ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ВСПЛЕСКИ[1]

А. П. Петухов

Поступило 17 мая 1995 г.

Abstract. Дано определение и построена теория кратно-масштабного анализа (КМА) функций на дискретной периодической сетке. Рассмотрены два возможных подхода к определению всплеск-пространств, ассоциированных с фиксированным КМА. Приведены эффективные численные алгоритмы всплеск-декомпозиции и реконструкции функций дискретного аргумента.

§0. Введение

Пусть $N = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Мы будем рассматривать пространство N-периодических комплексно-значных функций целочисленного аргумента. Данное пространство мы обозначим через $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Работа посвящена построению теории *кратно-масштабного анализа* (КМА) $\{V^j\}_{j=0}^n$ и разложению по всплескам $V^0 \oplus W^0 \oplus \cdots \oplus W^{n-1}$ пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, а также нахождению экономичных численных алгоритмов декомпозиции и реконструкции функций.

Разложение функций по всплескам нашло многочисленные применения в таких прикладных вопросах, как фильтрация сигналов, обработка изображений и сжатие информации.

Известные из литературы алгоритмы разложения функций по всплескам (см., например, [1, 2–9]) базируются на предположении, что приближаемые функции имеют непрерывный аргумент. Естественно, что и базисные функции при этом оказываются зависящими от непрерывного аргумента. Информация же, используемая при цифровой обработке, имеет дискретный характер, поэтому для ее представления и обработки представляется целесообразным построение теории дискретных базисов всплесков.

При построении КМА пространства N-периодических функций дискретного аргумента появляются специфические проблемы, которые не могли возникнуть при рассмотрении всплесков на $\mathbb{R}$. Перечислим некоторые из них.

Изначально непонятно, как понимать растяжение (например, в 2 раза) аргумента функции, поскольку в этом случае функция оказывается неопределенной в промежуточных точках. Напротив, при сжатии аргумента появятся лишние точки. Порождаются ли базисы всех образующих КМА пространств сдвигами и растяжениями одной функции? Ответ на этот вопрос становится еще более неочевидным, если вспомнить, что мы рассматриваем периодический случай. Следовательно, мы получим $2N$-периодическую функцию, которая еще нуждается в периодизации. Представляется также важным, чтобы каждый КМА однозначно восстанавливался по любому из порождающих его пространств V^j.

Все эти проблемы находят удовлетворительное решение в рамках предлагаемой теории КМА, которая строится в §1.

В то же время, на наш взгляд, существует по крайней мере два возможных подхода к определению пространств всплесков, ассоциированных с фиксированным КМА. Эти определения приводят, вообще говоря, к разным объектам. Первый подход рассматривается нами в §2, где мы определяем пространство всплесков W^j как ортогональное дополнения пространства V^j до пространства V^{j+1}. При всей естественности такого определения оказывается, что этот набор всплеск-пространств не удовлетворяет некоторым естественным с точки зрения всплекс-анализа пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ свойствам.

---

[1]Алгебра и анализ, **8** (1996),N 3, 151 – 183

Например, в результате растяжения аргумента функции пространства W^{j+1} может получиться функция, не принадлежащая пространству W^j. Существуют и другие причины, которые заставили нас рассмотреть в § 4 другой подход к всплескам. Одна из этих причин — существование экономичных алгоритмов, в том числе алгоритмов, поддающихся распараллеливанию.

Пространства V^j, порождающие КМА, и всплеск-пространства W^j (для обоих определений) инвариантны относительно сдвигов аргументов на $N/J = 2^{n-j}$. Поэтому не является неожиданностью, что в этих пространствах важную роль играют ортогональные базисы, состоящие из собственных векторов оператора (N/J)-сдвига. Такие базисы в построении теории и численной реализации алгоритмов КМА были использованы В. А. Желудевым [2] при рассмотрении КМА, порожденного периодическими сплайнами минимального дефекта. Ранее В. А. Желудев ([3]) использовал данные базисы для построения численных алгоритмов сплайн-аппроксимации. Эти базисы оказались весьма полезны как для теоретических исследований свойств КМА, так и для конструирования численных алгоритмов. Фактически оператор перехода к этим базисам играет ту же роль, что и оператор дискретного преобразования Фурье в пространстве $\tilde{\mathbb{C}}^N$, а коэффициенты разложения играют роль спектра. Большинство доказательств результатов из §1 и 2 опирается на переход к данному базису.

В § 3 для ортогональных пространств всплесков рассмотрен экономичный алгоритм всплеск-декомпозиции в случае, когда пространства V^j порождаются базисами, имеющими *локальный* носитель. Мы будем использовать здесь слово локальный, поскольку традиционный для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ термин базис всплесков с компактным носителем в периодическом случае не несет никакой смысловой нагрузки. В § 4 показано, что если между базисами пространств V^j и V^{j+1} имеет место рекуррентное соотношение

$$\varphi^j(\cdot) = \sum_{k=0}^{p} a_k \varphi^{j+1}(\cdot + kN/2J),$$

то алгоритмы декомпозиции и реконструкции функций можно реализовать как дискретные свертки с окном ширины порядка p. Но для этого следует отказаться от взаимной ортогональности пространств W^j. Поскольку дискретизация ортогональных базисов (состоящих из непрерывных функций) КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ ведет, вообще говоря, как к нарушению ортогональности между элементами, так и между самими пространствами W^j, то, на наш взгляд, отсутствие ортогональности между пространствами всплесков не является недостатком конструкции.

§1. Кратно-масштабный анализ пространства дискретных периодических функций

В пространстве $\tilde{\mathbb{C}}^N$ будем рассматривать естественное скалярное произведение

$$(f,g) = (f(\cdot), g(\cdot)) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\bar{g}(j).$$

Для матрицы C (или для вектора) операция $*$ будет означать транспонирование и комплексное сопряжение, т.е. $C^* = \bar{C}^T$. При этом, запись $C = (A(\cdot),\, B(\cdot))$, где A и B — функциональные матрицы или векторы, означает, что сначала выполняется умножение матрицы $A(\cdot)$ на матрицу $B^T(\cdot)$, а затем вычисляется скалярное произведение, т.е. $c_{km} = \sum_l (a_{kl}(\cdot),\, b_{ml}(\cdot))$. Кроме того, нам в дальнейшем будет удобно нумеровать элементы матриц и векторов, начиная с нуля, а не с единицы. Если не оговорено противное, далее будем полагать $N = 2^n$, $J = 2^j$, $L = 2^l$ и т.д.

Мы будем пользоваться векторно-матричной формой записи для операторов свертки и их обобщений. Возникающие при этом матрицы операторов являются либо *циркулярными* размера $K \times K$, когда их элементы могут быть выражены формулой $a_{ij} = f(j-i)$, где $f(\cdot) \in \tilde{\mathbb{C}}^K$, либо прямоугольными размера $K \times 2K$ обобщенно *циркулянтными с двойным сдвигом*, т.е. когда $a_{ij} = f(j-2i)$, $f(\cdot) \in \tilde{\mathbb{C}}^{2K}$, а также транспонированными к ним. Во всех случаях мы будем использовать термин *свертка с окном размера p*, если носитель $f(\cdot)$ (на каком-то периоде) может быть помещен на отрезке длины $p-1$.

Определение 1. Последовательность линейных пространств $\{V^j\}_{j=0}^n$ называется *кратно-масштабным анализом* пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^j \subset \cdots \subset V^n \mathbb{C}^N$, $\dim V^j = 2^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$;

2) а) V^0 состоит из констант;

б) если $f(\cdot) \in V^j$, то $g(\cdot) = f(2\cdot) \in V^{j+1}$;

в) если $f(\cdot) \in V^{j+1}$, то найдется такая функция $g(\cdot) \in V^j$, что $g(2\cdot) = f(\cdot) + f(\cdot + N/2)$;

г) Пространства V^j инвариантны относительно сдвига аргумента на 2^{n-j}, $j = 0, 1, 2 \ldots, n$, т.е. для любой функции f из V^j для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $f(\cdot + k2^{n-j}) \in V^j$.

д) Для любого j, $1 \le j < n$, каждая функция $f \in V^{j+1}$ может быть представлена в виде $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot + k_2(\cdot + k2^{n-j-1}) + f_3(2\cdot)$, где $k \in \mathbb{N}$, f_1, f_2, $f_3 \in V^j$.

Замечание. За исключением условия 2д), все остальные условия определения 1 сходны с уже встречавшимися в литературе по периодическим всплескам с непрерывным аргументом (см., например, [4]). Появление условия 2д) обусловлено тем, что мы хотели, чтобы КМА однозначно восстанавливался по любому из пространств V^j, а остальные условия не могут гарантировать этого свойства. Например, нетрудно показать, что периодический КМА, построенный в [5], не обладает данным свойством.

Пусть $\varphi^l \in V^l$, тогда через $\vec{\varphi}^l$ обозначим вектор-функцию

$$\vec{\varphi}^l(\cdot) = (\varphi^l(\cdot), \varphi^l(\cdot - N/L), \ldots, \varphi^l(\cdot - (L-1)N/L))^T, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 1. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^n$ — произвольный КМА пространства $\tilde{\mathbb{C}}^N$. Тогда для любого фиксированного $l, 0 \le l \le n$, и любой функции φ^l, для которой компоненты вектора $\vec{\varphi}^l$ образуют базис пространства V^l, найдется набор функций $\varphi^j \in V^j$, $0 \le j \le n$, для которых компоненты векторов $\vec{\varphi}^l$ образуют базисы пространств V^j, причем для любых $j_1, j_2, 0 \le j_1 < j_2 \le n$, имеем*

$$\varphi^{j_1}(J_2 m/J_1) = \sum_{k=0} \varphi^{j_2}(m + kNJ_1/J_2). \tag{1.1}$$

функции φ^j при $j < l < n$ определяются по функции φ^l однозначно.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, введем необходимые обозначения и сформулируем и докажем некоторые вспомогательные результаты.

