ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ[1]

А.П.Петухов

Даны определения кратномасштабного анализа (КМА) и всплеск-декомпозиции широкого круга квазибанаховых пространств периодических распределений. Исследованы элементарные свойства КМА. Представлены экономичные алгоритмы разложения функций по всплескам и их восстановления.

§0. Введение

Мы рассмотрим общий подход к определению Кратномасштабного анализа (КМА) $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ широкого круга квазибанаховых пространств периодических распределений (обобщенных функций). Несмотря на то, что большинство известных КМА пространства $\mathbb{L}^2$ удовлетворяют нашему определению, оно не совпадает с известными (см., напр., [10], [15], [17], [18]) даже для случая $\mathbb{L}^2$. Наши требования к КМА несколько более жесткие. Результатом является возможность однозначного восстановления КМА по любому из пространств V^j. Таким свойством обладают периодизации практически всех "классических" КМА пространства $\mathbb{L}^2$ (см., напр, [4], [9]). Нам известно только два примера КМА (И.Мейер [9, с.22] и Ч.Чуи, Х.Маскар [2]), не обладающих этим свойством, а значит, не попадающих под наше определение.

В §1 мы вводим специальный класс квазибанаховых пространств $\mathfrak{H}$. Именно для этих пространств мы вводим понятие КМА. Заметим, что большинство классических пространств распределений (таких как пространства Лебега и Харди, пространства Бесова—Лизоркина—Трибеля, пространства Орлича, пространство конечных борелевских мер и многие другие) принадлежат $\mathfrak{H}$.

Поскольку каждое из пространств $\{V^j\}$ инвариантно относительно сдвига аргумента на $2\pi/2^j$, то ясно, что базисы, состоящие из собственных функций оператора соответствующего сдвига, имеют первостепенное значение при изучении этих пространств. Мы найдем описание пространств V^j через разложение их элементов по данным базисам. В частности, будет дано полное описание всех возможных КМА любого из пространств $X \in \mathfrak{H}$.

В §2 мы даем определение всплеск-пространств произвольного КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Всплеск-разложение пространства X порождается двойственным КМА пространства ограниченных операторов свертки, действующих из X в $\mathbb{L}^{\infty}$.

В §3 рассмотрены два численных алгоритма разложения функций по всплескам и их восстановления. Первый из них основан на переходе в частотную область. Сложность этого алгоритма для функции $f \in V^j$ имеет порядок $O(j2^j)$. Второй алгоритм применим только для случая, который для непериодических КМА соответствует наличию (вообще говоря, неортогональных) базисов сдвигов с компактным носителем. Сложность такого алгоритма равна $O(\sigma 2^j)$, где σ — размер носителя.

В §4 мы покажем, что в каждом КМА найдется много базисов сдвигов, имеющих масштабирующие уравнения с конечной маской. Для таких базисов мы строим алгоритмы, которые могут быть реализованы как свертки с конечным окном размера, не превышающего количества элементов маски.

§1. Кратномасштабный анализ пространств периодических функций и распределений.

Обозначим через $\mathbb{D}$ пространство 2π-периодических распределений. Напомним некоторые основные свойства распределений. Полное построение теории периодических распределений приводится,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ грант N 97-01-00443
Математический сборник **188**(1997), N 10, 69 – 94.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

например, в [7]. Распределения могут рассматриваться либо как ограниченные линейные функционалы, действующие на пространстве бесконечнодифференцируемых функций $\mathbb{C}^\infty$, либо как формальные тригонометрические ряды

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

с последовательностями коэффициентов Фурье $\hat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} c_n$, имеющими не более чем степенной рост. Свертка распределений f и g определяется по формуле $f * g\,(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)\exp(inx)$.

Через f_r мы обозначим свертку f с ядром Пуассона $\mathcal{P}_r$,

$$f_r(x) = f * \mathcal{P}_r\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}.$$

Пусть $X \subset \mathbb{D}$ — квазибанахово пространство. Через $M(X, \mathbb{L}^\infty)$ мы обозначим пространство ограниченных операторов свертки (точнее, ядер таких операторов), действующих из X в $\mathbb{L}^\infty$.

Определение 1. Через $\mathfrak{H}$ мы обозначим класс квазибанаховых пространств X с квазинормой $\| \bullet \mid X \|$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $\mathbb{C}^\infty \subset X \subset \mathbb{D}$;

b) $\| f \mid X \| = \sup\limits_{r<1} \| f_r \mid X \|$ для любого $f \in X$;

c) X инвариантно относительно замен переменных $x \mapsto \pm x + \tau$ и $x \mapsto 2x$, а также относительно замены $x \mapsto x/2$ для π-периодических функций;

d) X инвариантно относительно поточечного умножения на функции $\exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$;

e) $f \in X$ в том и только том случае, когда $\bar{f} \in X$.

Далее мы будем изучать лишь проблемы сходимости, а не ее скорости. Поэтому мы можем полагать, что нормы всех пространств $X \in \mathfrak{H}$ инвариантны относительно сдвигов аргумента и комплексного сопряжения. В противном случае, согласно свойствам c) и e) мы можем выполнить подходящую перенормировку.

В [11] и [12] мы ввели класс пространств распределений $\mathcal{H}$, который весьма близок к классу $\mathfrak{H}$. По крайней мере эти классы имеют много общих свойств. Сформулируем некоторые из свойств пространств из $\mathfrak{H}$.

Пусть $X \in \mathfrak{H}$, тогда через $\overset{\circ}{X}$ (или X°) обозначим пополнение пространства $\mathbb{C}^\infty$ по квазинорме пространства X;

$$\overset{\square}{X} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathbb{D} \;\Big|\; \sup_{r<1} \| f_r \mid X \| < \infty \right\};$$

$$[X] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ Y \in \mathfrak{H} \;\Big|\; \overset{\circ}{X} \subset Y \subset \overset{\square}{X} \right\}.$$

Нетрудно показать, что операция $[\bullet]$ разбивает $\mathfrak{H}$ на классы эквивалентности. Как обычно, через X^* обозначим пространство непрерывных линейных функционалов на X.

В дальнейшем через $\langle f, g \rangle$ мы будем обозначать значение линейного функционала $g \in X^*$ на распределении $f \in X$.

Хорошо известно, что в случае $X = \mathbb{C}^\infty$ мы можем полагать

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f(\bullet) * \bar{g}(-\bullet)(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\bar{\hat{g}}(n), \tag{1.1}$$

где ряд абсолютно сходится. Мы покажем, что та же формула применима для произвольного пространства $X = \overset{\circ}{X}$. При этом ряд в (1.1) не сходится абсолютно, но мы можем просуммировать его методом Абеля — Пуассона.

Сначала мы покажем, что $\| f - f_r \mid X \| \to 0$ при $r \to 1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такая функция $h \in \mathbb{C}^\infty$, что $\| f - h \mid X \| < \varepsilon/3$. Поскольку $h_r \to h$ при $r \to 1$ в топологии пространства $\mathbb{C}^\infty$, то для r, достаточно близкого к 1, имеем $\| h_r - h \mid X \| < \varepsilon/3$. Значит,

$$\| f - f_r \mid X \| \le C(\| f - h \mid X \| + \| h - h_r \mid X \| + \| h_r - f_r \mid X \|)$$
$$\le C\left(\varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \sup_{r<1} \| (h - f) * \mathcal{P}_r \mid X \|\right) = C\varepsilon,$$

где, вообще говоря, $C \neq 1$, поскольку X не банахово, а только квазибанахово пространство.

Таким образом, $\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1}\langle f_r, g\rangle$, что и требовалось.

Очевидно, аналогичным образом можно доказать, что $\| f(\bullet) - f(\bullet + \tau) \mid X \| \to 0$ при $\tau \to 0$. для любого $f \in \overset{\circ}{X}$. В частности, отсюда следует, что для $g \in X^{\circ *}$ функция $f * g$ непрерывна.

Свойство 1. *Пусть* $X \in \mathfrak{H}$, $Y \in [X]$. *Тогда* $M(Y, \mathbb{L}^\infty) = (\overset{\circ}{X})^* \in \mathfrak{H}$.

Замечание. Легко доказать, что если $X \in \mathfrak{H}$, то множество компактных операторов свертки, действующих из X в $\mathbb{L}^\infty$, совпадает с $(\overset{\circ}{X})^{*\circ}$.

Доказательство Свойства 1. Пусть $f \in X$, $T_\tau[f](\bullet) = \overline{f(\tau - \bullet)}$, $g \in (\overset{\circ}{X})^*$, тогда

$$\|f * g\|_\infty = \sup_{r<1} \|f * g * \mathcal{P}_r\|_\infty = \sup_{r<1}\sup_x |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_r(n)\hat{g}(n)e^{inx}|$$
$$= \sup_{r<1}\sup_x |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\hat{f}}_r(n)\bar{\hat{g}}(n)e^{-inx}| = \sup_{r<1}\sup_x |\langle T_x[f_r], g\rangle|$$
$$\le \sup_{r<1} \| f_r \mid X \| \cdot \| g \mid (\overset{\circ}{X})^* \| \le \| f \mid X \| \cdot \| g \mid (\overset{\circ}{X})^* \|.$$

Обратно, пусть $g \in M(X, \mathbb{L}^\infty)$, $h \in \mathbb{C}^\infty$. Тогда имеем

$$|\langle h, g\rangle| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n)\bar{\hat{g}}(n)\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\hat{h}}(n)\hat{g}(n)\right| = |\bar{h}(-\bullet) * g(\bullet)(0)|$$
$$\le \|\bar{h}(-\bullet) * g(\bullet)\|_\infty \le \| h \mid X \| \cdot \| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty \|.$$

Значит, ввиду плотности $\mathbb{C}^\infty$ в $\overset{\circ}{X}$ получим

$$\| g \mid \overset{\circ}{X} \| \le \| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \|.$$

Теперь покажем, что $M(X, \mathbb{L}^\infty) \in \mathfrak{H}$. Вложения $\mathbb{C}^\infty \subset M(X, \mathbb{L}^\infty) \subset \mathbb{D}$ очевидны. Докажем выполнение свойства b) пространств $\mathfrak{H}$.

