–190.
10. Zheludev V.A., Proc. of the Conference "Math. Analysis and Signal processing", Cairo, Jan. 2–9. 1994.
11. Желудев В.А., //ДАН. 1990. V. 313. P. 1309 – 1315.

С.-Петербургское отделение Математического института им.В.А.Стеклова РАН
E-mail address: petukhov@pdmi.ras.ru