Для фиксированного J полагаем $\omega_J = \exp(2\pi i/J)$, F_J — матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (ее элементы определяются соотношением $F_{lk} = \omega_J^{-lk}$, $l = 0, 1, \ldots, J-1$, $k = 0, 1, \ldots, J-1$). В случае, когда не может возникнуть сомнений в размерности рассматриваемых пространств, индекс J будем опускат. Матрица обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) может быть записана в виде F_J^*/J. Через $e_{J,k}$ мы будем обозначать функции $e_{J,k}(m) = \omega_J^{km}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, J-1$. Как известно, эти функции образуют базис пространства $\tilde{\mathbb{C}}^J$, а их сужения на период $[0, J)$ являются столбцами (и строками) матрицы F_J^*. Функции $e_{N,k}(\cdot)$ мы будем называть *гармониками.* Для произвольной функции $f(\cdot) \in \tilde{\mathbb{C}}^N$ через $\hat{f}(\cdot)$, как обычно, будем обозначать ее спектр (ДПФ)

$$\hat{f}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\omega_N^{-mk}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Лемма 1. *Пусть $h(\cdot) \in \tilde{\mathbb{C}}^N$,*

$$\vec{h}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (h(\cdot), h(\cdot - N/J), \ldots, h(\cdot - (J-1)N/J)^T,$$

и $\vec{\eta}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} F_J^* \vec{h}(\cdot)/J$. Тогда размерность линейной оболочки компонент вектора $\vec{h}(\cdot)$ совпадает с количеством ненулевых компонент вектора $\vec{\eta}(\cdot)$. Отличные от тождественного нуля компоненты вектора $\vec{\eta}(\cdot)$ взаимноортогональны и могут быть вычислены также по формулам

$$\eta_k(\cdot) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N/J-1} \hat{h}(k + Jm) \exp(2\pi i(k + Jm) \cdot /N), \qquad k = 0, 1, \ldots, J-1. \tag{1.2}$$

Доказательство леммы 1. Пусть Γ — матрица Грама элементов вектора $\vec{\eta}(\cdot)$, а G — матрица Грама функций вектора $\vec{\eta}(\cdot)$, тогда

$$\Gamma = (\vec{\eta}(\cdot), \vec{\eta}(\cdot)) = F^* \cdot (\vec{h}(\cdot), \vec{h}(\cdot)) \cdot F/J^2 = F^* \cdot G \cdot F/J^2.$$

Ввиду того что G — циркулянтная матрица, матрица Γ является диагональной. В то же время ввиду невырожденности матрицы F ранг матрицы Γ совпадает с рангом матрицы G, который в свою очередь равен размерности линейной оболочки компонент вектора $\vec{h}(\cdot)$.

Докажем формулу (1.2).

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}_k(l) &= \sum_{p=0}^{N-1}\left(\frac{1}{J}\sum_{m=0}^{J-1} h(p-mN/J)e^{2\pi ikm/J}\right)e^{-2\pi ilp/N}\\
&= \frac{1}{J}\sum_{p=0}^{N-1}\left(\sum_{p=0}^{N-1} h(p-mN/J)e^{-2\pi ilp/N}\right)e^{2\pi ikm/J}\\
&= \frac{1}{J}\sum_{p=0}^{J-1}\left(\sum_{p=0}^{N-1} h(p-mN/J)e^{-2\pi il(p-mN/J)/N}\right)e^{2\pi i(k-l)m/J}\\
&= \hat{h}(l)\frac{1}{J}\sum_{m=0}^{J-1} e^{2\pi i(k-l)m/J} = \begin{cases} \hat{h}(l), & l = k+qJ,\\ 0, & l \neq k+qJ, q \in \mathbb{Z}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Что и требовалось.

Из леммы 1 получим очевидное следствие.

Следствие. *Пусть выполнены условия Леммы* 1, *и* $g(\cdot) \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$. *Тогда линейная оболочка компонент вектора*

$$\vec{g}(\cdot) = (g(\cdot), g(\cdot - N/J), \dots, g(\cdot - (J-1)N/J)^T$$

совпадает с линейной оболочкой компонент вектора $\vec{h}$ *тогда и только тогда, когда* $g(\cdot)$ *является линейной комбинацией ненулевых компонент вектора* $\vec{\eta}(\cdot)$ *с ненулевыми коэффициентами.*

Таким образом, если пространство $V \subset \widetilde{\mathbb{C}}^N$ является линейной оболочкой компонент вектора $\vec{h}(\cdot)$ и $\dim V = J$, то в V существует базис, состоящий из элементов вида (1.2), имеющих непересекающиеся носители спектров и потому взаимно-ортогональных. Кроме того, он удовлетворяет следующему определению.

Определение 2. Совокупность функций $f_0, f_1, \dots, f_{J-1}$ линейного пространства $V \subset \widetilde{\mathbb{C}}^N$ называется базисом Винера пространства V, если для нее справедлив дискретно-периодический аналог теоремы Винера: функции $\{g(\cdot - kN/J\}_{k=0}^{J-1}$ образуют базис пространства V в том и только том случае, когда g представима в виде $g = \sum_{k=0}^{J-1} a_k f_k$, где все a_k отличны от нуля.

Ясно, что этот базис единствен с точностью до умножения его элементов на ненулевые множители и перестановки элементов. В то же время, согласно формуле (1.2), в нем существует естественная нумерация в соответствии с теми компонентами спектра, которые входят в его элементы, т.е. в разложении функций $\eta_k(\cdot)$, $0 \le k < J$, по базису $\{e_{N,l}\}_{l=0}^{N-1}$ отличны от нуля лишь коэффициенты разложения с номерами вида $l = k + Jm$, $m = 0, 1, 2, \dots, N/J - 1$.

Мы получили базис Винера как образ компонент вектора $\vec{h}$ при ОДПФ. Однако базис Винера в соответствии с формулой (1.2) можно вводить как первичное понятие. Существование базиса Винера необходимо и достаточно для существования функции g, чей вектор сдвигов $\vec{g}$ является базисом пространства V.

Базис Винера обладает еще одним полезным характеристическим свойством. Его компоненты являются собственными функциями оператора (N/J)-сдвига. По этой причине коэффициенты разложения функции по базису Винера можно в определенном смысле считать ее спектром. В частности, в пространстве V с базисом Винера справедлива теорема о свертке: *спектр свертки (со сдвигом N/J) функций равен поточечному произведению спектров этих функций.*

Как уже отмечалось во Введении, использовать данный базис для теоретических и вычислительных задач периодической сплайн-аппроксимации и периодического сплайн-КМА предложил В. А. Желудев [2, 3].

Лемма 2. *Для произвольного КМА пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$ в каждом из пространств V^j существует такая функция φ^j, что множество функций $\{\varphi^J(\cdot - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ — базис пространства V^j. По любому из пространств V^j КМА восстанавливается однозначно.*

Доказательство леммы 2. Ввиду леммы 1 для доказательства существования базиса, состоящего из сдвигов, нам достаточно для каждого j показать существование базисов Винера $\{v_k^j\}_{k=0}^{J-1}$. Доказательство проведем по индукции.

При $j = 0$ в качестве v_0^0, очевидно, можно взять единицу. Рассмотрим случай $j = 1$. Пусть $h(\cdot) \equiv 1$, тогда $h \in V^1$. Рассмотрим произвольную ненулевую функцию $g \in V^1$, ортогональную h. Тогда функции h и g образуют базис пространства V^1. Покажем, что они образуют базис Винера. Действительно, ввиду ортогональности h и g имеем $g(m) = \sum_{k=1}^{N-1} a_j \omega_N^{km}$. В то же время, согласно свойствам 2а) и 2в), КМА имеем

$$g(m) + g(m + N/2) = 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} a_{2k}\omega_N^{km} \equiv \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, все a_{2k} $(k \neq 0)$ равны нулю, а среди коэффициентов a_k с нечетными индексами найдется хотя бы один ненулевой. В дальнейшем мы покажем, что все нечетные коэффициенты отличны от нуля. Таким образом, полагаем $v_0^1 = h$, $v_1^1 = g$.

Предположим, мы построили базисы Винера для $j = 0, 1, \dots, p < n$. Покажем, что такое построение возможно для $j = p + 1$.

Рассмотрим произвольную функцию $f_1 \in V^{p+1}$. Если линейная оболочка $\mathcal{E}$ компонент вектор-функции

$$\vec{f}_1(\cdot) = (f_1(\cdot), f_1(\cdot - N/2P), \dots, f_1(\cdot - (2P-1)N/2P))^T$$

имеет размерность $2P$, то его ОДПФ $\vec{\phi}_1 = F_{2P}^* \vec{f}_1/2P$ имеет линейную оболочку размерности $2P$ и, следовательно, является базисом Винера пространства V^{p+1}. Если $\dim \mathcal{E}_1 < 2P$, то возьмем произвольную функцию f_2, не принадлежащую $\mathcal{E}_1$, и рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{E}_2$ компонент вектор-функций $\vec{f}_1$ и

$$\vec{f}_2(\cdot) = (f_2(\cdot), f_2(\cdot - N/2P), \dots, f_2(\cdot - (2P-1)N/2P))^T.$$

Будем дополнять систему $\{f_k\}$ новыми функциями до тех пор пока не получим соответствующую суммарную линейную оболочку, совпадающую с V^{p+1}. Теперь мы можем выбрать базис пространства V^{p+1} из компонент вектор-функций $\{\vec{\varphi}_k\}$, где $\vec{\varphi}_k = F_{2P}^* \vec{f}_k/2P$. Покажем, что данный базис является базисом Винера. Это будет следовать из того, что для каждого $l = 0, 1, \dots, 2P-1$ в данном базисе присутствует ровно один элемент вида

$$\sum_{m=0}^{N/2P-1} a_{l,m} \exp(2\pi i(l + 2mP)\cdot/N).$$

То, что все элементы базиса имеют такой вид, следует из леммы 1. Поскольку, согласно свойству 1), КМА $\dim V^{p+1} = 2^{p+1}$, нам достаточно показать, что для каждого l присутствует хотя бы один элемент такого вида.

Предположим противное. Пусть для некоторого l такого элемента в базисе нет. Если $p = n - 1$, мы войдем в противоречие со свойством 1) КМА, согласно которому $V^n = \widetilde{\mathbb{C}}^N$, поэтому полагаем $p < n - 1$. Покажем, что в этом случае в пространстве V^{p+2} отсутствуют элементы вида $f(\cdot) = \sum_{m=0}^{N/4P-1} a_l^1 \exp(2\pi i(2l+4mP)\cdot/N)$. Нетрудно проверить, что действие оператора $(N/2)$-периодизации

$$A : h(\cdot) \to h(\cdot) + h(\cdot + N/2)$$

заключается в уничтожении нечетных гармоник и удваивании четных. В то же время, на прореженной сетке точек, состоящей из четных m, имеем $e_{N,k}(m) \equiv e_{N,k+N/2}(m)$, и кроме того, функции $\{e_{N,k}\}_{k=0}^{N/2-1}$ образуют базис пространства функций, определенных на этой сетке. Таким образом, функция $g(\cdot)$, удовлетворяющая соотношению $g(2\cdot) = f(\cdot) + f(\cdot + N/2)$, содержит лишь гармоники с номерами вида $l + 2mP$, а именно они по предположению отсутствуют в пространстве V^{p+1}. Следовательно, имеем

$$2a^1_{l,m} = c(a_{l,m} + a_{l,m+N/2}) = 0.$$

Переходя последовательно от пространства с меньшим номером к пространству с большим номером, получим, что в пространстве V^n отсутствует функция $\exp(2\pi i 2^{n-p-1} l\cdot/N)$. Что противоречит условию 1) КМА. Таким образом, существование базиса Винера во всех пространствах V^p доказано.