С одной стороны,

$$\| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| = \sup\left\{\|f * g\|_\infty \;\middle|\; f \in \overset{\circ}{X}, \| f \mid X \| \le 1\right\}$$
$$\ge \sup_{r<1}\sup\left\{\|f_r * g\|_\infty \;\middle|\; f \in \overset{\circ}{X}, \| f \mid X \| \le 1\right\}$$
$$= \sup_{r<1}\sup\left\{\|f * g_r\|_\infty \;\middle|\; f \in \overset{\circ}{X}, \| f \mid X \| \le 1\right\} = \sup_{r<1} \| g_r \mid M(X, \mathbb{L}^\infty \|. \quad (1.2)$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая $f \in \overset{\circ}{X}$, что $\| f \mid X \| = 1$ и

$$\|f * g\|_\infty \ge \| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| - \varepsilon.$$

Для r, достаточно близких к 1, имеем

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f_r * g\|_\infty + \|(f - f_r) * g\|_\infty \leq \|f * g_r\|_\infty + \varepsilon \leq \| g_r \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| + \varepsilon.$$

Объединяя оба неравенства, получим

$$\| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| \leq \sup_{r<1} \| g_r \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| + 2\varepsilon.$$

Отсюда и из (1.2) следует справедливость b).

Покажем выполнение условия c). Пусть $g \in M(X, \mathbb{L}^\infty)$, тогда

$$\| g(\tau - \bullet) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| = \sup \left\{ \|f(\tau - \bullet) * g(\bullet)\|_\infty \;\middle|\; f \in \overset{\circ}{X}, \|f \mid X \| = 1 \right\}$$
$$\leq \| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| \cdot \| f(\tau - \bullet) \mid X \| = \| g \mid X \|.$$

Инвариантность пространства $M(X, \mathbb{L}^\infty)$ относительно замены переменной $x \mapsto x + \tau$ доказывается аналогичным образом.

Инвариантность относительно замены переменной $x \mapsto 2x$ доказывают следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\| g(2\bullet) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| &= \sup \left\{ \|f(\bullet) * g(2\bullet)\|_\infty \;\middle|\; \| f \mid X \| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2n) \hat{g}(n) \right| \;\middle|\; \| f \mid X \| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|\big(f(\bullet/2) + f(\bullet/2 + \pi)\big) * g(\bullet)\|_\infty / 2 \;\middle|\; \| f \mid X \| \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \| \big(f(\bullet/2) + f(\bullet/2 + \pi)\big) \mid X \| \cdot \| g(\bullet) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| \;\middle|\; \| f \mid X \| \leq 1 \right\} \\
&\leq C_1 C_2 \| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \|,
\end{aligned}$$

где C_1 — норма оператора замены переменной $x \mapsto x/2$ в пространстве X, C_2 — константа из неравенства треугольника для квазибанахова пространства X (в частности, $C_2 = 1$, если X банахово).

Оценим величину $\| g(\bullet/2) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \|$, если $g \in M(X, \mathbb{L}^\infty)$ π-периодическая функция:

$$\begin{aligned}
\| g(\bullet/2) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| &= \sup \left\{ \|f(\bullet) * g(\bullet/2)\|_\infty \;\middle|\; \| f \mid X \| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|f(2\bullet) * g(\bullet)\|_\infty \;\middle|\; \| f \mid X \| \leq 1 \right\} = C_3 \| g(\bullet) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \|,
\end{aligned}$$

где C_3 — норма замены переменной $x \mapsto 2x$ в пространстве X. Таким образом, свойство c) выполнено.

Пусть B_n, $n \in \mathbb{Z}$ — нормы операторов умножения функции из X на $\exp(inx)$, $g \in M(X, \mathbb{L}^\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|f(\bullet) * \big(e^{in\bullet} g(\bullet)\big)\|_\infty &= \|\big(e^{-in\bullet} f(\bullet)\big) * g(\bullet)\|_\infty \\
&\leq \| e^{-in\bullet} f(\bullet) \mid X \| \cdot \| g(\bullet) \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \| \leq B_{-n} \| f \mid X \| \cdot \| g \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \|.
\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость для $(\overset{\circ}{X})^*$ свойства d). Выполнение e) очевидно.

Свойство 2. *Пусть $X \in \mathfrak{H}$ — банахово пространство. Тогда*

$$M(M(X, \mathbb{L}^\infty), \mathbb{L}^\infty) = M(M(\overset{\square}{X}, \mathbb{L}^\infty), \mathbb{L}^\infty) = X^{\circ * \circ *} = \overset{\square}{X}.$$

Замечание. Для квазибанахова, но не банахова пространства X Свойство 2 утрачивает силу. Это следует из того, что $X^{\circ * \circ *}$ — банахово.

Доказательство Свойства 2. Нам, очевидно, нужно доказать лишь равенство $X^{\circ * \circ *} = \overset{\square}{X}$. Пусть $Y = X^{\circ *}$, $Z = Y^{\circ *}$, $h \in \mathbb{D}$. Принимая во внимание, что для любого банахова пространства B и для $b \in B$

$$\| b \mid B \| = \sup \big\{ \langle b, c \rangle \;\big|\; \| c \mid B^* \| \leq 1 \big\},$$

из Свойства 1 получим

$$\| h \mid Z \| = \sup_{r<1} \| h_r \mid Z \| = \sup_{r<1} \sup \left\{ \langle g, h_r \rangle \;\middle|\; g \in \overset{\circ}{Y}, \| g \mid Y \| \le 1 \right\}$$
$$= \sup_{r<1} \sup \left\{ \langle g_r, h \rangle \middle| g \in \overset{\circ}{Y}, \| g \mid Y \| \le 1 \right\} =$$
$$\sup_{r<1} \sup \left\{ \langle g, h_r \rangle \mid g \in Y, \| g \mid Y \| \le 1 \right\} = \sup_{r<1} \| h_r \mid X \| = \| h \mid X \|.$$

Что завершает доказательство свойства 2.

Определение 2. Мы будем говорить, что $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — последовательность линейных подпространств пространства $\overset{\circ}{X} \in \mathfrak{H}$ образует *Кратномасштабный анализ* (КМА) пространства $X \in \mathfrak{H}$, если она удовлетворяет условиям:
1) a) $V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^j \subset \ldots \subset X$;
b) $\dim V^j = 2^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;
2) $\bigcup_{j \ge 0} V^j$ плотно в $\overset{\circ}{X}$;
3) a) V^0 состоит из постоянных;
b) если $f(x) \in V^j$, то $f(2x) \in V^{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$;
c) если $f(x) \in V^{j+1}$, то $f(x/2) + f(x/2 + \pi) \in V^j$ $j = 0, 1, 2, \ldots$;
d) каждая функция пространства $f \in V^{j+1}$ представима в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x + 2\pi \cdot 2^{-j-1}) + f_3(2x)$, где $f_1, f_2, f_3 \in V^j$, $j = 1, 2, \ldots$

Замечание 1. Мы определили КМА не только для $\mathbb{L}^2$, но и для произвольного $X \in \mathfrak{H}$. Как уже отмечалось во Введении, это определение отличается от других известных определений даже для $X = \mathbb{L}^2$. Во-первых, мы не требуем чтобы пространства V^j были линейной оболочкой сдвигов одной функции. Во-вторых, мы не требуем инвариантности пространств V^j относительно сдвига аргумента на $2\pi 2^{-j}$. Тем не менее, будет показано, что определенные нами КМА обладают указанными свойствами. Главной же отличительной чертой нашего определения является тот факт, что оно гарантирует однозначность восстановления КМА по любому из пространств V^j $(j > 0)$. В определениях КМА, данных в [10], [15] отсутствует свойство 3d), а в [17] и [18] не требуется выполнения ни одного из условий 3). Во всех этих случаях однозначность восстановления гарантировать нельзя. При этом в первых трех работах изучаются свойства КМА пространства $\mathbb{L}^2$, и только в [18] — КМА пространств $\mathbb{L}^p$ и $\mathbb{C}$.

Замечание 2. Легко можно показать, что свойство 3b) следует из остальных. Поэтому оно может быть удалено из Определения 2.

Пока не оговорено противное, мы полагаем $N = 2^n$, $L = 2^l$, $J = 2^j$ и так далее.

Пусть $\varphi^l \in X$, и верхний индекс l определяет принадлежность φ^l к V^l, тогда через $\vec{\varphi}^l$ мы обозначим вектор-функцию

$$\vec{\varphi}^l(x) = \left(\varphi^l(x), \varphi^l(x - 2\pi/L), \ldots, \varphi^l(x - 2\pi(L-1)/L)\right)^T.$$

В случае линейной независимости компонент мы будем называть такие векторы *базисами сдвигов.* В дальнейшем эта договоренность распространяется только на функции, обозначаемые греческими буквами.

Теорема 1. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Тогда существует такой набор функций $\{\varphi^j\}_{j=0}^{\infty}$, что компоненты векторов $\vec{\varphi}^l$ образуют базисы пространств V^l. Кроме того, для любых j_1, j_2, $0 \le j_1 < j_2$, имеем*

$$\varphi^{j_1}(J_2 x/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1 - 1} \varphi^{j_2}(x + 2\pi k J_1/J_2).$$

Следствие. *Зафиксируем некоторое* $j_0 > 0$. *Если при условиях Теоремы 1* φ^j *удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J_0-1} a_n \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J) \tag{1.3}$$

для $j = j_0$, *то* φ^j *удовлетворяют этому уравнению при всех* $j \le j_0$. *Кроме того, учитывая* 2π-*периодичность функции* φ^j, *масштабирующее уравнение может быть записано в виде*

$$\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J-1} \left(\sum_{k=0}^{J_0/J-1} a_{n+2kJ} \right) \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J).$$

Последовательность коэффициентов масштабирующего уравнения называется *маской.*

Прежде чем доказывать Теорему 1 мы введем обозначения и сформулируем и докажем несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть последовательность пространств* $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ *образует КМА пространства* X. *Тогда для каждого* $j \ge 0$ *найдется базис* $v_n^j(x)$, $n = 0, 1, \dots, J-1$, *удовлетворяющий при* $m \in \mathbb{Z}$ *условиям:*
1) $v_0^j \equiv 1$, $j \ge 0$;
2) для любого $k \ne n$, $0 \le k, n < J$, $m \in \mathbb{Z}$, *имеем* $\hat{v}_n^j(k + Jm) = 0$;
3) справедливы рекуррентные соотношения
  a) $\hat{v}_n^{j+1}(n + 2Jm) = \hat{v}_n^j(n + 2Jm)$ *при нечетных* n *(здесь и в дальнейшем мы полагаем* $v_l^j \equiv v_{l+J}^j$*);*
  b) $\hat{v}_n^{j+1}(n + 2Jm) = \hat{v}_{n/2}^j(n/2 + Jm)$ *при четных* n.

Замечание 1. Очевидно, пункты 1) — 3) Леммы1 дают простой инструмент для однозначного восстановления всего КМА по известному базису $\{v_n^{j_0}\}_{n=0}^{J_0-1}$ лишь при одном фиксированном $j_0 > 0$. В частности, для восстановления КМА достаточно знать лишь функцию v_1^1.