Покажем по индукции, что для любого $p \geq 1$ базис Винера пространства V^{p+1} может быть выражен через элементы базиса Винера пространства V^p по формулам

$$\hat{v}^{p+1}_k(k + 2Pl) = \hat{v}^p_k(k + 2Pl), \quad k = 1, 3, \ldots, 2P - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, N/2P - 1. \tag{1.3}$$

$$\hat{v}^{p+1}_k(k+2Pl) = \hat{v}^p_{k/2}(k/2+Pl) + \hat{v}^p_{k/2}(k/2+Pl+N/2), \quad k = 0, 2, \ldots, 2P-2, \quad l = 0, 1, \ldots, N/2P-1, \tag{1.4}$$

где $P = 2^p$ и $v^p_{k+P} \equiv v^p_k$ для любого k. Нетрудно заметить, что, за исключением случая $k = P$, при всех четных k эти формулы дают одинаковые результаты. Кроме того, очевидно, формула (1.4) может быть записана в виде

$$v^{p+1}_k(\cdot) = v^p_{k/2}(2\cdot), \quad k = 0, 2, \ldots, 2P - 2. \tag{1.4$'$}$$

Пусть $j = 1$. Ввиду того, что $V^1 \subset V^2$, в случае фиксированного нечетного k (т.е. $k = 1, 3$) и при условии, что хотя бы одно из чисел $\{\hat{v}^1_k(k+4l)\}_{l=0}^{N/4-1}$ отлично от нуля, с точностью до перенормировки имеем (1.3). Покажем, что эти числа, действительно, не могут одновременно обращаться в нуль. Пусть f — k-й элемент базиса Винера пространства V^2. Тогда, согласно свойству д) КМА функция f может быть представлена в виде

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot + m2^{n-2}) + f_3(2\cdot), \tag{1.5}$$

где f_1, f_2, $f_3 \in V^1$. В случае равенства всех чисел $\hat{v}^1_k(k+4l)$ нулю первые два слагаемых в (1.5) не могут содержать соответствующих этим числам гармоник, а третье слагаемое в (1.5) содержит лишь четные гармоники. Следовательно, $f(\cdot) \equiv 0$. Что невозможно, поскольку мы уже доказали существование базиса Винера во всех пространствах V^p.

Справедливость (1.4) при $k = 0$ вытекает непосредственно из условия 2б), а для $k = 2$ формула (1.4) является прямым следствием условий 2б) и 2д) КМА. Действительно, если функция

$$v^1_1(2\cdot) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/4-1} \left(\hat{v}^1_1(2k+1) + \hat{v}^1_1(2k+1+N/2)\right) e^{2\pi i(4k+2)\cdot/N}$$

не является тождественным нулем, то справедливость (1.4) следует из условия 2б). Рассмотрим случай ее равенства нулю. Согласно лемме 1, в функции v^2_2 имеются лишь гармоники с номерами вида $4k + 2$. Построим разложение функции v^2_2 в сумму трех функций в соответствии с пунктом 2д) определения КМА. Тогда нужные нам гармоники отсутствуют в первых двух слагаемых, поскольку их нет в пространстве V^1 (так как $v^1_0 \equiv 1$). А отсутствие их в третьем слагаемом следует из того, $v^1_1(2\cdot) \equiv 0$. Следовательно, $v^2_2 \equiv 0$, что противоречит существованию базиса Винера в пространстве V^2.

Предположим, мы уже показали справедливость формул (1.3) и (1.4) для пространств V^j при $j < p$. Проведем общий шаг индукции при произвольном p.

Поскольку $V^p \subset V^{p+1}$, в случае нечетного k и при условии, что хотя бы одно из чисел $\hat{v}^p_k(k + 2Pl)$ отлично от нуля, с точностью до перенормировки имеем (1.3). Невозможность же обращения всех этих чисел в нуль доказывается совершенно аналогично случаю $p = 1$.

Формула (1.4) при $k = 0$ и $k = P$ доказывается аналогично случаю четных k при $p = 1$. Возьмем случай произвольного четного $k = 2m$, отличного от 0 и p. Если хотя бы одно из чисел

$$\{\hat{v}^p_{k/2}(k/2 + Pl) + \hat{v}^p_{k/2}(k/2 + Pl + N/2)\}_{l=0}^{N/2P-1}$$

не равно нулю, справедливость формулы (1.4) следует из свойства 2б). Покажем невозможность их одновременного обращения в нуль. Действительно, воспользовавшись формулами (1.3) и (1.4) с параметрами, при которых их справедливость уже доказана, получим

$$\hat{v}^p_k(k + 2Pl) = \hat{v}^{p-1}_{k/2}(k/2 + Pl) + \hat{v}^{p-1}_{k/2}(k/2 + Pl + N/2)$$
$$\hat{v}^p_{k/2}(k/2 + Pl) + \hat{v}^p_{k/2}(k/2 + Pl + N/2) = 0.$$

Значит, в пространстве V^p отсутствуют гармоники, составляющие функцию v^{p+1}_k. Следовательно, мы пришли к противоречию с пунктом 2д) определения КМА.

Таким образом, мы показали существование в каждом из пространств V^j такой функции φ^j, что компоненты вектора $\vec{\varphi}^j$ являются базисом, и однозначность восстановления пространств с большим индексом j через пространства с меньшим индексом.

Покажем, что по пространству V^{j+1} однозначно восстанавливается пространство V^j. Предварительно заметим, что, согласно формуле (1.3), в пространстве V^j (и в соответствующих элементах базиса Винера) отсутствуют лишь гармоники с номерами $J, 2J, \ldots, N - J$. Это является следствием формулы (1.3), поскольку из нее видно, что пробел, появившийся в спектре пространства с меньшим номером, перейдет во все пространства с большим номером, что противоречит условию $V^n = \widetilde{\mathbb{C}}^N$.

Пусть $1 < j + 1 < n$, $1 \le k \le J - 1$. Поскольку $V \subset V^{j+1}$ и ввиду уже доказанного существования базиса Винера во всех пространствах V^j, найдутся такие числа α и β, что

$$v^j_k = \alpha v^{j+1}_k + \beta v^{j+1}_{k+J},$$

или ввиду (1.2) для четных m имеем $\hat{v}^j_k(k + mJ) = \alpha\hat{v}^{j+1}_k(k + mJ)$, а для нечетных m — $\hat{v}^j_k(k + mJ) = \beta\hat{v}^{j+1}_{k+J}(k + mJ)$. Как уже отмечалось, величины $\hat{v}^j_k(k + mJ)$ отличны от нуля. Значит, отличны от нуля числа α и β. В то же время, согласно свойству 2б), $v^j_k(2\cdot) = \gamma v^{j+1}_{2k}(\cdot)$. Следовательно, при четном m получим

$$\alpha(\hat{v}^{j+1}_k(k + mJ) + \hat{v}^{j+1}_k(k + mJ + N/2)) \qquad = \hat{v}^j_k(k + mJ) + \hat{v}^j_k(mJ + N/2) \qquad = \gamma\hat{v}^{j+1}_{2k}(2k + 2mJ).$$

Таким образом,

$$\alpha = \gamma\hat{v}^{j+1}_{2k}(2k + 2mJ)/(\hat{v}^{j+1}_k(k + mJ) \quad + \hat{v}^{j+1}_k(k + mJ + N/2)), \tag{1.6}$$

где m — произвольное четное. Делитель в формуле (1.6) отличен от нуля, поскольку в противном случае согласно формуле (1.4) в спектре элементов пространства V^{j+1} отсутствует гармоника с номером $2k + 2mJ$.

Аналогичным образом получим, что коэффициент β также может быть вычислен по формуле (1.6), но при нечетных m.

Следовательно, α и β определяются однозначно с точностью до общего ненулевого множителя γ, который не влияет на определение пространства V^j. Лемма 2 доказана.

Пусть функции φ и ϕ таковы, что наборы функций $\{\varphi(\cdot - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ и $\{\phi(\cdot - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ являются биортогональными базисами пространства V^j (т.е. $(\vec{\varphi}, \vec{\phi})$ — единичная матрица), тогда функции φ и ϕ называются *двойственными*. Следующее утверждение для случая сплайн-КМА было получено В. А. Желудевым [2].

Лемма 3. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^n$ произвольный КМА. В каждом из пространств V^j базис Винера $\{v_k^j\}_{k=0}^{J-1}$ выбран исходя из нормирующего условия*

$$\sum_{m=0}^{N/J-1} |\hat{v}_k^j(k+mJ)|^2 = 1.$$

Тогда для того чтобы функции φ, $\phi \in V^j$ были двойственными, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложений

$$\varphi(\cdot) = \sum_{k=0}^{J-1} \alpha_k v_k^j(\cdot), \quad \phi(\cdot) = \sum_{k=0}^{J-1} \beta_k v_k^j(\cdot)$$

удовлетворяли равенствам $\alpha_0\bar{\beta}_0 = \alpha_1\bar{\beta}_1 = \cdots = \alpha_{J-1}\bar{\beta}_{J-1} = 1/J$. В частности, φ порождает ортогональный базис тогда и только тогда, когда $|\alpha_0| = |\alpha_1| = \cdots = |\alpha_{J-1}| \neq 0$.

Замечание. Очевидно, если к условию нормировки базиса Винера из леммы 3 добавить условие $\hat{v}_k^j(k) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, J-1$, то выбор базиса Винера становится однозначным.

Доказательство леммы 3. Ввиду формулы (1.2) получим $v_k^j(\cdot - mN/J) = \omega_J^{-km} v_k^j(\cdot)$, $k = 0, 1, \ldots, J-1$. Отсюда, в частности, следует, что $(v_{k_1}^j(\cdot - m_1 N/J),\ v_{k_2}^j(\cdot - m_2(N/J)) = \delta_{k_1 k_2}\omega_J^{k_1(m_2-m_1)}$, где

$$\delta_{k_1 k_2} = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2 \\ 0, & k_1 \neq k_{2_{J-1}}. \end{cases}$$

Таким образом, $(\varphi(\cdot - m_1 N/J),\ \phi(\cdot - m_2 N/J)) = \sum\limits_{k=0}^{J-1} \alpha_k \bar{\beta}_k \omega_J$. То же выражение в матрично-векторной форме может быть записано в виде

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{\varphi}(\cdot), (\vec{\phi}(\cdot))^T) = F_J^* \Lambda F_J,$$

где Λ — диагональная матрица с элементами $\lambda_i = \alpha_i \bar{\beta}_i$ на диагонали. Для того, чтобы матрица Φ была единичной, необходимои достаточно выполнение равенства $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{J-1} = 1/J$. Что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть $\{V^j\}_{j=0}^n$ произвольный КМА. Тогда для любого j интерполяционная задача на прореженной сетке $x_k = kN/J$ однозначно разрешима в пространстве V^j, т.е. для любого набора чисел $\{\alpha_k\}_{k=0}^{J-1}$ существует единственная функция $\lambda \in V^j$ такая, что $\lambda(x_k) = \alpha_k$.*

Доказательство леммы 4. Как известно, интерполяционная задача однозначно разрешима на указанной сетке на линейной оболочке системы функций $\{e_{N,l}\}_{l=0}^{J-1}$. Для нахождения коэффициентов разложения по данному базису нужно вычислить ДПФ последовательности α_k и результат разделить на J. Пусть полученные коэффициенты разложения равны $\{b_k\}$. Рассмотрим l-й элемент базиса Винера пространства V^j. Значения его гармоник на сетке $\{x_k\}$ совпадают со значениями функции $e_{N,l}$. Таким образом,

$$v_l^j(x_k) = \exp(2\pi i l x_k/N) \sum_{q=0}^{N/J-1} \hat{v}_l^j(l+qJ)/N = \exp(2\pi i l x_k/N) c_l.$$

Следовательно, коэффициенты разложения по базису Винера искомой интерполяционной функции равны $\{b_l/c_l\}$. Остается доказать, что все c_l отличны от нуля. Это, действительно, так, поскольку в противном случае, применив $n-j$ раз формулу (1.4), нетрудно получить, что в пространстве V^n отсутствует гармоника с номером Nl/J. А это противоречит пункту 1) определения КМА. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть l произвольное целое число, $0 \leq l \leq n$, функция $\varphi^l \in V^l$ такова, что элементы вектора $\vec{\varphi}^l$ образуют базис пространства V^l. Существование такой функции следует из леммы 2. Пусть $\{v_k^j\}_{k=0}^{J-1}$, $j = 0, 1, \dots, n$, — базисы Винера пространств V^j. Будем считать, что они между собою связаны формулами (1.3) и (1.4). Согласно следствию леммы 1, получим, что

$$\varphi^l(m) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k v_k^l(m); \quad \alpha_k \neq 0, \ \ k = 0, 1, \dots, L-1.$$

Покажем возможность построения функций φ^{l+1} и φ^{l-1}, для которых компоненты векторов $\vec{\varphi}^{l+1}$ и $\vec{\varphi}^{l-1}$ являются базисами соответственно в пространствах V^{l+1} и V^{l-1}. В качестве φ^{l-1} возьмем функцию, удовлетворяющую равенству $\varphi^{l-1}(2\cdot) = \varphi^l(\cdot) + \varphi^l(\cdot + N/2)$. Согласно свойству 2в), КМА такая функция существует, а по лемме 4 она определяется однозначно. Для этой функции справедливо разложение

$$\varphi^{l-1}(\cdot) = \sum_{k=0}^{L/2-1} \beta_k v_k^{l-1}(\cdot). \tag{1.7}$$

Нам нужно показать, что все коэффициенты β_k отличны от нуля. Ввиду того что оператор $(N/2)$-периодизации уничтожает нечетные гармоники и удваивает коэффициенты при четных, получим

$$\varphi^l(\cdot) + \varphi^l(\cdot + N/2) = 2 \sum_{k=0}^{L/2-1} \alpha_{2k} v_{2k}^l(\cdot).$$

Отсюда и из (1.7), учитывая (1.4$'$), получим $\beta_k = 2\alpha_{2k} \neq 0$, что, согласно следствию леммы 1, влечет базисность компонент вектора $\vec{\varphi}^{l-1}$ в пространстве V^{l-1}.

Покажем возможность выбора φ^j при $j > l$. Пусть $j = l + 1$. Представим функцию φ^{l+1} в виде

$$\varphi^{l+1}(m) = \sum_{k=0}^{2L-1} \gamma_k v_k^{l+1}(m).$$

Найдем коэффициенты разложения. Очевидно, для нечетных k коэффициенты могут быть выбраны произвольным образом с одним лишь требованием $\gamma_k \neq 0$, необходимым для линейной независимости компонент вектора $\vec{\varphi}^{l+1}$. А для четных коэффициентов, как и в случае уже выполненного нами перехода от φ^l к φ^{l-1}, имеем $\gamma_{2k} = \alpha_k/2$.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 5. *Пусть последовательность функций $\{\varphi^j\}_{j=1}^n$ такова, что справедливы равенства* (1.1), *и компоненты векторов $\vec{\varphi}^j$ образуют базисы пространств V^j. Тогда найдутся такие, не зависящие от j числа $\{\alpha_k\}_{k=0}^{N-1}$, что для любого j, $0 < j \le N$, имеем*

$$\varphi^{j-1}(\cdot) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi^j(\cdot - kN/J). \tag{1.8}$$

Замечание. Ввиду N-периодичности функций φ^j последнее равенство может быть записано в виде

$$\varphi^{j-1}(\cdot) = \sum_{k=0}^{J-1} \left(\sum_{m=0}^{N/J-1} \alpha_{k+mJ} \right) \varphi^j(\cdot - kN/J).$$

Доказательство леммы 5. Введем в рассмотрение функции $\{\phi_1^j\}_{j=1}^n$, $\{\phi_2^j\}_{j=0}^{n-1}$, определенные соответственно лишь на множествах вида mN/J и $mN/2J$, $m \in \mathbb{Z}$ соотношением

$$\phi_1^j(\cdot N/J) = \varphi^n(\cdot), \quad \phi_2^{j-1}(\cdot N/J) = \varphi^{n-1}(\cdot).$$

Доказательство (1.8) проведем по индукции.

Пусть $j = n$, тогда существование последовательности α_k является следствием свойства 1) КМА.

Предположим, соотношение (1.8) доказано для $j = n, n-1, \dots, l+1$. Покажем его выполнение для $j = l$.

Очевидно,

$$\phi_2^{l-1}(\cdot N/L) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \phi_1^l(\cdot N/L - kN/L). \tag{1.9}$$

Периодизируем левую и правую части последнего равенства так, чтобы они стали N-периодическими функциями. Для левой части, согласно (1.1), получим

$$\sum_{k=0}^{N/L-1} \phi_2^{l-1}(\cdot N/L + kN) = \sum_{k=0}^{N/L-1} \varphi^{n-1}(\cdot kL) = \varphi^{l-1}(\cdot N/L).$$

Периодизируем теперь правую часть (1.9):

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{N/L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \phi_1^l(\cdot N/L - kN/L + mN) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \sum_{m=0}^{N/L-1} \phi_1^l(\cdot N/L - kN/L + mN) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \sum_{m=0}^{N/L-1} \varphi^n(\cdot - k + mL) \\
&\quad = \sum_{=0}^{N-1} \alpha_k \varphi^l(\cdot N/L - kN/L).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали справедливость утверждения леммы 5 на сетке mN/L, $m = 0, 1, \dots, L/2-1$. Значит, поскольку, согласно лемме 4, интерполяционная задача в пространстве V^l однозначно разрешима на данной сетке, мы получим выполнение равенства (1.8) во всех точках.

Из леммы 5, в частности, следует, что любой КМА пространства $\mathbb{C}^N$ не только однозначно определяется функцией φ^n и последовательностью $\{\alpha_k\}$, определяющей переход от базиса $\vec{\varphi}^n$ к базису $\vec{\varphi}^{-1}$, но и может быть восстановлен по простой и однородной для всех j формуле (1.8).

Таким образом, для дискретного периодического случая имеет место теория КМА, сходная во многом с КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$. В частности, любой КМА порождается сдвигами и растяжениями одной функции.

Покажем теперь, как может быть построен произвольный КМА пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$. Согласно лемме 2, КМА может быть восстановлен по любому из пространств V^j. В частности, он может быть восстановлен по пространству V^1, которое в свою очередь определяется своим базисом Винера. Как было показано в доказательстве леммы 2, базис Винера пространства V^1 состоит из функции $v_0^1(\cdot) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ и функции $v_1^1(\cdot)$, в спектре которой присутствуют лишь нечетные гармоники. Различный, с точностью до общего коэффициента пропорциональности, выбор коэффициентов $\hat{v}_1^1(2k+1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \alpha_k$, $0 \le k < N/2$, при этих гармониках дает различные КМА. Нам остается только определить допустимые наборы коэффициентов.

Как уже отмечалось, в случае равенства нулю хотя бы одного из чисел $\hat{v}_k^j(k+mJ)$, $0 \le m < N/J$, $1 \le k < j$, $1 \le j \le n$, соответствующая гармоника отсутствует в пространстве V^n, что противоречит свойству 1) КМА. Таким образом, необходимо, чтобы были отличны от нуля все числа вида

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} \alpha_{m+kN/2^{p+1}}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Нетрудно показать, что эти условия являются также и достаточными.

Очевидно, все допустимые последовательности $\{\alpha_m\}_{m=0}^{N/2-1}$ можно построить следующим образом. Выберем по индукции последовательность векторов $\vec{b}^j \in \mathbb{C}^J$, $j = 0, \dots, n-1$.

Пусть $\vec{b}^0 = 1$. Предположим, что мы выбрали векторы $\{\vec{b}^k\}_{k=0}^m$, тогда в качестве $\vec{b}^{m+1}$ возьмем произвольный вектор с отличными от нуля компонентами, удовлетворяющий условию $b_l^{m+1} + b_{l+2^m}^{m+1} = b_l^m$ для всех $l = 0, 1, \dots, 2^m - 1$.