Замечание 2. Очевидно, формулы пунктов 3a) и 3b) дают один и тот же результат для всех n кроме случая $n = J$.

Базисы v_n^j, существование которых следует из Леммы 1, в случае периодических сплайнов изучались многими авторами (см. [8], [13], [14], [16]). В [14] В.А. Желудев использовал эти базисы для построения операционного исчисления на пространстве периодических сплайнов и эффективных алгоритмов сплайн аппроксимации. Функции этих базисов были названы В.А.Желудевым *ортсплайнами.* В [13] ортсплайны использовались им также для построения теории сплайн-всплесков и численных алгоритмов разложений функций по всплескам и их восстановления.

Сформулируем некоторые следствия Леммы 1.

Следствие 1. *Пространства* $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ *инвариантны относительно сдвига аргумента на* $2\pi/J$.

Следствие 2. *Любая из функций* v_n^j, $j > 0$, $0 < n < J$ *представима в виде*

$$v_n^j(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{n+Jm}^j \exp(i(n + Jm)x), \tag{1.4}$$

с ненулевыми коэффициентами.

Утверждение Следствия 1 вытекает из того, что базисные функции v_n^j являются собственными функциями оператора $2\pi/J$-сдвига аргумента.

Справедливость (1.4) следует из п. 2) Леммы 1. Что касается отличия от нуля всех коэффициентов в (1.4), то это следует из пункта 3) Леммы 1. В самом деле, если мы допустим, что $c_{n_0+Nm_0}^j = 0$, то из 3) получим, что гармоника с номером $n_0 + Jm_0$ отсутствует в пространствах V^k при $k \ge j$. Это противоречит пункту 2) Определения 2.

Доказательство Леммы 1. Возьмем $v_0^j \equiv 1$, $j \ge 0$. Доказательство проведем по индукции.

Сначала мы покажем существование базиса $\{v_n^j\}$ при $j = 1$. В качестве v_1^1 мы можем взять произвольную функцию так, чтобы v_0^1 и v_1^1 образовывали базис пространства V^1. Очевидно, мы можем положить $\hat{v}_1^1(0) = 0$. Поскольку оператор $A : f(x) \mapsto f(x/2) + f(x/2+\pi)$ уничтожает нечетные гармоники и удваивает четные (деля их частоту пополам), функция v_1^1 не имеет четных гармоник — в противном случае $A(v_1^1) \notin V^0$, что противоречит свойству 3c) КМА.

Допустим, что существование базиса $\left\{\{v_n^k\}_{n=0}^{K-1}\right\}_{k=0}^{j}$ доказано. Покажем, что набор функций $\{v_n^{j+1}\}_{n=0}^{2J-1}$, определенных по формулам пунктов 3a) и 3b) Леммы 1, является искомым базисом.

Оценим размерность Y — линейного пространства функций, представимых в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x+2\pi/2J) + f_3(2x)$, где $f_1, f_2, f_3 \in V^j$. Очевидно, для любого $n = 1, 2, \ldots, J-1$ линейные оболочки пар функций $\{v_n^j(x), v_n^j(x+2\pi/2J)\}$ и $\{v_n^{j+1}(x), v_{n+J}^{j+1}(x)\}$ совпадают. С другой стороны, $v_n^j(2x) = v_{2n}^{j+1}(x)$. Значит, величина $\dim Y$ не превышает количества элементов множества $\{v_n^{j+1}\}$, т.е. $2J$. В то же время, согласно пунктам 1b) и 3d) Определения 2 имеем $\dim V^{j+1} = 2J$, $V^{j+1} \subset Y$. Таким образом, $Y = V^{j+1}$, и функции $\{v_n^{j+1}\}$ образуют базис V^{j+1}.

Введем обозначение $\vec{v}^j$ для вектора $(v_0^j, \ldots, v_{J-1}^j)^T$.

Лемма 2. *Компоненты вектора $\vec{\varphi}^j$ образуют базис пространства V^j в том и только том случае, когда функция φ^j является линейной комбинацией элементов вектора $\vec{v}^j$ с ненулевыми коэффициентами.*

Напомним, что согласно теореме Винера линейная оболочка сдвигов функции $f \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$ плотна в $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$. В нашем случае пространство V^j инвариантно относительно $2\pi/J$-сдвига, а элементы базиса $\vec{v}^j$ являются собственными функциями этого сдвига. Поэтому коэффициенты разложения функции по базису $\vec{v}^j$ можно рассматривать как ее спектр. Таким образом, Лемма 2 является аналогом теоремы Винера. Поэтому мы будем называть вектор-функцию $\vec{v}^j$ *базисом Винера* пространства V^j. Очевидно, что в каждом из пространств V^j существует единственный с точностью до перенормировки и перестановки элементов базис Винера. Мы будем пользоваться естественной нумерацией его элементов, когда номер определяется гармониками, входящими в спектр данной функции.

Доказательство Леммы 2. Для фиксированного J мы полагаем $\omega_J = \exp(2\pi i/J)$, и F_J — матрица Дискретного Преобразования Фурье (ДПФ) (ее элементы определяются по формуле $F_{lk} = \omega_J^{-lk}, l = 0, 1, \ldots, J-1; k = 0, 1, \ldots, J-1$). Матрица Обратного Дискретного Преобразования Фурье (ОДПФ) может быть записана в виде F_J^*/J. Здесь и в дальнейшем * означает операцию эрмитова сопряжения матрицы или вектора.

Пусть у нас есть представление $\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{J-1} a_n v_n^j(x)$. Введем вектор-функции

$$\vec{u}^j \stackrel{\text{def}}{=} (a_0 v_0^j, a_1 v_1^j, \ldots, a_{J-1} v_{J-1}^j)^T,$$

$$\vec{\Omega}_n^j \stackrel{\text{def}}{=} (\exp(inx), \exp(in(x-2\pi/J)), \ldots, \exp(in(x-2\pi(J-1)/J)))^T,$$

где $n = k + Jm$, $0 \le k < J$, $m \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$F_J^* \vec{\Omega}_n^j / J = \exp(inx) F_J^* (1, \omega_J^{-k}, \ldots, \omega_J^{-k(J-1)})^T / J = \exp(inx) \vec{e}_k,$$

где $\vec{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ с единицей на k-м месте. Таким образом, получим

$$F_J^* \vec{\varphi}^j / J = \vec{u}^j. \tag{1.5}$$

Компоненты правой части (1.5) образуют базис пространства V^j тогда и только тогда, когда все a_n отличны от нуля. Поскольку операторы ДПФ (и ОДПФ) невырождены, то же свойство необходимо и достаточно для базисности компонент вектора $\vec{\varphi}^j$. Лемма 2 доказана. Более того, мы показали, что базисы Винера и базисы сдвигов связаны между собой (с точностью до умножения функций v_n^j на ненулевые множители) прямым и обратным ДПФ.

Доказательство Теоремы 1. Принимая во внимания, что $f(x/2) + f(x/2+\pi) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(2n) \exp inx$, согласно Лемме 2 любой набор функций, удовлетворяющих Теореме 1, может быть представлен в виде

$$\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{J-1} c_n^j v_n^j(x),$$

где v_n^j удовлетворяют рекуррентным соотношениям Леммы 1, построение может быть произведено следующим образом.

Возьмем произвольное $c_0^0 \neq 0$ и определим $\varphi^0 \equiv c_0^0$. Если мы выбрали числа c_n^j, то полагаем $c_n^{j+1} = c_{n/2}^j/2$ для четных n и берем произвольные ненулевые c_n^{j+1} для n нечетных.

Согласно Лемме 1 каждый КМА пространства X порождается одной функцией v_1^1. Для описания всех возможных КМА пространства X достаточно найти все *допустимые* функции v_1^1.

Теорема 2. *Функция $v_1^1 \in \overset{\circ}{X} \in \mathfrak{H}$ порождает КМА пространства X тогда и только тогда, когда*

$$v_1^1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(i(2n+1)x),$$

где все a_n отличны от нуля.

Доказательство Теоремы 2. Необходимость вытекает из Следствия 2 к Лемме 1. Покажем достаточность. Сначала докажем, что $v_n^j \in \overset{\circ}{X}$, $0 \le n < J$, $j > 0$. В самом деле, ограниченность оператора из пункта 3b) Леммы 1 следует из пункта 3c) Определения 1.

Значит, если $\| f_m(x) - v_n^j(x) \mid X \| \to 0$ при $m \to \infty$ ($f_m \in \mathbb{C}^\infty$), то $\| f_m(2x) - v_{2n}^{j+1}(x) \mid X \| \to 0$, т.е. $v_{2n}^{j+1} \in \overset{\circ}{X}$.

Оператор из пункта 3a) ограничен, поскольку для нечетных n функция v_n^{j+1} может быть представлена как линейная комбинация функции v_n^j и ее сдвига на $2\pi/2J$. Очевидно, $v_n^{j+1} \in \overset{\circ}{X}$.

Покажем выполнение свойства 2) КМА. Выполнение остальных свойств очевидно.

Поскольку пространство $\mathbb{C}^\infty$ плотно в $\overset{\circ}{X}$, а тригонометрические полиномы плотны в $\mathbb{C}^\infty$, то достаточно доказать, что функции вида $\exp(inx)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ могут быть приближены из пространств V^j с произвольной точностью.