Вектор $\vec{b}^{n-1}$, очевидно, является допустимым, т.е. можем взять $\alpha_k = b_k^{n-1}$, $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Согласно теореме 1, в любом КМА можно выбрать базисы пространств V^j, состоящие из растяжений, периодизаций и сдвигов одной функции, однако, вообще говоря, эти базисы не ортогональны. Согласно лемме 3, при каждом j возможна их ортогонализация, но при этом неясно, порождаются ли новые базисы растяжениями, периодизацией и сдвигами одной для всех j функцией. Оказывается, далеко не все КМА обладают указанным свойством. Перейдем к описанию таких КМА.

Будем говорить, что два комплексных числа ортогональны, если ортогональны векторы, изображающие их на комплексной плоскости. Частоты k и $k + N/2$ для любого k будем называть симметричными точками спектра.

Пусть функция φ^n порождает ортогональный базис пространства V^n, и $v_k^n(m) = \exp(2\pi ikm/N)$. Тогда, согласно лемме 3, все гармоники функции φ^n имеют одинаковую амплитуду, т.е.

$$\varphi^n(m) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^n \exp(2\pi ikm/N), \quad |\alpha_0| = |\alpha_1| = \dots = |\alpha_{N-1}|.$$

Без ограничения общности можем считать, что эта амплитуда равна единице. Будем также считать, что базисы Винера в пространствах V^j удовлетворяют соотношениям (1.3) и (1.4).

Согласно лемме 4, существует единственная функция $\varphi^{n-1} \in V^{n-1}$, удовлетворяющая соотношению

$$\varphi^{n-1}(2m)\varphi^n(m) + \varphi^n(m + N/2) = \sum_{k=0}^{n/2-1} 2\alpha_{2k}^n = \exp(2\pi i2km/N). \tag{1.10}$$

В то же время функция φ^{n-1} может быть представлена в виде линейной комбинации

$$\varphi^{n-1}(m) = \sum_{k=0}^{N/2-1} \alpha_k^{n-1} v_k^{n-1}(m) \tag{1.11}$$

функций базиса Винера пространства V^{n-1}, причем $\alpha_k^{n-1} = 2\alpha_{2k}^n$. Поскольку коэффициенты разложения (1.11) равны по абсолютной величине для ортогональности компонент вектора $\vec{\varphi}^{n-1}$, необходимо и достаточно равенство норм функций базиса Винера

$$v_k^{n-1}(m) = b_k \exp(2\pi ikm/N) + b_{k+N/2} \exp(2\pi i(k + N/2)m/N),$$

т.е.

$$|b_{N-1}|^2 + |b_{N/2}|^2 = |b_1|^2 + |b_{1+N/2}|^2 = \dots = |b_{N/2-1}|^2 + |b_{N-1}|^2 \stackrel{\text{def}}{=} c.$$

Поскольку $b_{N/2} = 0$, то, согласно формуле (1.4), имеем $b_0 = 1$, значит, $c = 1$. С другой стороны, согласно формуле (1.4),

$$b_1 + b_{1+N/2} = b_2 + b_{2+N/2} = \dots = b_{N/2-1} + b_{N-1} = 1.$$

Очевидно, для одновременного выполнения нужных нам условий необходимо и достаточно, чтобы числа b_k и $b_{k+N/2}$, $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ были ортогональны. Причем все эти числа должны быть отличны от нуля.

Любое число k, $1 \le k \le N/2-1$, можно однозначно представить в виде $k=(2m+1)2^p$, $0\le m < N/4P$, $0 \le p < n-1$. В соответствии с этим представлением, согласно формулам (1.3) и (1.4), нетрудно получить, что

$$Nb_k = \hat{v}_k^{n-1} \quad = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{v}_1^1(1+2m+lN/P),$$
$$Nb_{k+N/2} = \hat{v}_{k+N/2}^{n-1} = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{v}_1^1(1+2m+lN/P+N2P).$$

Ясно, что удовлетворяющая последним условиям функция v_1^1 является искомой в решении нашей задачи. Рассмотрим алгоритм, при помощи которого могут быть получены все функции, удовлетворяющие указанным свойствам.

Воспользуемся схемой, которая уже использовалась при построении базиса Винера произвольного КМА.

Выберем по индукции последовательность векторов $\vec{b}^j \in \widetilde{\mathbb{C}^J}$, $j=0,\dots,n-1$.

Пусть $\vec{b}=1$. Предположим, что мы выбрали векторы $\{\vec{b}^k\}_{k=0}^m$, тогда в качестве $\vec{b}^{m+1}$ возьмем произвольный вектор с отличными от нуля компонентами, удовлетворяющий условию $b_l^{m+1}+b_{l+2^m}^{m+1} = b_l^m$, и такой, что слагаемые в последней сумме ортогональны, $l=0,1,\dots,2^m-1$.

Вектор $\vec{b}^{n-1}$, очевидно, является допустимым, т.е. можем взять

$$\hat{v}_1^1(1+2k) = b_k^{n-1}, \quad k=0,1,\dots,N/2-1.$$

Заметим, что, предполагая выполнение равенств (1.3) и (1.4), для $j=1,2,\dots,n-1$ получим

$$\hat{v}_{J/2}^j(J/2+kJ) = b_k^{n-j}, \quad k=0,1,\dots,N/J-1.$$

§2. Ортогональные пространства дискретных периодических всплесков

Пусть $\{V^j\}_{j=0}^n$ произвольный КМА пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$. Здесь и в §3 пространством всплесков W^j будем называть ортогональное дополнение пространства V^j до пространства V^{j+1}. Таким образом, пространство $\widetilde{\mathbb{C}}^N$ можно представить в виде прямой суммы

$$\widetilde{\mathbb{C}}^N = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus \cdots \oplus W^{n-1}, \tag{2.1}$$

которая в нашем случае является еще и ортогональной.

Для того чтобы показать, что в каждом из пространств всплесков найдется функция, чьи соответствующие сдвиги образуют базис, покажем существование в каждом из пространств базисов W^j базисов Винера. Поскольку для каждого $k=1,2,\dots,2^j-1$ для некоторых α и β справедливо представление

$$v_k^j = \alpha v_k^{j+1} + \beta v_{k+J}^{j+1}, \tag{2.2}$$

то в качестве элементов базиса Винера можно взять функции

$$w_k^j = \bar{\beta} v_k^{j+1} \|v_{k+J}^{j+1}\|^2 - \bar{\alpha} v_{k+J}^{j+1} \|v_k^{j+1}\|^2$$

и функцию $w_J^j = v_J^{j+1}$. В дальнейшем будем предполагать, что элементы базисов Винера в пространствах V^j имеют единичную норму, тогда последняя формула записывается в виде

$$w_k^j = \bar{\beta} v_k^{j+1} - \bar{\alpha} v_{k+J}^{j+1}. \tag{2.3}$$

При этом, согласно (2.2), $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, т.е. получим ортонормированность элементов базиса Винера пространств W^j. Взаимная ортогональность функций w_k^j и их ортогональность пространству V^j очевидны. Заметим, что нумерацию этих функций мы начинаем не с нуля, а с единицы, поскольку при естественной нумерации элементов базиса Винера оказывается, что гармоника с номером, равным нижнему индексу, присутствует в спектре функции. Нулевая же гармоника присутствует лишь в пространстве V^0. Впрочем, это несущественно, поскольку в дальнейшем естественно считать, что $w^j_{k+J} \equiv w^j_k$.

Рассмотрим алгоритм разложения произвольной функции f из $\widetilde{\mathbb{C}}^N$ по базису, состоящему из объединения базисов Винера пространств W^j. Иными словами, найдем алгоритм вычисления коэффициентов в формуле

$$f(\cdot) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{J} p^j_k w^j_k(\cdot) + q^0_0.$$

Как обычно, мы последовательно найдем представления функции f в виде

$$f(\cdot) = \sum_{k=0}^{2^m-1} q^m_k v^m_k(\cdot) + \sum_{j=m}^{n-1} \sum_{k=1}^{J} p^j_k w^j_k(\cdot)$$

при $m = n,\, n-1, \ldots, 1, 0$.

Ясно, что коэффициенты q^n_k (случай $m = n$) с точностью до множителя $1/\sqrt{N}$ вычисляются при помощи ДПФ функции f.

После того как вычислены величины q^{j+1}_k, коэффициенты q^j_k и p^j_k, согласно (2.2) и (2.3), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} q^j_0 &= q^{j+1}_0, \quad q^j_k = \alpha q^{j+1}_k + \beta q^{j+1}_{k+J},\ k = 1, \ldots, J-1, \\ p^j_J &= q^{j+1}_J, \quad p^j_k = \beta q^{j+1}_k - \bar{\alpha} q^{j+1}_{k+J},\ k = 1, \ldots, J-1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где α и β взяты из (2.2) и, следовательно, различны для разных k и j.

Очевидно, из (2.2) и (2.3) получаются также формулы реконструкции функции f, которые могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} q^{j+1}_0 &= q^j_0, \quad q^{j+1}_k = \bar{\alpha} q^j_k + \beta p^j_k,\ k = 1, \ldots, J-1, \\ q^{j+1}_J &= p^j_J, \quad q^{j+1}_{k+J} = \bar{\beta} q^j_k - \alpha p^j_k,\ k = 1, \ldots, J-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

После реализации которых для восстановления функции f нужно вычислить ОДПФ вектора $\vec{q}^{\,n}$ и результат умножить на $\sqrt{N}$. Таким образом, алгоритмы разложения функции по базисам Винера и ее восстановления имеют сложность порядка $O(N \log N)$.

Рассмотрим теперь базисы в пространстве всплесков, состоящие из сдвигов одной функции, которые обычно являются исходными при введении пространств всплесков.

Мы уже знаем, что любой такой базис в пространстве W^j может быть построен как линейная комбинация элементов базиса Винера с ненулевыми коэффициентами. Однако существует другой подход, при котором нет необходимости знать базисы Винера.

Пусть две функции φ^j и φ^{j+1} таковы, что наборы сдвигов $\{\varphi^j(\cdot - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ и $\{\varphi^{j+1}(\cdot - kN/2J)\}_{k=0}^{2J-1}$ являются базисами соответственно пространств V^j и V^{j+1};

$$\lambda_k \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi^j(\cdot), \varphi^{j+1}(\cdot - kN/2J)).$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\phi^j(m + N/2J) = \sum_{n=0}^{2J-1} (-1)^n \bar{\lambda}_n \varphi^{j+1}(m + nN/2J). \tag{2.6}$$

Тогда система функций $\{\phi^j(m - kN/J)\}_{k=0}^{J-1}$ (в дальнейшем вектор с данными компонентами будем обозначать через $\vec{\phi}^j(\cdot)$) образуют базис пространства W^j.