Возьмем последовательность $h_j = 1 - \exp(-inx) v_n^j / \hat{v}_n^j(n)$, $j = j_0, j_0+1, \dots$ и покажем, что она сходится к нулю по норме пространства $\| \bullet \mid X \|$. Обозначим через $\omega(\delta, f, X)$ модуль непрерывности функции $f \in X$:

$$\omega(\delta, f, X) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{h<\delta} \| f(\bullet + h) - f(\bullet) \mid X \|.$$

Ввиду Свойства 1 пространств класса $\mathfrak{H}$ имеем $\| \bullet \mid X^{\circ *} \| = \| \bullet \mid M(X, \mathbb{L}^\infty) \|$ (по крайней мере, после эквивалентной перенормировки). Это означает, что для любой $f \in X$ $(= \overset{\circ}{X})$

$$\| f \mid X \| = \sup \left\{ \| f * g \mid \mathbb{L}^\infty \| \;\middle|\; \| g \mid X^* \| \le 1 \right\}. \tag{1.6}$$

В то же время, для любого g, $\| g \mid X \| \le 1$, имеем

$$\| f * g \mid \mathbb{L}^\infty \| \le \| f \mid X \| \cdot \| g \mid X^* \| \le \| f \mid X \|,$$

в частности,

$$\omega(\delta, f * g, \mathbb{L}^\infty) \le \omega(\delta, f, X). \tag{1.7}$$

Введем обозначение $\omega(\delta) = \omega(\delta, h_{j_0}, X)$. Поскольку $h_{j_0} \in X = \overset{\circ}{X}$, то $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Функции h_j являются $(2\pi/J)$-периодическими и могут быть представлены в виде

$$h_j(\bullet) = \frac{J_0}{J} \sum_{n=0}^{J/J_0-1} h_{j_0}(\bullet + 2\pi n/J).$$

Отсюда и из (1.7) имеем

$$\omega(\delta, h_j * g, \mathbb{L}^\infty) \le \begin{cases} \omega(\delta, h_{j_0} * g, \mathbb{L}^\infty), & \delta \le 2\pi/J, \\ \omega(2\pi/J, h_{j_0} * g, \mathbb{L}^\infty), & \delta > 2\pi/J, \end{cases}$$

$$\le \begin{cases} \omega(\delta), & \delta \le 2\pi/J, \\ \omega(2\pi/J), & \delta > 2\pi/J. \end{cases}$$

Значит, $\| h_j * g \mid \mathbb{L}^\infty \| \le \omega(2\pi/J) \to 0$ при $j \to \infty$. Принимая во внимание (1.6), получим $\| h_j \mid X \| \to 0$. Следовательно, согласно пункту d) Определения 1 имеем

$$\| \exp(in\bullet) - v_n^j/\hat{v}_n^j(n) \mid X \| = \| \exp(in\bullet) h_j(\bullet) \mid X \| \to 0 \text{ при } j \to 0.$$

Что и требовалось.

В заключение этого параграфа стоит сказать, что Определение 2 может быть применено не только к пространствам из $\mathfrak{H}$, но и ко многим топологическим линейным пространствам, например к $\mathbb{C}^\infty$ или $\mathbb{D}$.

Что касается распространения Определения 2 на полиномиальные КМА (И.Мейер [9], Ч.Чуи и Х.Маскар [2]), то это можно сделать, удалив из него пункт 3d) и добавив вместо пункта 1b) требование наличия в V^j базисов, состоящих из соответствующих сдвигов одной функции. Однако это ведет к нарушению некоторых полезных свойств КМА. Поэтому, представляется, что эти важные КМА следует рассматривать в соответствии с общими принципами, но отдельно от общей теории.

§2. Всплески

Традиционный подход к всплеск-пространствам W^j состоит в их определении как ортогонального дополнения пространства V^j до V^{j+1}. Этот метод всплеск-представления функций $f \in \mathbb{L}^2$ основан на их аппроксимации ортогональными проекциями на пространства $V^j \subset \mathbb{L}^2$. Концепция "ортогональной проекции" теряет свое значение для произвольных пространств $X \in \mathfrak{H}$. Некоторые аспекты неортогональных всплеск-разложений пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ были рассмотрены в [4, Гл. 8].

Пусть $\{V^j\}_{j=0}^\infty$ — КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$. Компоненты вектор-функций $\{\vec{v}^j\}_{j=0}^\infty$ образуют базисы Винера пространств V^j. Если $\{P^j\}_{j=0}^\infty$ — КМА пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ с базисами Винера $\{\vec{p}^j\}_{j=0}^\infty$ и такой, что $\langle v_n^j, p_n^j \rangle \ne 0$, $n = 0, 1, \dots, J-1$, $j = 0, 1, 2, \dots$, то мы будем говорить, что КМА $\{P^j\}_{j=0}^\infty$ определяет *всплеск-проекцию* на КМА $\{V^j\}_{j=0}^\infty$. Поскольку при $i \ne j$ носители спектров функций v_n^j и p_n^i не пересекаются, имеем $\langle v_n^j, p_n^i \rangle = 0$. Поэтому проектирование $X \mapsto V^j$ определяется формулой

$$f \mapsto \mathcal{V}^j[f] \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{J-1} \frac{\langle f, p_n^j \rangle}{\langle v_n^j, p_n^j \rangle} v_n^j. \tag{2.1}$$

Всплеск-пространствами называются пространства

$$W^j = \{ f \in V^{j+1} \mid \langle f, p_n^j \rangle = 0, n = 0, 1, \dots, J-1 \}.$$

Легко видеть, что в пространствах W^j существует базис Винера, который может быть вычислен по формулам

$$\begin{aligned} w_n^j &= \langle v_{n+J}^{j+1}, p_n^j \rangle v_n^{j+1} - \langle v_n^{j+1}, p_n^j \rangle v_{n+J}^{j+1}, \quad n = 1, 2, \dots, J-1, \\ w_J^j &= v_J^{j+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким образом, пространства W^j инвариантны относительно сдвига аргумента на $(2\pi/J)$. Кроме того, имеет место представление

$$V^j = V^0 \oplus W^0 \oplus \dots \oplus W^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\oplus$ обозначает прямую (вообще говоря, неортогональную) сумму линейных пространств.

Очевидно, согласно Свойству 2 пространств из $\mathfrak{H}$ для банаховых пространств X имеет место двойственная ситуация. КМА $\{V^j\}_{j=0}^\infty$ устанавливает всплеск-проекцию пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ на пространства $\{P^j\}_{j=0}^\infty$ и определяет всплеск-пространства $\{Q^j\}_{j=0}^\infty$. Это утверждение остается также в силе и для квазибанахова пространства X. В самом деле, если $\{V^j\}$ образует КМА квазибанахова пространства $X \subset Y \overset{\text{def}}{=} X^{\circ * \circ *}$, то все нечетные гармоники функции v_1^1 отличны от нуля. Значит, согласно Теореме 2 $\{V^j\}$ образуют КМА банахова пространства Y. Однако КМА квазибанахова пространства X не определяют все возможные всплеск-проекции на КМА $\{P^j\}$ пространства $(\overset{\circ}{X})^*$.

Теорема 3. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$, КМА $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ пространства $(\overset{\circ}{X})^*$ определяет всплеск-проекцию, $\{W^j\}_{j=0}^{\infty}$ — соответствующие всплеск-пространства. Тогда найдется такой набор функций $\{\psi^j\}_{j=0}^{\infty}$, что компоненты векторов $\vec{\psi}^l$ образуют базисы пространств W^l. Кроме того, для любых j_1, j_2, $0 \le j_1 < j_2$, имеем*

$$\psi^{j_1}(J_2x/J_1) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1-1} \psi^{j_2}(x + 2\pi kJ_1/J_2).$$

Мы опускаем доказательство Теоремы 3, поскольку оно аналогично доказательству Теоремы 1.

Следствие. *Зафиксируем некоторое $j_0 > 0$. Если при условиях Теоремы 3 ψ^j удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\psi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J_0-1} b_n\varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J), \tag{2.3}$$

для $j = j_0$, то ψ^j удовлетворяют ему для всех $j \le j_0$. Кроме того, если учесть 2π-периодичность функций φ^j и ψ^j, то масштабирующее уравнение может быть записано в виде

$$\psi^j(x) = \sum_{n=0}^{2J-1}\left(\sum_{k=0}^{J_0/J-1} b_{n+2kJ}\right)\varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J).$$

Принципиальны вопросом, связанным со всплеск-проекциями, является вопрос о возможности аппроксимации произвольной функции с наперед заданной точностью. Мы даем на него ответ в простейшем случае $X = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$, где

$$\| f \mid \ell^p \| \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^p\right)^{1/p}.$$

В дальнейшем мы, как обычно, полагаем $q = p/(p-1)$ при $p > 1$; $q = \infty$ при $p = 1$.

Теорема 4. *Пусть $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ устанавливает всплеск-проекцию на КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ пространства ℓ^p, $1 \le p < \infty$. Любое распределение из ℓ^p может быть приближено с произвольной точностью своими проекциями на V^j тогда и только тогда, когда множество чисел*

$$\left\{\{\Delta_{nj}\}_{n=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{\infty} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{\{\| p_n^j \mid \ell^q \| \cdot \| v_n^j \mid \ell^p \| / \langle v_n^j, p_n^j\rangle\}_{n=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{\infty}$$

ограничено.

Замечание. Поскольку $(\ell^\infty)^\circ \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{c}_0 \ne \ell^\infty$, то Теорема 4 остается в силе лишь для $\mathbf{c}_0$, а не для ℓ^∞.

Как мы уже отмечали, для определения всплеск-пространств для некоторого КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ пространства X мы должны зафиксировать метод проектирования на пространства V^j. Для каждого КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ пространства $X = \mathbb{L}^2$ (наиболее важного частного случая) можно рассматривать ортогональную проекцию, которая определяется равенствами $P^j = V^j$. Согласно Теореме 4 любая функция может быть приближена своими ортогональными проекциями на пространства V^j. Принимая во внимание, что ортогональная проекция дает наилучшее приближение, этот факт следует также из плотности $\bigcup_{j=0}^{\infty} V^j$ в $\mathbb{L}^2$.

Доказательство Теоремы 4. Необходимость. Пусть найдутся такие последовательности n_m и j_m, $0 \le n_m < 2^{j_m} = J_m$, $j_m \to \infty$, что $|\Delta_{n_m j_m}| \to \infty$ при $m \to \infty$. Это означает, что последовательность проекторов

$$f \mapsto \mathcal{V}_{n_m}^{j_m}[f] \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\langle f, p_{n_m}^{j_m}\rangle}{\langle v_{n_m}^{j_m}, p_{n_m}^{j_m}\rangle} v_{n_m}^{j_m}$$

неограничена как последовательность операторов, действующих из ℓ^p в ℓ^p, т.е. найдется такая последовательность $f_m \in \ell^p$, $\| f_m \mid \ell^p \| = 1$, что $\| \mathcal{V}^{j_m}_{n_m}[f_m] \mid \ell^p \| \to \infty$. Очевидно, мы можем выбрать f_m, у которых отличны от нуля лишь гармоники с номерами $n_m + kJ_m$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, последовательность норм операторов $\mathcal{V}^j$ неограничена. Необходимость доказана.

Заметим, что ограниченность множества Δ_{nj} необходима для сходимости на пространствах, в которых последовательность норм операторов умножения на функции $\exp(inx)$ ограничена. В самом деле, это следует из того, что оператор $f(x) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+kJ)e^{i(n+kJ)x}$ может быть представлен в виде $e^{inx}\sum_{k=0}^{J-1} f(x+2\pi k/J)e^{-in(x+2\pi k/J)}/J$.