Замечание. Формула (2.6) по внешнему виду совпадает с хорошо известной для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ формулой разложения функции ϕ^j по базису, состоящему из компонент вектора $\vec{\varphi}^{j+1}$, при условии, что эти компоненты образуют ортонормированный базис. Фактически, формула (2.6) уточняет смысл коэффициентов. В каком-то смысле формулу (2.6) можно считать известной для теории всплесков пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Во всяком случае, ее аналог нетрудно получить из формулы (5.4) работы [6].

Доказательство теоремы 2. Покажем принадлежность сдвигов функции ϕ^j к пространству W^j. Очевидно, для этого нам достаточно показать их ортогональность функции φ^j. Действительно, для любого k имеем

$$\begin{aligned}
&(\varphi^j(\cdot), \phi(\cdot - kN/)) \\
&\quad= \sum_{n=0}^{2J-1} (-1)^n \lambda_n (\varphi^j(\cdot), \phi(\cdot - (2k+1-n)N/2J)) \\
&\quad= \sum_{n=0}^{2J-1} (-1)^n \lambda_n \lambda_{2k+1-n} = \sum_{n=0}^{J-1} \lambda_{2n}\lambda_{2k+1-2n} - \sum_{n=0}^{J-1} \lambda_{2n+1}\lambda_{2k-2n} \\
&\quad= \sum_{n=0}^{J-1} \lambda_{2n}\lambda_{2k+1-2n} - \sum_{m=0}^{J-1} \lambda_{2k+1-2m}\lambda_{2m} \\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Покажем линейную независимость компонент вектора $\vec{\varphi}^j(x)$. Сначала рассмотрим вспомогательную матрицу $\Phi^j = (\vec{\varphi}^j, \vec{\varphi}^{j+1})$. Ее первой строкой является вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2J-1})$. А каждая последующая строка получается из предыдущей циклическим сдвигом на две позиции. Ввиду того что компоненты вектора φ^j образуют базис в пространстве V^j, которое является подпространством V^{j+1}, получим, что ранг матрицы Φ^j равен J. В то же время, согласно (2.6), матрица $\Psi^j = (\vec{\phi}^j, \vec{\varphi}^{j+1})$ является произведением двух матриц. Первая из них (обозначим ее θ^j) имеет порядок $(J \times 2J)$ и отличается от матрицы Φ^j сопряжением элементов и изменением знака в четных столбцах. Вторая — с точностью до невырожденных преобразований совпадает с матрицей Грама компонент вектора $\vec{\varphi}^{j+1}$, которая, естественно, невырождена, ввиду того что компоненты $\vec{\varphi}^{j+1}$ образуют базис пространства V^{j+1}. Следовательно, ранг произведения определяется рангом матрицы θ^j. Который, очевидно, совпадает с рангом матрицы Φ^j и потому равен J.

Базисы пространств W^j, порожденные сдвигами одной функции, мы будем называть *базисами всплесков*.

Рассмотрим алгоритмы разложения произвольной функции $f \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$ по базисам $\vec{\varphi}^j$ и ее реконструкции.

Переход от координат в базисе всплесков к координатам в базисе Винера и обратно осуществляется соответственно при помощи прямого и обратного ДПФ и, быть может, покоординатного умножения в частотной области. Этот очевидный факт следует из того, что для любой функции $f \in W^j$ имеем

$$f = \vec{\varphi}^{jT}\vec{\alpha} = \frac{1}{J}\vec{\varphi}^{jT}F_J^*F_J\vec{\alpha} = \vec{w}^{jT}F_JF_J^*\vec{b}/J,$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{b}$ — векторы координат функции f соответственно в базисах $\vec{\varphi}$ и $\vec{w}^j$. Поскольку компоненты базиса Винера определяются однозначно с точностью до ненулевых множителей, то покоординатное умножение в частотной области может появиться, если мы выбрали базис Винера, отличный от $\bar{w}^j$. Естественно, аналогичные формулы справедливы для пространств V^j и базисов $\vec{\varphi}^j$ и $\vec{v}^j$.

Таким образом, алгоритмы разложения функций пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$ по базисам всплесков $\vec{\varphi}^j$ и их реконструкции, использующие переход к базисам Винера, имеют сложность порядка $O(N \log N)$ независимо от того, каким было исходное представление функции — в ее естественном виде $f(\cdot)$, в виде спектра или в виде ее разложения по некоторому базису $\vec{\varphi}^n$.

§3. Всплески с локальным носителем

Альтернативой с точки зрения экономичности алгоритмам декомпозиции и реконструкции, использующим переход в частотную область, могут служить алгоритмы для всплесков с локальным носителем. Мы будем использовать термин "локальный носитель" (размера p, считая, что он соответствует случаю, когда найдется такая функция φ^n, порождающая базис пространства V^n, что функции, определенные рекуррентно по формулам (1.8), имеют носитель, принадлежащий отрезку $[0, pN/J]$, где $p << N$. Из формулы (2.6), в частности, следует, что базис всплесков $\vec{\varphi}^j$ в пространствах W^j можно выбрать таким образом, что функции ϕ^j также имеют локальный носитель. Одним из источников периодических всплесков с локальным носителем являются периодизации непериодических КМА, базисы которых имеют компактный носитель.

Напомним, что сплайном p-го порядка минимального дефекта с узлами в целочисленных точках называется $p = 1$ раз непрерывно-дифференцируемая функция, являющаяся на интервалах вида $(k, k+1)$, где k — целое, полиномом p-го порядка.

B-сплайном называется (невырожденный) сплайн, имеющий минимально возможный носитель. Из сплайнов нетрудно сконструировать дискретный КМА с базисами, имеющими локальный носитель. Пусть p — целое неотрицательное число задающее порядок сплайна, $p < N$. В качестве φ^n возьмем функцию, чьи значения совпадают со значениями B-сплайна в узлах. Функции же φ^j берутся удовлетворяющими рекуррентным соотношениям (1.8), исходя из того условия, что функция φ^j при $m = 0, 1, \ldots, N-1$ совпадает с периодизацией B-сплайна порядка p с узлами в точках вида kN/J, $k = 0, 1, \ldots, J-1$. При этом базисы всплесков в пространствах W^j могут быть определены по формуле (2.6).

Остановимся теперь на вычислительных аспектах процедур разложения и восстановления функций по всплеск-базисам с локальным носителем.

Покажем, что процедуры разложения произвольной функции по базисам всплесков с локальным носителем и процедуры ее восстановления могут быть реализованы за $O(pN)$ арифметических операций, где p — введенный выше параметр, характеризующий размер носителя базисных функций. Будет видно, что эти алгоритмы состоят из операций решения систем линейных уравнений с циркулянтными матрицами, имеющими $O(p)$ ненулевых диагоналей, и операций обобщенных сверток с окнами размера $O(p)$.

Итак, пусть $\{\varphi^j\}_{j=0}^n$ — набор функций с локальным носителем размера p, удовлетворяющих условиям теоремы 1, $\{\phi^j\}_{j=0}^{n-1}$ — полученные по формуле (2.6) функции, определяющие базисы всплесков.

Нам нужно получить алгоритм разложения произвольной функции $f \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$ в сумму вида $f(\cdot) = f_k(\cdot) + \sum_{m=k}^{n-1} g_m(\cdot)$, где $f_k \in V^k$, $g_m \in W^m$, $k = 0, 1, \ldots, n$; точнее, мы должны найти коэффициенты разложения f_k и g_k по соответствующим базисам сдвигов. Построение проведем обратной индукцией по k, начиная с $k = n$.

Поскольку $f_n(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f(\cdot) = \vec{\alpha}^{nT} \vec{\varphi}^n(\cdot)$, где $\vec{\alpha}^n$ — искомый вектор коэффициентов, то, очевидно, $\vec{\alpha}^n$ является решением системы линейных уравнений с p-диагональной циркулянтной матрицей (напомним, что $\vec{\varphi}^n(\cdot)$ можно считать либо вектор-функцией, либо матрицей размера $n \times n$.

Предположим, мы уже нашли разложение функции $f_{k+1}(0 \leq k < n)$ по базису $\vec{\varphi}^{k+1}(\cdot)$, тогда справедливы разложения

$$f_{k+1}(\cdot = (\vec{\alpha}^{k+1})^T \vec{\varphi}^{k+1}(\cdot) = f_k(\cdot) + g_k(\cdot) = \vec{\alpha}^{kT} \vec{\varphi}^k(\cdot) + \vec{b}^{bT} \vec{\varphi}^k(\cdot). \tag{3.1}$$

Домножив (3.1) скалярно справа сначала на компоненты вектора $\vec{\varphi}(\cdot)$, а затем на компоненты $\vec{\varphi}^k(\cdot)$, получим

$$(\vec{\alpha}^{k+1})^T (\vec{\varphi}^{k+1}(\cdot), \vec{\varphi}^k(\cdot)) = \vec{\alpha}^{kT} (\vec{\varphi}^k(\cdot), \vec{\varphi}^k(\cdot)), \tag{3.2}$$

$$(\vec{\alpha}^{k+1})^T (\vec{\varphi}^{k+1}(\cdot), \vec{\phi}^k(\cdot)) = \vec{b}^{kT} (\vec{\phi}^k(\cdot), \vec{\phi}^k(\cdot)). \tag{3.3}$$

Легко видеть, что левые части (3.2) и (3.3) можно рассматривать как свертки $\vec{\alpha}^{k+1}$ с окнами размера $O(p)$, а векторы коэффициентов $\vec{\alpha}^k$ и $\vec{b}^k$ являются решениями систем линейных уравнений с циркулянтными матрицами, имеющими $O(p)$ диагоналей.

Алгоритмы восстановления функции f также могут быть получены из формул (3.1). Действительно, зная векторы коэффициентов $\vec{\alpha}^k$, $\vec{b}^k$ при $0 \leq k < n$, мы можем найти $\vec{a}^{k+1}$, домножив равенство

$$(\vec{\alpha}^{k+1})^T \vec{\varphi}^{k+1}(\cdot) = \bar{\alpha}^{kT} \bar{\varphi}^k(\cdot) + \vec{b}^{kT} \vec{\varphi}^k(\cdot)$$

на $\vec{\varphi}^{k+1}(\cdot)$ и получив при этом относительно вектора $\vec{\alpha}^{k+1}$ систему линейных уравнений

$$(\vec{\alpha}^{k+1})^T (\vec{\varphi}^{k+1}(\cdot), \vec{\varphi}^{k+1}(\cdot)) \qquad = \vec{\alpha}^{kT} (\vec{\varphi}^k(\cdot), \vec{\varphi}^{k+1}(\cdot)) + \vec{b}^{kT} (\vec{\phi}^k(\cdot, \vec{\varphi}^{k+1}(\cdot)).$$

Заметим, что для решения системы L линейных уравнений с m-диагональной матрицей необходимо выполнить треугольное разложение матрицы, затраты на выполнение которого имеют порядок $O(m^2L)$. Однако в этих вычислениях не участвует функция, чье разложение по базису всплесков мы ищем.