Достаточность. Пусть числа $|\Delta_{nj}| = \| \mathcal{V}^j_n \mid \ell^p \to \ell^p \|$ не превышают $M > 0$. Докажем, что нормы $\| \mathcal{V}^j \mid \ell^p \to \ell^p \|$ ограничены числом M. В самом деле, введя обозначение

$$f^j_n(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+kJ)e^{i(n+kJ)x},$$

получим

$$\| \mathcal{V}^j[f] \mid \ell^p \|^p = \| \sum_{n=0}^{J-1} \mathcal{V}^j_n[f] \mid \ell^p \|^p = \| \sum_{n=0}^{J-1} \mathcal{V}^j_n[f^j_n] \mid \ell^p \|^p$$
$$= \sum_{n=0}^{J-1} \| \mathcal{V}^j_n[f^j_n] \mid \ell^p \|^p \le M^p \sum_{n=0}^{J-1} \| f^j_n \mid \ell^p \|^p = M^p \| f \mid \ell^p \|^p.$$

Что и требовалось.

Таким образом, ввиду ограниченности норм приближающих операторов, для того чтобы доказать сходимость для всех функций класса ℓ^p, нам нужно доказать лишь сходимость на экспонентах. Это легко следует из (2.1) и из того, что для любого КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$ (в частности, для ℓ^p и ℓ^q) при любом n имеем $\| e^{inx} - v^j_n(x)/\hat{v}^j_n(n) \mid X \| \to 0$ при $j \to \infty$, что было показано при доказательстве Теоремы 2. Теорема 4 доказана.

§3. Алгоритмы всплеск-декомпозиции и реконструкции

Алгоритмы декомпозиции состоят из двух шагов. На первом из них бесконечномерное пространство X проектируется на конечномерное пространство V^j. Этот шаг может быть реализован лишь приближенно, поскольку он включает в себя операции интегрирования или суммирования бесконечных рядов. Мы приведем только аналитические формулы и не будем обсуждать методы численной реализации этой проекции. Второй шаг — разложение $f \in V^j$ в сумму

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{j-1} g_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{N-1} c_{jn}\psi^n(x - 2\pi k/N),$$

где $f_0 \in V^0$, $g_n \in W^n$, $n = 0,1,2,\dots,j-1$. Поскольку на этом шаге мы имеем дело с конечномерными пространствами, то на нем могут использоваться конечные численные алгоритмы. Будут рассмотрены три типа алгоритмов. Первый из них является универсальным. Он основан на переходе в частотную область и имет сложность $O(J\log J) = O(Jj)$. Второй — применим для тех всплеск-проекций пространств $X \in \mathfrak{H}$, для которых в пространствах $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$, определяющих всплеск-проекцию, найдутся базисы $\{\vec{\varphi}^j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\vec{\xi}^j\}_{j=0}^{\infty}$ с локальным носителем. Мы пользуемся термином *базис с локальным носителем*, поскольку для периодического случая традиционный термин *компактный носитель* теряет смысл. В случае базиса сдвигов с локальным носителем существует такое действительное число $\sigma > 0$, что носитель распределений базиса $\vec{\varphi}^n$ помещается (на периоде) на отрезке длины $2\pi\sigma/N$, $n > 0$. В дальнейшем мы полагаем, что σ — натуральное число, равное минимальному количеству последовательных интервалов вида $[2\pi k/N, 2\pi(k+1)/N]$, необходимых чтобы покрыть носитель базиса на периоде. Сложность такого алгоритма равна $O((\sigma_1+\sigma_2)J)$, где σ_1 и σ_2 —размеры носителей соответственно базисов $\{\vec{\varphi}^j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\vec{\xi}^j\}_{j=0}^{\infty}$. Главной составляющей этого алгоритма является операция решения систем линейных уравнений с разреженными матрицами. Третий алгоритм позволяет для произвольного КМА с конечной маской масштабирующего уравнения подобрать таким образом подходящую всплеск-проекцию, что процедуры разложения и восстановления функций могут быть реализованы в виде дискретной свертки с окнами размера порядка $\mathcal{N}$, который совпадает с размером маски. Сложность такого алгоритма равна $O(\mathcal{N}J)$. Эти поддающиеся распараллеливанию алгоритмы будут рассмотрены в §4.

Зафиксируем два двойственных КМА $\{V^j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{P^j\}_{j=0}^{\infty}$ пространств X и $(\overset{\circ}{X})^*$ соответственно, $\{\vec{v}^j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\vec{p}^j\}_{j=0}^{\infty}$ — их базисы Винера, $\{W^j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{Q^j\}_{j=0}^{\infty}$ — соответствующие всплеск-пространства с базисами Винера $\{\vec{w}^j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\vec{q}^j\}_{j=0}^{\infty}$.

Коэффициенты разложения проекции произвольного распределения f на пространство V^n в базисе Винера определяются по формуле (2.1). В соответствии с (1.5) координаты векторов пространства V^n в базисе Винера и базисе сдвигов связаны прямым и обратным ДПФ и, быть может, покоординатным умножением в частотной области. Согласно Лемме 1 и (2.2) функции v_k^j и w_k^j являются линейными комбинациями пары функций v_k^{j+1}, v_{k+J}^{j+1}. Поэтому, если мы знаем коэффициенты разложения, по базису $\vec{v}^{j+1}$, для нахождения разложений проекций на V^j и W^j в базисах $\vec{v}^j$ и $\vec{w}^j$ нам необходимо не более $4J$ операций умножения и $2J$ сложений. Формулы реконструкции имеют ту же сложность. Таким образом, порядок суммарной сложности определяется переходом от базисов Винера к базисам сдвигов и обратно. Значит, порядок арифметических затрат алгоритмов реконструкции и восстановления равен сложности алгоритма Быстрого Преобразования Фурье, т.е. $O(N\log N)$.

Прежде чем перейти к рассмотрению второго алгоритма, получим некоторые результаты, касающиеся базисов сдвигов. У нас есть формула (2.1) для проектирования на пространства V^j в базисе Винера. Получим аналогичные формулы для базисов сдвигов. Базис сдвигов $\vec{\xi}^j$ пространства P^j называется *двойственным* базису $\vec{\varphi}^j$, если

$$\langle \varphi^j(\bullet - 2\pi l/J), \xi^j(\bullet - 2\pi k/J)\rangle = \delta_{lk} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & l = k; \\ 0, & l \neq k \end{cases}.$$

Теорема 5. *Два распределения*

$$\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k v_k^n \text{ и } \xi = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k p_k^n$$

являются двойственными (т.е. их соответствующие сдвиги образуют двойственные базисы пространств V^n и P^n) тогда и только тогда, когда

$$\alpha_0\bar{\beta}_0\langle v_0^n, p_0^n\rangle = \alpha_1\bar{\beta}_1\langle v_1^n, p_1^n\rangle = \ldots = \alpha_{N-1}\bar{\beta}_{N-1}\langle v_{N-1}^n, p_{N-1}^n\rangle = 1/N.$$

Теорема 5 для сплайн-КМА пространства $\mathbb{L}^2$ принадлежит В.А.Желудеву [13].

Доказательство Теоремы 5. В самом деле,

$$\langle \varphi(\bullet), \xi(\bullet - 2\pi l/N)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\bar{\beta}_k\langle v_k^n, p_k^n\rangle \exp(2\pi ilk/N) \overset{\text{def}}{=} \tau_l.$$

Выражение в правой части дает значения тригонометрического полинома $t_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k \exp(ixk)$, где $\gamma_k = \alpha_k\bar{\beta}_k\langle v_k^n, p_k^n\rangle$, в точках $2\pi l/N$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$. Ввиду того что интерполяционная задача имеет единственное решение, $\tau_l = \delta_{0l}$ тогда и только тогда, когда $\gamma_k = 1/N$. Теорема 5 доказана.

Введем обозначения

$$\gamma_m = \langle \varphi^{n+1}(\bullet - 2\pi m/2N), \xi^n(\bullet)\rangle, \quad m = 0, 1, \ldots, 2N-1.$$

Теорема 6. *Пусть*

$$\psi^n(\bullet + 2\pi/2N) = \sum_{m=0}^{2N-1} (-1)^n \gamma_m \varphi^{n+1}(\bullet + 2\pi m/2N). \tag{3.1}$$

Тогда система функций $\{\psi^n(\bullet - 2\pi m/N)\}_{m=0}^{N-1}$ *образует базис пространства* W^n.

Соотношение (3.1) напоминает хорошо известную формулу представления функции ψ^n через компоненты вектора $\vec{\varphi}^{n+1}$ с ортогональными компонентами (см., [4],[5]). Фактически (3.1) уточняет смысл коэффициентов. Для случая КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ формула (3.1) приведена в [4, стр. 264] (см. также формула (5.4) работы [1]).

Из Теоремы 6 следует, что если базисы $\vec{\varphi}^j$ пространств V^j имеют локальные носители, то тем же свойством обладают и базисы $\vec{\psi}^j$ Более того, маски масштабирующих уравнений базисов ψ^j имеют ограниченное число элементов. Аналогичные проблемы для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ с базисами, имеющими компактный носитель и масштабирующие уравнения с конечной маской, были рассмотрены в [3].

Доказательство Теоремы 6. Для любого k имеем

$$\langle \psi^n(\bullet - 2\pi k/N), \xi^n(\bullet)\rangle = \sum_{m=0}^{2N-1} (-1)^m \gamma_m \langle \varphi^{n+1}(\bullet - 2\pi(2k+1-m)/2N)), \xi^m(\bullet)\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{2N-1} (-1)^m \gamma_m \gamma_{2k+1-m} = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_{2m}\gamma_{2k+1-2m} - \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_{2m+1}\gamma_{2k-2m}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_{2m}\gamma_{2k+1-2m} - \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_{2k+1-2m}\gamma_{2m} = 0.$$

Покажем, что компоненты вектора $\vec{\psi}^n(x)$ линейно независимы. Для функциональных матриц $A(\bullet)$ и $B(\bullet)$ размеров $j_0 \times k_0$, $l_0 \times k_0$ с элементами из X и $(\overset{\circ}{X})^*$ соответственно через $\langle A, B\rangle$ обозначим числовую матрицу C размера $j_0 \times l_0$, элементы которой определяются по формуле $c_{j,l} = \sum_{k=0}^{k_0-1} \langle a_{j,k}, b_{l,k}\rangle$. Введем также вспомогательную матрицу $\Gamma^n = \langle \vec{\varphi}^{n+1}, \vec{\xi}^n\rangle$. Ее первый столбец совпадает с $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2N-1})$, а каждый последующий столбец получается из предыдущего циклическим сдвигом на две позиции. Ввиду формулы (3.1) размерность линейной оболочки компонент вектора $\vec{\psi}^n$ равна рангу матрицы Γ^n. Поскольку $\operatorname{rank}\Gamma^n = \operatorname{rank}(F_{2N}^* \Gamma^n F_N/2N^2) = \operatorname{rank}\langle \vec{v}^{n+1}, \vec{p}^n\rangle = N$, компоненты вектора $\vec{\psi}^n$ линейно независимы. Теорема 6 доказана.

Теперь мы остановимся на численных алгоритмах всплеск-декомпозиции и реконструкции для КМА пространства $X \in \mathfrak{H}$, когда их базисы $\vec{\varphi}^j$, а также базисы $\vec{\xi}^j$ КМА пространства $(\overset{\circ}{X})^*$, определяющего всплеск-проекцию, имеют локальные носители. Через σ_1 и σ_2 мы обозначим размеры соответствующих носителей. Случай $X = \mathbb{L}^2$, $P^j = V^j$ является частным. Он дает разложение пространства $\mathbb{L}^2$ в ортогональную сумму всплеск-пространств.

Через $\vec{\tilde{\xi}}^j$ и $\vec{\tilde{\varphi}}^j$ мы обозначим базисы, двойственные соответственно базисам $\vec{\varphi}^j$ и $\vec{\xi}^j$.

Сначала найдем коэффициенты проекции произвольной функции $f \in X$ на пространство V^n в базисе $\vec{\varphi}^n$. Проекция f_n может быть представлена в двух видах

$$f_n = \vec{a}^{nT}\vec{\varphi}^n = \vec{b}^{nT}\vec{\tilde{\varphi}}^n, \tag{3.2}$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы коэффициентов разложения соответственно в базисах $\vec{\varphi}^n$ и $\vec{\tilde{\varphi}}^n$. Очевидно, $\vec{b}^n = \langle f, \vec{\xi}^n\rangle$. Поэтому, если вектор $f\vec{\xi}^n$ состоит из интегрируемых функций, то для того чтобы найти $\vec{b}^n$, нам нужно вычислить N интегралов по отрезкам длины $2\pi\sigma_2/N$. Из (3.2) следует, что $\langle \vec{a}^{nT}\vec{\varphi}^n, \vec{\xi}^n\rangle = \langle \vec{b}^{nT}\vec{\tilde{\varphi}}^n, \vec{\xi}^n\rangle$. Значит, $\vec{a}^{nT}\Phi^n = \vec{b}^{nT}$. Таким образом, вектор $\vec{a}^n$ является решением системы линейных уравнений не более, чем с $(\sigma_1+\sigma_2)$-диагональной циркулянтной матрицей. Треугольное разложение матрицы Φ^n может быть реализовано за $O((\sigma_1+\sigma_2)^2 N)$ арифметических операций. Однако оно не зависит от входной функции f. Сложность решения систем с полученными разреженными треугольными матрицами равна $O((\sigma_1+\sigma_2)N)$. Поэтому этот шаг декомпозиции имеет сложность $O((\sigma_1+\sigma_2)N)$.

Второй и третий шаги состоят в проектировании функции $f_{j+1}\in V^{j+1}$ на пространства V^j и W^j. Эти шаги повторяются нужное число раз вплоть до $j=0$. Единственным отличием второго шага от первого является упрощение способа получения f_j. В самом деле, поскольку $\vec{b}^j = \langle f_{j+1}, \vec{\xi}^j\rangle = \langle (\vec{a}^{j+1})^T \vec{\varphi}^{j+1}, \vec{\xi}^j\rangle = (\vec{a}^{j+1})^T \Gamma^j$, то вектор $\vec{b}^j$ получается как свертка $\vec{a}^{j+1}$ с окном размера порядка $O(\sigma_1+2\sigma_2)$. В частности, для $X=\mathbb{L}^2$ нам не нужно вычислять интегралы.

Проектирование на пространство всплесков W^j реализуется аналогичным образом. В самом деле, пусть базис $\vec{\psi}^j$ определяется по формуле (3.1), элементы базиса $\vec{\zeta}^j$ всплеск-пространства Q^j имеют локальный носитель, $\vec{\tilde{\zeta}}^j$ и $\vec{\tilde{\psi}}^j$ — соответствующие двойственные базисы. Тогда $g_j = \vec{c}^{jT}\vec{\psi}^j = \vec{d}^{jT}\vec{\tilde{\psi}}^j$, где g_j всплеск-проекция f_{j+1} на W^j, $\vec{d}^{jT} = \langle f_{j+1}, \vec{\zeta}^j\rangle = (\vec{a}^{j+1})^T\langle\vec{\varphi}^{j+1}, \vec{\zeta}^j\rangle = (\vec{a}^{j+1})^T \Xi^j$, $\vec{c}^j$ — решение системы линейных уравнений $\vec{c}^{jT}\Psi^j = \vec{d}^{jT}$ с матрицей $\Psi^j \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{\psi}^j, \vec{\zeta}^j\rangle$. Очевидно, сложность этого шага равна $O((\sigma_1+\sigma_2)N)$.

Построим алгоритм реконструкции. Поскольку

$$(\vec{a}^{j+1})^T \vec{\varphi}^{j+1} = \vec{a}^{jT}\vec{\varphi}^j + \vec{c}^{jT}\vec{\psi}^j, \tag{3.3}$$

то

$$\langle (\vec{a}^{j+1})^T \vec{\varphi}^{j+1}, \vec{\xi}^{j+1}\rangle = \langle \vec{a}^{jT}\vec{\varphi}^j, \vec{\xi}^{j+1}\rangle + \langle \vec{c}^{jT}\vec{\psi}^j, \vec{\xi}^{j+1}\rangle.$$

Значит,

$$(\vec{a}^{j+1})^T \Phi^{j+1} = \vec{a}^{jT}\Gamma + \vec{c}^{jT}\Xi. \tag{3.4}$$

Правая часть (3.4) состоит из двух сверток с окнами размера $\sigma_1+\sigma_2$, а вектор $\vec{a}^{j+1}$ является решением системы линейных уравнений с матрицей Φ^{j+1}.

Таким образом, сложность этого алгоритма для КМА, обладающего базисами с локальным носителем, равна $O((\sigma_1+\sigma_2)N)$.

§4. Сверточные алгоритмы всплеск-декомпозиции и реконструкции

Строго говоря, для любой всплеск-проекции алгоритмы декомпозиции и реконструкции могут быть реализованы в форме сверток. Однако не во всех случаях (см., напр., предыдущий параграф) такая реализация оптимальна с точки зрения вычислительных затрат. Здесь мы рассматриваем случаи, когда эти алгоритмы реализуются как свертки с окнами малого размера.

Пусть $\{V^k\}$ образует КМА пространства X, $\{P^k\}$ определяет всплеск-проекцию, $\{\vec{\varphi}^k\}_{k=0}^{j+1}$ и $\{\vec{\psi}^k\}_{k=0}^{j}$ — базисы соотствующих пространств V^k и W^k. Тогда найдутся наборы чисел $\{r_m\}_{m=0}^{2J-1}$ и $\{s_m\}_{m=0}^{2J-1}$, определяющие для каждого $k\le j$ всплеск-проекцию

$$\sum_{n=0}^{2K-1} c_n^{k+1}\varphi^{k+1}(x-2\pi n/2K) = \sum_{n=0}^{K-1} c_n^k \varphi^k(x-2\pi n/K) + \sum_{n=0}^{K-1} d_n^k\psi^k(x-2\pi n/K)$$

по формулам

$$c_m^k = \sum_{l=0}^{2J-1} c_{l+2m}^{k+1} r_l, \qquad d_m^k = \sum_{l=0}^{2J-1} c_{l+2m}^{k+1} s_l.$$

Формула реконструкции может быть записана в виде

$$c_m^{k+1} = \sum_{l=0}^{2J-1} c_l^k a_{m-2l} + \sum_{l=0}^{2J-1} d_l^k b_{m-2l},$$

где a_l и b_l — числа, определяющие маски масштабирующих уравнений (1.3) и (2.3).

Обратно, если мы имеем такое инвариантное относительно сдвига аргумента на $2\pi/J$ пространство W^j, что $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$, то пространства W^k при $k < j$ определяются по рекуррентной формуле $W^k = \{\, f(\bullet/2) + f(\bullet/2+\pi) \mid f \in W^{k+1} \,\}$. Оказывается, существуют КМА, устанавливающие всплеск-проекцию с теми же самыми всплеск-пространствами $\{W^k\}_{k=0}^{j}$. Нетрудно показать, что существует много возможных КМА, определяющих данные всплеск-пространства. Это следует из того, что согласно Теореме 2 КМА $\{P^j\}$ определяется функцией p_1^1. В то же время, в качестве p_1^1 может быть взята любая функция, удовлетворяющая условиям $\langle v_k^m, f\rangle \neq 0$, $\langle w_k^n, f\rangle = 0$, k — нечетно, $m = 1, 2, \ldots$; $n = 2, 3, \ldots, j$. После выбора базисов сдвигов в V^{j+1} и W^j последовательности $\{r_l\}$ и $\{s_l\}$ определяются однозначно.

В этом параграфе мы покажем, что если для любого $n > 0$ номера ненулевых элементов маски масштабирующего уравнения (1.3) умещаются на отрезке длины $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}$ (имеет смысл предположить, что $\mathcal{N} \ll N$), то существуют алгоритмы декомпозиции и реконструкции функций из V^n сложности порядка $O(\mathcal{N}N)$.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Пусть P_1, P_2, R — алгебраические полиномы степени m, n и $< m+n$ соответственно. Кроме того, полиномы P_1 и P_2 не имеют общих корней. Тогда найдутся такие полиномы Q_1 и Q_2 степени не выше $n-1$ и $m-1$, что*

$$P_1(x)Q_1(x) + P_2(x)Q_2(x) = R(x). \tag{4.1}$$

Полиномы Q_1 и Q_2 определяются однозначно.

Замечание. Эта лемма в чуть менее общей форме была приведена И.Дабеши [4, с. 169] и [5]. Наше доказательство основано на другой идее и несколько короче.

Доказательство Леммы 3. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^m$ — корни полинома P_1. Тогда Q_2 определим из условий $Q_2(x_k) = R(x_k)/P_2(x_k)$, где равенство выполняется с кратностью корня x_k. Поскольку $P_2(x_k) \neq 0$, деление определено корректно. Полином Q_1 находится аналогичным образом по значениям в точках $\{y_k\}_{k=1}^n$ — корнях полинома P_2.

Равенство (4.1) следует из его выполнения (с учетом кратности) в $n+m$ точках, т.к. левая и правые части — полиномы порядка не более $n+m-1$.

В виду единственности решения интерполяционной задачи (вообще говоря, с кратными точками) полиномы Q_1 и Q_2 определяются однозначно.