Таким образом, общие арифметические затраты на разложение и восстановление произвольной функции f не превышают $O(pN)$.

§4. Неортогональные пространства всплесков

Здесь мы рассмотрим еще одно определение всплеск-пространств, преимущество которого состоит в том, что для него существует возможность построения алгоритмов декомпозиции и реконструкции, в которых получение коэффициентов разложения на каждом уровне реализовано как свертка с одним и тем же окном. Причем в некоторых практически важных частных случаях может быть выбрано окно размера $p << N$. В этом смысле данный алгоритм сходен с алгоритмом И. Добеши, реализованным ею для ортогональных базисов всплесков на прямой. При этом стоит заметить, что не существует ортогонального базиса из дискретных всплесков с локальным носителем кроме простейшего случая, когда носитель базиса сдвигов в пространстве V^j имеет размер меньший 2^{n-j}.

В определенном смысле сходные идеи были реализованы в [10]. В указанной работе авторы для произвольного определенного на прямой сплайн пространства S (в том числе и с неравномерной сеткой узлов) показали возможность его разложения в прямую сумму сплайн-пространства S_1 с прореженной сеткой узлов и некоторого пространства $S_2 \subset S$, выбранного так, что соответствующие операторы проектирования на пространства S_1 и S_2 вдоль соответственно пространств S_2 и S_1 локальны.

Далее значок $\oplus$ обозначает прямую (вообще говоря, *неортогональнуюв* сумму линейных пространств.

Определение 2. Пусть последовательность линейных пространств $\{V^j\}_{j=0}^n$ образуют КМА пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$, φ^j, $0 < j \leq n$, — функции из формулировки теоремы 1, последовательность функций $\{\psi^j\}_{j=0}^{n-1}$ определена по формуле

$$\psi^j(\cdot) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \varphi^j(\cdot - kN/J).$$

Будем говорить, что пространства $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$, определяемые как линейные оболочки компонент $\vec{\psi}^j$, порождают всплеск-декомпозицию пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$, если они удовлетворяют условию

$$V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus \cdots \oplus W^{k-1} = V^k, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем, что для того чтобы пространства $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$ из определения 2 порождали всплеск-декомпозицию пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$, достаточно выполнения лишь условия $\widetilde{\mathbb{C}}^N = V^{n-1} \oplus W^{n-1}$.

Доказательство проведем по индукции. Предположим, что нами доказано соотношение $V^{k+1} = V^k \oplus W^k$ для некоторого $k < n$. Покажем справедливость разложения $V^k = V^{k-1} \oplus W^{k-1}$. Для этого нам нужно убедиться, что компоненты вектора $\vec{\psi}^{k-1}$ линейно независимы и среди их линейных комбинаций отсутствуют элементы пространства V^{k-1}.

Поскольку для любого $l = 0, i, \dots, K-1$ ввиду (1.1) имеем

$$\begin{aligned}
&\psi^k(\cdot + lN/K) + \psi^k(\cdot + lN/K + N/2) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{N-1} b_m \varphi^{k+1}(\cdot mN/2K + lN/K) \\
&\qquad + \sum_{m=0}^{N-1} b_m \varphi^{k+1}(\cdot + mN/2K + lN/K + N/2) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{N-1} b_m (\varphi^{k+1}(\cdot + mN/2 + lN/K) + \varphi^{k+1}(\cdot + mN/2K + kN/K + N/2)) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{N-1} b_m \varphi^k(2(\cdot + mN/2K + lN/K)) \\
&\quad = \psi^{k-1}(2(\cdot + lN/K)),
\end{aligned}$$

то в случае линейной зависимости компонент вектора $\vec{\psi}^{k-1}$ для некоторого набора чисел $\{\alpha_j\}_{j=0}^{K/2-1}$, не равных одновременно нулю, получим

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_{j=0}^{K/2-1} \alpha_j \psi^{k-1}(2(\cdot + jN/K)) \\
&= \sum_{j=0}^{K/2-1} \alpha_j (\psi^k(\cdot + jN/K) + \psi^k(\cdot + jN/K + N/2)),
\end{aligned}$$

что противоречит линейной независимости компонент вектора $\vec{\psi}^k$.

Аналогичным образом получим, что в случае выполнения условия

$$0 \equiv \sum_{j=0}^{K/2-1} \beta_j \varphi^{k-1}(\cdot + 2jN/K) + \sum_{j=0}^{K/2-1} \gamma_j \psi^{k-1}(\cdot + 2jN/K)$$

для некоторого невырожденных наборов чисел $\{\beta_i\}$ и $\{\gamma_i\}$, согласно выбору функций $\{\varphi^j\}$,

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_{j=0}^{K/2-1} \beta_j \varphi^{k-1}(2 \cdot + 2jN/K) + \sum_{j=0}^{K/2-1} \gamma_+ j \psi^{k-1}(2 \cdot + 2jN/K) \\
&= \sum_{j=0}^{K/2-1} \beta_j (\varphi^k(\cdot + jN/K) + \varphi^k(\cdot + jN/K + N/2) \\
&= \sum_{j=0}^{K/2-1} \gamma_j (\psi^k(\cdot + jN/K) + \psi^k(\cdot + jN/K + N/2)),
\end{aligned}$$

что противоречит уже доказанному факту, что сумма пространств V^k и W^k является прямой.

Нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Пусть P_1, P_2, R — алгебраические полиномы степени соответственно m, $nu < m + n$, причем полиномы P_1 и P_2 не имеют общих корней. Тогда найдутся такие полиномы Q_1 и Q_2 степени не выше $n-1$ и $m-1$, что*

$$P_1(x)Q_1(x) + P_2(x)Q_2(x) = R(x). \tag{4.1}$$

Полиномы Q_1 и Q_2 определяются однозначно.

Замечание. Данная лемма в чуть менее общей форме приводится И. Дебеши в ([1], с. 169) и [7]. Наше доказательство основано на другой идее и несколько короче.

Доказательство леммы 5. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ — нули полинома P_1. Тогда полином Q_2 определяется из условий $Q_2(x_i) = R(x_i)/P_2(x_i)$, где равенство выполняется с кратностью корня x_i. Деление здесь определяется корректно, поскольку $P_2(x_i) \neq 0$. Полином Q_1 находится аналогичным образом по значениям в точках $\{y_i\}_{i=1}^n$ — нулях полинома P_2.

Выполнение равенства (4.1) следует из его выполнения с учетом кратности в $n+m$ точках, поскольку его левая и правая части — полиномы порядка не выше $n+m-1$.

Полиномы Q_1 и Q_2 определяются однозначно ввиду единственности решения интерполяционной задачи (вообще говоря, с кратными точками).

Лемма 7. *Пусть для некоторого КМА в пространствах V^j выбраны базисы $\vec{\varphi}^j$, удовлетворяющие (1.1) и (1.8). Тогда для данного КМА существуют такие базисы $\vec{\varphi}^j$, также удовлетворяющие (1.1) и (1.8), т.е. для любых j_1, j_2, $0 \le j_1 < j_2 \le n$,*

$$\phi^{j_1}(2^{j_2-j_1}m) = \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1}-1} \phi^{j_2}(m + k2^{n-j_2+j_1}),$$

и для любого $j, 0 \le j < N$,

$$\phi^{j-1}(\cdot) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \phi^j(\cdot - lN/J),$$

что для характеристический полинома

$$P_\phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^l$$

базисов $\vec{\varphi}^j$ имеем $|P_\phi(z)|^2 + |P_\phi(z)|^2 > 0$ для всех z. При этом степень полинома P_ϕ не превышает степени P_φ.

Аналог леммы 7 для КМА пространства $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ можно найти, например, в работе Ч. Чуи и Ж. Ванга [8].

Доказательство леммы 7. Необходимость. Если характеристический полином

$$P_\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{K} \alpha_l z^l,$$

где $K < N$, не имеет пар корней вида $\pm c$ и $P_\varphi(0) \neq 0$, то утверждение леммы 7 выполнено. Пусть числа $z = \pm c_0$ являются корнями полинома P_φ, $C = c_0^2$. Тогда справедливо представление

$$P_\varphi(z) = (C - z^2) \sum_{l=0}^{K-2} d_l z^l \tag{4.2}$$

Рассмотрим процедуру перехода к новым базисным функциям $\vec{\phi}_1^j$, которая позволяет уменьшить на единицу порядок характеристического полинома P_φ. Введем в рассмотрение функцию

$$\phi_1^{j-1}(\cdot) = \sum_{l=0}^{K-2} d_l \varphi^j(\cdot - lN/J). \tag{4.3}$$

Поскольку, согласно (4.2), $\varphi^{j-1}(\cdot) = C\phi_1^{j-1}(\cdot) - \phi_1^{j-1}(\cdot - 2N/J)$, то набор функций $\phi_1^{j-1}(\cdot - l2N/J)$, $l = 0, 1, \ldots, J/2 - 1$, образует базис пространства V^{j-1} для $j > 0$, при этом для $j < n$ функции ϕ_1^j

определяются по формуле (4.3), а для $j = n$ существование искомой функции ϕ_1^n следует из теоремы 1 и леммы 5.

Ясно, что связь между базисными функциями при различных j выражается равенствами

$$\phi_1^{j-1}(\cdot) = \sum_{l=0}^{K-1} \alpha_l' \phi_1^j(\cdot - lN/J),$$

где коэффициенты a_l' определяются по формуле

$$\sum_{l=0}^{K-1} a_l' z^l = (C - z) \sum_{l=0}^{K-2} d_l z^l.$$

Будем повторять указанную процедуру до тех пор, пока полученный в итоге характеристический полином имеет корни вида $\pm c$. Поскольку каждый раз мы понижаем степень характеристического полинома на единицу, то за конечное число шагов придем к искомому базису $\vec{\varphi}_*^j$ Если $P_{\varphi_*}(0) \neq 0$, то полагаем $\vec{\varphi}^j = \vec{\varphi}_*^j$. В противном случае $\vec{\varphi}^j(\cdot) = \vec{\varphi}_*^j(\cdot + N/J)$.