Пусть $\{V^j\}$ — некоторый КМА пространства из $\mathfrak{H}$. Мы знаем, что базисы Винера определяются, фактически, однозначно. А набор базисов сдвигов $\{\vec{\varphi}^j\}$ выбирается с определенным произволом. Рассмотрим случай, когда эти базисы связаны масштабирующим уравнением

$$\varphi^j(x) = \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} a_n \varphi^{j+1}(x - 2\pi n/2J),$$

где $\mathcal{N} > 0$ и $\{a_n\}$ не зависят от j, $j = 0, 1, 2, \ldots$. *Характеристическим полиномом* базисов $\{\vec{\varphi}^j\}$ называется полином $P_\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} a_n z^n$. Кроме того, будем считать, что для любого $j \geq 0$ выполнено равенство $\varphi^j(\bullet) = \frac{1}{2}\left(\varphi^{j+1}(\bullet/2) + \varphi^{j+1}(\bullet/2+\pi)\right)$. В частности, отсюда имеем $P_\varphi(1) = 1$. Наша ближайшая цель — найти все допустимые конечные маски, т.е. маски, для которых найдется соответствующий набор базисов $\vec{\varphi}^j$.

Лемма 4. *Пусть $\{V^j\}$ — произвольный КМА. Тогда маска $\{a_n\}_{n=0}^{\mathcal{N}}$ допустима в том и только том случае, когда характеристический полином $P_*(z) = \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} a_n z^n$ обращается в нуль в точке $z = -1$ и отличен от нуля во всех других точках, представимых в виде $z = \exp(2\pi i\theta)$, где θ, $0 \leq \theta < 1$ — двоичнорациональное число. Маска (с нормирующим условием $P_*(1) = 1$) вместе с функцией φ^1 определяет базисы $\{\vec{\varphi}^j\}$ однозначно.*

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть $P_*(\exp(2\pi i\theta)) = 0$, где в двоичном представлении $\theta = 0.\theta_1\theta_2\ldots\theta_{j+1}$ (для $n = 1, 2, \ldots, j+1$, $\theta_n = 0$ или 1), $\theta_{j+1} = 1$, $j \geq 1$. Число $j+1$ мы назовем *порядком* θ. Полагаем $a_n = 0$ при $n > \mathcal{N}$, $\vec{a}_* = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T$, $a_k^j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+nJ}$, $\vec{a}^{jT} = (a_0^j, \dots, a_{J-1}^j)$; $P_j(z) = \sum_{n=0}^{J-1} a_n^j z^n$. Заметим, что для θ порядка не выше j имеет место равенство $P_*(\exp(2\pi i\theta)) = P_j(\exp(2\pi i\theta))$.

Введем число $\varkappa = 1 - \theta = 0.\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{j+1}$. Поскольку

$$\varphi^j(x) = \left(\vec{a}^{j+1}\right)^T \vec{\varphi}^{j+1}(x) = \left(F_{2J}\vec{a}^{j+1}\right)^T F_{2J}^* \vec{\varphi}^{j+1}(x)/2J \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\vec{\alpha}^{j+1}\right)^T \vec{v}^{j+1}(x),$$

и для $k = \varkappa_1\varkappa_2 \dots \varkappa_{j+1}$ (в двоичном представлении) имеем

$$\alpha_k^{j+1} = P_{j+1}(\exp(2\pi i(1-\varkappa)) = P_{j+1}(\exp(2\pi i\theta) = P_*(\exp(2\pi i\theta)) = 0,$$

то функция φ^j не содержит гармоник с номерами вида $n = k + 2Jm$, $m \in \mathbb{Z}$. Значит, те же гармоники отсутствуют у функции v_1^1, что противоречит Теореме 2.

Если же $P_*(-1) \neq 0$ или $P_*(1) = 0$, то, очевидно, получим либо $\varphi^0 \not\equiv \mathrm{const}$, либо $\varphi^0 \equiv 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Мы полагаем $\varphi^1 = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 v_1^1$, $\alpha_0^1 = 1$, $\alpha_1^1 \neq 0$. Тогда легко видеть, что коэффициенты разложения $\varphi^{j+1} = \sum_{n=0}^{2J-1} \alpha_n^{j+1} v_n^{j+1}$ могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$\alpha_n^{j+1} = \alpha_n^j / P_{j+1}(\exp(2\pi i\theta)),$$

где в двоичном представлении

$$n = \varkappa_1\varkappa_2 \dots \varkappa_{j+1} \neq J,\ \varkappa = 0.\varkappa_1\varkappa_2 \dots \varkappa_{j+1},\ \theta = 1 - \varkappa;\ \alpha_J^{j+1} = \alpha_{J/2}^j\ (= \alpha_1^1).$$

Лемма 5. *Пусть $\{V^j\}$ — произвольный КМА. Базисы $\vec{\varphi}^j$ пространств V^j выбираем из формулировки Теоремы 1 удовлетворяющими масштабирующему уравнению (1.3) с конечной маской и характеристическим полиномом порядка $\mathcal{N} > 0$. Тогда для этого КМА найдутся базисы $\vec{\phi}^j$, которые для любого j_1, j_2, $0 \le j_1 < j_2$, также удовлетворяют условиям*

$$\phi^{j_1}\left(J_2/J_1 x\right) = \sum_{k=0}^{J_2/J_1 - 1} \phi^{j_2}\left(x + 2\pi k J_1/J_2\right),$$

и для любого $j \ge 0$

$$\phi^j(\bullet) = \sum_{l=0}^{2J_0 - 1} \alpha_l \phi^{j+1}(\bullet - 2\pi l/2J),$$

причем для характеристических полиномов

$$P_\phi(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{l=0}^{2J_0-1} \alpha_l z^l$$

базисов $\vec{\phi}^j$ имеем $|P_\phi(z)|^2 + |P_\phi(-z)|^2 > 0$ для всех z. Кроме того, порядок полинома P_ϕ не превышает $\mathcal{N}$.

Аналог Леммы 5 для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ может быть найден, например, в статье Ч.Чуи и Ж.Ванга [3].

Доказательство Леммы 5. Необходимость. Если характеристический полином

$$P_\varphi(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{l=0}^{\mathcal{N}} a_l z^l$$

не имеет пар корней вида $\pm c$ и $P_\varphi(0) \neq 0$, то утверждение Леммы 5 выполнено. Пусть $z = \pm c_0$ — корни полинома P_φ, $C = c_0^2$. Тогда имеет место представление

$$P_\varphi(z) = (C - z^2) \sum_{l=0}^{\mathcal{N}-2} \gamma_l z^l. \tag{4.2}$$

Рассмотрим процедуру перехода к новым базисам $\vec{\phi}_1^j$, позволяющую сократить порядок характеристического P_φ. Мы введем новую функцию

$$\phi_1^j(\bullet) = \sum_{l=0}^{\mathcal{N}-2} \gamma_l \varphi^{j+1}(\bullet - 2\pi l/2J). \tag{4.3}$$

Поскольку согласно (4.2) $\varphi^j(\bullet) = C\phi_1^j(\bullet) - \phi_1^j(\bullet - 2\pi/J)$, то набор функций $\phi_1^j(\bullet - 2\pi l/J)$, $l = 0, 1, \ldots, J-1$, образует базис пространства V^j при $j \geq 0$.

Ясно, что соотношение между элементами базисов при различных j выражается равенствами

$$\phi_1^j(\bullet) = \sum_{l=0}^{\mathcal{N}-1} \alpha_l' \phi_1^{j+1}(\bullet - 2\pi l/2J),$$

где коэффициенты α_l' определяются по формуле

$$\sum_{l=0}^{\mathcal{N}-1} \alpha_l' z^l = (C - z) \sum_{l=0}^{\mathcal{N}-2} \gamma_l z^l.$$

Заметим, что новая маска допустима, поскольку, с одной стороны, новый характеристический полином не имеет дополнительных корней. С другой стороны, $c_0 \neq -1$, так как $-(-1) = 1$ не является его корнем. Мы будем повторять эту процедуру пока у характеристического полинома остаются корни вида $\pm c$. Так как каждый раз мы понижаем степень полинома на единицу, то к требуемому базису $\vec{\varphi}_*^j$ мы придем за конечное число шагов. Если $P_{\varphi_*}(0) \neq 0$, то полагаем $\vec{\phi}^j = \vec{\varphi}_*^j$. В противном случае, $\vec{\phi}^j(\bullet) = \vec{\varphi}_*^j(\bullet + 2\pi/J)$.

Перейдем к построению алгоритмов декомпозиции и реконструкции функций. Пусть пространства $\{V^j\}$ образуют КМА пространства из $\mathfrak{H}$, $\{\vec{\varphi}^j\}$ — набор базисов этих пространств. Кроме того, пусть эти базисы удовлетворяют (1.1), а характеристический полином имеет порядок $\mathcal{N}$ и $|P_\varphi(z)|^2 + |P_\varphi(-z)|^2 > 0$ для всех z.

Мы покажем, что существует разложение пространства V^n i в прямую (вообще говоря, неортогональную) сумму всплеск-пространств $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$, для которых в некотором базисе алгоритмы декомпозиции и реконструкции могут быть реализованы в виде дискретных сверток с окнами размера не более $\mathcal{N} + 1$. Более того, свертывающие окна, определяющие проекции на пространства W^j и V^j, а также восстанавливающие функцию $g \in V^{j+1}$ по ее проекциям на эти пространства, могут быть выбраны независимыми от j. Это озачает, что для произвольной функции

$$f(\bullet) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m^n \varphi^n(\bullet - 2\pi m/N) \in V^n$$

возможно разложение

$$f(\bullet) = \sum_{m=0}^{J-1} c_m^j \varphi^j(\bullet - 2\pi m/J) + \sum_{l=j}^{n-1} \sum_{m=0}^{L-1} d_m^l \psi^l(\bullet - 2\pi m/L),$$

где $\vec{\psi}^l$ — базисы пространств W^l, а коэффициенты $\left\{\{c_m^j\}_{m=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{n-1}$ и $\left\{\{d_m^j\}_{m=0}^{J-1}\right\}_{j=0}^{n-1}$ могут быть вычислены по формулам

$$c_m^{j-1} = \sum_{l=\mathcal{K}}^{\mathcal{K}+\mathcal{N}} c_{l+2m}^j r_l, \qquad d_m^{j-1} = \sum_{l=\mathcal{L}}^{\mathcal{L}+\mathcal{N}} c_{l+2m}^j s_l, \tag{4.4}$$

где $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathbb{Z}$. Далее мы покажем, что верхний предел суммирования в первой формуле может быть уменьшен на единицу. Последовательности c_m^j и d_m^j — J-периодические по нижнему индексу, и мы полагаем, что последовательности r_l и s_l определены для всех целых индексов, но отличаются от нуля только при $l = \mathcal{K}, \mathcal{K}+1, \ldots, \mathcal{K}+\mathcal{N}-1$ для первой последовательности и $l = \mathcal{L}, \mathcal{L}+1, \ldots, \mathcal{L}+\mathcal{N}$ — для второй. Сохраняя размер окна, мы можем перемещать его, изменяя парметр $\mathcal{K}$ и получая новые решения нашей задачи. Единственное требование к расположению окна r_l состоит в том, что оно должно иметь непустое пересечение с отрезком $[0, \mathcal{N}]$ или его сдвигом на lN, где $l \in \mathbb{Z}$. В противном случае, первый из операторов (4.4) при $j = n$ отобразит функцию φ^{n-1} в функцию вида

$$\sum_{l=0}^{N/2-1} \alpha_l \varphi^{n-1}(\bullet - 2\pi \cdot 2l/N),$$

где $\alpha_0 = 0$, что невозможно, поскольку это оператор проектирования пространства V^n на V^{n-1}. Возьмем произвольное число $\mathcal{K}$, принадлежащее отрезку $[1-\mathcal{N}, \mathcal{N}]$.

Мы построим пространства W^j исходя из того, что их базисы $\vec{\psi}^j$ определяются из условий

$$\psi^{j-1}(\bullet) = \sum_{m=0}^{\mathcal{N}} b_m \varphi^j(\bullet - 2\pi m/J),$$

где необходимо найти коэффициенты b_m. Поскольку формулы (4.4) определяют операторы проектирования на пространства V^{j-1} и W^{j-1}, при $m = 0, 1, \ldots, N/2-1$ справедливы равенства

$$\delta_{0m} = \sum_{l=\mathcal{K}}^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1} a_{l-2m} r_l, \tag{4.5}$$

$$\delta_{0m} = \sum_{l=\mathcal{L}}^{\mathcal{L}+\mathcal{N}} b_{l-2m} s_l, \tag{4.6}$$

$$0 = \sum_{l=\mathcal{L}}^{\mathcal{L}+\mathcal{N}} a_{l-2m} s_l, \tag{4.7}$$

$$0 = \sum_{l=\mathcal{K}}^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1} b_{l-2m} r_l \tag{4.8}$$

(естественно, мы считаем, что последовательности $\{a_l\}$ и $\{b_l\}$ являются N-периодическими, и на периоде вне области своего определения они доопределены нулями). Хорошо известно (см., например, [3]) и легко можно проверить, что для решения данной системы достаточно решить следующую систему уравнений

$$A(z)R(z) + A(-z)R(-z) \equiv 2, \tag{4.9}$$

$$B(z)S(z) + B(-z)S(-z) \equiv 2, \tag{4.10}$$

$$A(z)S(z) + A(-z)S(-z) \equiv 0, \tag{4.11}$$

$$B(z)R(z) + B(-z)R(-z) \equiv 0, \tag{4.12}$$

где

$$A(z) = \sum_{l=0}^{\mathcal{N}} a_l z^l, \quad B(z) = \sum_{l=0}^{\mathcal{N}} b_l z^l,$$

$$R(z) = \sum_{l=\mathcal{K}}^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1} r_l z^{-l} = z^{-\mathcal{K}-\mathcal{N}+1} \sum_{l=0}^{\mathcal{N}-1} r_{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1-l} z^l \stackrel{\mathrm{def}}{=} z^{-\mathcal{K}-\mathcal{N}+1} \overset{\vee}{R}(z),$$

$$S(z)=\sum_{l=\mathcal{L}}^{\mathcal{L}+\mathcal{N}} s_l z^{-l} = z^{-\mathcal{L}-\mathcal{N}} \sum_{l=0}^{\mathcal{N}} s_{\mathcal{L}+\mathcal{N}-l} z^l \stackrel{\text{def}}{=} z^{-\mathcal{L}-\mathcal{N}} \overset{\vee}{S}(z).$$

Уравнения (4.9) – (4.12) могут быть переписаны в виде

$$A(z)\overset{\vee}{R}(z)+(-1)^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1}A(-z)\overset{\vee}{R}(-z)=2z^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1}, \tag{4.13}$$

$$B(z)\overset{\vee}{S}(z)+(-1)^{\mathcal{L}+\mathcal{N}}B(-z)\overset{\vee}{S}(-z)=2z^{\mathcal{L}+\mathcal{N}}, \tag{4.14}$$

$$A(z)\overset{\vee}{S}(z)+(-1)^{\mathcal{L}+\mathcal{N}}A(-z)\overset{\vee}{S}(-z)=0, \tag{4.15}$$

$$B(z)\overset{\vee}{R}(z)+(-1)^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1}B(-z)\overset{\vee}{R}(-z)=0, \tag{4.16}$$

Согласно Лемме 3 и выбору $\mathcal{K}$ найдется единственная пара полиномов Q_1 и Q_2 порядка не выше $\mathcal{N}-1$, удовлетворяющая равенству

$$A(z)Q_1(z)+(-1)^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1}A(-z)Q_2(z)=2z^{\mathcal{K}+\mathcal{N}-1}.$$

При этом, очевидно, $Q_1(z)=Q_2(-z)$. Таким образом, полином $\overset{\vee}{R}(z)=Q_1(z)$ удовлетворяет уравнению (4.13).

Если $\mathcal{K}+\mathcal{N}$ — нечетно, то нетрудно проверить, что функции $B(z)=z\overset{\vee}{R}(-z)$ и $\overset{\vee}{S}(z)=A(-z)$ удовлетворяют уравнениям (4.13) — (4.16). В случае четного $\mathcal{K}+\mathcal{N}$ решениями этих уравнений являются функции $B(z)=\overset{\vee}{R}(-z)$ и $\overset{\vee}{S}(z)=-A(-z)$.

Несмотря на кажущийся произвол выбора полиномов B и $\overset{\vee}{S}$, пространства W^j полностью определяются выбором полинома $\overset{\vee}{R}$, поскольку коэффициенты полинома однозначно определяют оператор проектирования на пространство V^j вдоль пространства W^j.

Для того чтобы показать, что пространство W^j действительно имеет размерность J мы покажем справедливость формул реконструкции

$$c_m^j=\sum_{l=0}^{N/2-1} c_l^{j-1}a_{m-2l}+\sum_{l=0}^{N/2-1} d_l^{j-1}b_{m-2l}, \tag{4.17}$$

которые обращают операторы проектирования пространства V^j на пространства W^{j-1} и V^{j-1}. Значит,

$$\dim W^{j-1}=\dim V^j-\dim V^{j-1}=J-J/2=J/2.$$

Достаточно удостовериться, что формула (4.17) справедлива при $j=n$. Через A мы обозначим такую матрицу размера $2^{n-1}\times 2^n$, что ее первая строка состоит из элементов $a_0,a_1,\dots$, а последующие получаются из предыдущих двойным циклическим сдвигом ее элементов вправо. Аналогичным образом построим матрицы B,R,S. Тогда система уравнений (4.5) — (4.8) может быть записана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (R^T S^T) = E.$$

Следовательно, матрица $(R^T S^T)$ имеет обратную матрицу $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Значит, мы имеем невырожденный оператор и оператор реконструкции определяется формулой (4.17).

Представленная конструкция неортогональной всплеск-декомпозиции пространства V^n решает проблему минимизации вычислительных затрат, оставляя в стороне проблему "углов" между всплеск-пространствами. Ясно, что увеличивая ширину свертывающего окна (параметр $\mathcal{N}$), мы можем в определенной степени влиять на взаимное расположение всплеск-пространств (в частности, на степень неортогональности в случае $V^j \in \mathbb{L}^2$) . Зависимость взаимного расположения пространств $\{W^j\}$ от размера свертывающего окна нуждается в дополнительных исследованиях.

Само собой, для больших $\mathcal{N}$ предпочтительнее использовать описанный в §3 подход, основанный на переходе к базисам Винера.

Список литературы

1. de Boor C., DeVore R.A., Ron A., *On the construction of multivariate (pre)wavelets*, // Constr. Approx. **9** (1993), no. 2 – 3, 123 – 166.
2. Chui C.K., Mhaskar H.N., *On trigonometric wavelets*, // Constr. Approx. **9** (1993), no. 2 – 3, 167 – 190.
3. Chui C.K., Wang J.Z., *A general framework of compactly supported splines and wavelets*, // J. Approx. Th. **71** (1992), 263 – 304.
4. Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
5. Daubechies I., *Orthonormal basis of compactly supported wavelets*, // Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 909 – 996.
6. Dahmen W., Micchelli C.A., *Banded matrices with banded inverses II: Locally finite decomposition of spline spaces*, // Constr. Approx. **9** (1993), no. 2 – 3, 263 – 281.
7. Эдвардс Р., *Ряды Фурье в современном изложении*, М.: Мир, 1985.
8. Kamada M., Toraici K., Mori Riochi, *Periodic splines orthonormal bases*, // J. Approx. Th. **55** (1988), 27 – 34.
9. Meyer Y., *Wavelets and operators*, Cambrige University Press, 1992.
10. Perrier V. and Basdevant C., *La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes, Théorie et algorithmes*, // La Recherche Aerospatiale (1989), no. 3, 53 – 67.
11. Петухов А.П., *О приближении периодических распределений в метрике Хаусдорфа*, //Докл. РАН **327** (1994), 187–190.
12. Петухов А.П., *О приближении обобщенных функций свертками в метрике Хаусдорфа*, //Изв. РАН, сер. Матем. (1995), (в печати).
13. Zheludev V.A., *Periodic splines and wavelets*, Proc. of the Conference "Math. Analysis and Signal processing", Cairo, Jan. 2–9, 1994.
14. Желудев В.А., *Операционное исчисление, связанное со сплайнами*, //Докл. АН СССР **313** (1990), no. 6, 1309 – 1315.
15. Holschneider M., *Wavelets: an analysis tool*, Clarendon Press. Oxford., 1995.
16. Plonka G., Tasche M., *On the computation of periodic spline wavelets*, Appl. and Comp. Harmonic Analysis **2** (1995), 1 – 14.
17. Koh Y.W., Lee S.L., Tan H.H., *Periodic orthogonal splines and wavelets*, Appl. Comp. Harmonic Anal. **2** (1995), 201 – 218.
18. Goh S.S., Lee S.L.,Shen Z., Tang W.S., *Construction of Schauder decomposition on Banach spaces of periodic functions* (1996), Preprint.

С.-Петербургское отделение Математического института им.В.А.Стеклова РАН
E-mail address: petukhov@pdmi.ras.ru