Перейдем непосредственно к построению алгоритма декомпозиции функций. Пусть совокупность пространств $\{V^j\}$ определяет КМА пространства $\widetilde{\mathbb{C}}^N$, $\{\vec{\varphi}^j\}$ — набор базисов этих пространств, причем эти базисы удовлетворяют соотношению (1.1), и соответствующий характеристический полином, чьи коэффициенты определяются из (1.8), имеет порядок $K < N$, и $|P_\phi(z)|^2 + |P_\phi(z)|^2 > 0$ для всех z.

Мы покажем, что существует разложение пространства $\widetilde{\mathbb{C}^N}$ Wв прямую, но, вообще говоря, неортогональную сумму всплеск-пространств $\{W^j\}_{j=0}^{n-1}$, для которых (в некотором базисе) алгоритмы декомпозиции произвольной функции и ее реконструкции осуществляются как дискретная свертка с окном размера не более $K+1$. Более того, свертывающие окна, задающие проекции на пространства W^j и V^j и восстанавливающие функцию $g \in V^{j+1}$ по ее проекциям на эти пространства, могут быть выбраны независящими от j. Это означает, что для произвольной функции

$$f(\cdot) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m^n \varphi^n(\cdot - m) \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$$

можно выполнить разложения

$$f(\cdot) = \sum_{m=0}^{J-1} c_m^j \varphi^j(\cdot - mN/J) + \sum_{l=j}^{n-1} \sum_{m=0}^{L-1} d_m^l \psi^l(\cdot - mN/L),$$

где $\vec{\varphi}^l$ — базисы пространств W^l, и коэффициенты $\{\{c_m^j\}_{m=0}^{J-1}\}_{j=0}^{n-1}$ и $\{\{d_m^j\}_{m=0}^{J-1}\}_{j=0}^{n-1}$ могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$c_m^{j-1} = \sum_{l=\xi}^{\xi+K} c_{l+2m}^j r_l, \quad d_m^{j-1} = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} c_{l+2m}^j s_l, \tag{.4.4}$$

где $\xi, .\zeta \in \mathbb{Z}$. Далее будет показано, что верхний предел суммирования в первой формуле может быть уменьшен на единицу. Последовательности c_m^j и d_m^j являются J-периодическими по нижнему индексу, а последовательности r_l и s_l можно считать определенными для всех целых индексов, но отличными от нуля только при $l = \xi, \xi+1, \ldots, \xi+K-1$ для первой последовательности и при $l = \zeta, \zeta+1, \ldots, \zeta+K$ — для второй. В дальнейшем мы полагаем $\zeta = \xi$, если $\xi + K$ — нечетно, и $\zeta = \xi - 1$ — в противном случае. Сохраняя размер окон, мы можем перемещать их путем изменения параметра ξ, получая при этом новые решения нашей задачи. Единственное требование на расположение окна r_l заключается в том, что оно должно иметь непустое пересечение с отрезком $[0, K]$ или с его сдвигом на lN, где $l \in \mathbb{Z}$. В противном случае первый из операторов (4.4) при $j = n$ отобразит функцию φ^{n-1} на функцию вида

$$\sum_{l=0}^{N/2-1} \alpha_l \varphi^{n-1}(\cdot - 2l),$$

где $\alpha_0 = 0$, что невозможно, поскольку это оператор проектирования пространства V^n на V^{n-1}. Мы полагаем, что ξ — любое целое число, принадлежащее отрезку $[1-K, K]$.

Будем конструировать пространства W^j, исходя из условий, что их базисы $\vec{\varphi}^j$ определяются соотношениями

$$\psi^{j-1}(\cdot) = \sum_{m=0}^{K} b_m \varphi^j(\cdot - mN/J),$$

где постоянные b_m нам предстоит определить. Поскольку соотношения (4.4) задают операторы проектирования на пространства V^{j-1} и W^{j-1}, то для $m = 0, 1, \ldots, N/2-1$ справедливы равенства

$$\delta_{0m} = \sum_{l=\xi}^{\xi+K-1} a_{l-2m} r_l, \tag{4.5}$$

$$\delta_{0m} = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} b_{l-2m} s_l, \tag{4.6}$$

$$0 = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} a_{l-2m} s_l, \tag{4.7}$$

$$0 = \sum_{l=\xi}^{\xi+K-1} b_{l-2m} r_l, \tag{4.8}$$

(здесь мы, естественно, полагаем, что последовательности $\{\alpha_l\}$, $\{b\}$ являются N-периодическими и вне своих естественных областей определения доопределяются нулями). Хорошо известно (см., например, [8] и [9]) и нетрудно проверить, что для решения полученной системы уравнений в свертках достаточно найти решение системы уравнений

$$A(z)R(z) + A(-z)R(-z) \equiv 2, \tag{4.9}$$

$$B(z)S(z) + B(-z)S(-z) \equiv 2, \tag{4.10}$$

$$A(z)S(z) + A(-z)S(-z) \equiv 0, \tag{4.11}$$

$$B(z)R(z) + B(-z)R(-z) \equiv 0, \tag{4.12}$$

где

$$A(z) = \sum_{l=0}^{K} \alpha_l z^l, B(z) = \sum_{l=0}^{K} b_l z^l,$$

$$R(z) = \sum_{l=\xi}^{\xi+K-1} r_l z^{-l} = z^{-\xi-K+1} \sum_{l=0}^{K-1} r_{\xi+K-1-l} z^l \stackrel{\text{def}}{=} z^{-\xi-K+1} \check{R}(z),$$

$$S(z) = \sum_{l=\zeta}^{\zeta+K} s_l z^{-l} = z^{-\zeta-K} \sum_{l=0}^{K} s_{\zeta+K-l} l \stackrel{\text{def}}{=} z^{-\zeta-K} \check{S}(z).$$

Уравнения (4.9)–(4.12) можно переписать в виде

$$A(z)\check{R}(z) + (-1)^{\xi+K-1} A(-z)\check{R}(-z) = 2z^{\xi+K-1}, \tag{4.13}$$

$$B(z)\check{S}(z) + (-1)^{\zeta+K} B(-z)\check{S}(-z) = 2z^{\zeta+K}, \tag{4.14}$$

$$A(z)\check{S}(z) + (-1)^{\zeta+K-1} A(-z)\check{S}(-z) = 0, \tag{4.15}$$

$$B(z)\check{R}(z) + (-1)^{\xi+K-1} B(-z)\check{R}(-z) = 0. \tag{4.16}$$

Согласно лемме 6 и выбору ξ, существует единственная пара полиномов Q_1 и Q_2 порядка не выше $K-1$, удовлетворяющая уравнению

$$A(z)Q_1(z) + (-1)^{\xi+K-1} A(-z)Q_2(z) = 2z^{\xi+K-1}.$$

При этом, очевидно, $Q_1(z) = Q_2(-z)$. Таким образом, полином $\check{R}(z) = Q_1(z)$ удовлетворяет уравнению (4.13).

Если $\xi + K$ — нечетно, то нетрудно проверить, что функции $B(z) = z\check{R}(-z)$ и $\check{S}(z) = A(-z)$ удовлетворяют уравнениям(4.13)–(4.16). В случае же четного $\xi + K$ решениями этих уравнений являются функции $B(z) = \check{R}(-z)$ и $\check{S}(z) = -A(-z)$.

Несмотря на кажущийся произвол при выборе полиномов B и $\check{S}$, пространства W^j полностью определяются выбором полинома $\check{R}$, поскольку коэффициенты этого полинома полностью определяют оператор проектирования на пространство V^j вдоль пространства W^j.

Для того чтобы показать, что полученные пространства W^j, действительно, имеют размерность J, докажем справедливость формулы реконструкции

$$c_m^j = \sum_{l=0}^{N-1} c_l^{j-1} a_{m-2l} + \sum_{l=0}^{N-1} d_l^{j-1} b_{m-2l} \tag{4.17}$$

которая по отношению к оператору проектирования пространства V^j на пространства W^{j-1} и V^{j-1} является обратным оператором. Значит,

$$\dim W^{j-1} = \dim V^j - \dim^{j-1} = J - J/2 = J/2.$$

В справедливости же формулы (4.17) достаточно убедиться при $j = n$. Обозначим через A матрицу размера $2^{n-1} \times 2^n$, первая строка состоит из элементов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ а последующие получаются из предыдущей циклическим сдвигом вправо на две позиции. Аналогичным образом построим матрицы B, R, S. Тогда система уравнений (4.5)–(4.8) может быть записана в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (R^T S^T) = E.$$

Следовательно, матрица $(R^T S^T)$ имеет обратную $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, значит, она невырождена и оператор реконструкции функции задается формулой (4.17).

Разумеется, когда K велико, более привлекательным оказывается описанный в §2 подход, основанный на переходе к базисам Винера. Поскольку для любого $j = 1, \ldots, n$ и любого l, как и в ортогональном случае, линейные оболочки пар функций v_l^j, $v_{l+J/2}^j$ и v_l^{j-1}, w_l^{j-1} совпадают, то формулы (2.2)–(2.5) переносятся (конечно, с другими коэффициентами) на случай неортогональных пространств всплесков.

Список литературы

1. Daubéchies I., *Ten lectures on wavelets*, CBMS–NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **61**, SIAM, Philadelphia, 1992.
2. Zheludev V. A., *Periodic splines and wavelets*, Mathematical Analysis, Wavelets, and Signal Processing (Cairo, 1994), Contemp. Math., **190**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 339–354.
3. Желудев В. А., *Операционное исчисление, связанное с периодическими сплайнами*, ДАН СССР **313** (1990), no. 6, 1309–1315.
4. Perrier V. and Basdevant C., *Periodical wavelet analysis, a tool for inhomogeneous field investigation. Theory and algorithms*, Rech. Aérospat. (English Edition) **1989**, no. 3, 53–67.
5. Chui C. K., Mhaskar H. N., *On trigonometric wavelets*, Constr. Approx. **9** (1993), no. 2–3, 167–190.
6. de Boor C., DeVore R. A., Ron A., *On the construction of multivariate (pre)wavelets*, Constr. Approx. **9** (1993), no. 2–3, 123–166.
7. Daubechies I., *Orthonormal basis of compactly supported wavelets*, Comm. Purt Appl. Math. **41** (1988), 909–996.
8. Chui C. K., Wang J. Z., *A general framework of compactly supported splines and wavelets*, J. Appr. Th. **71** (1992), 263–304.
9. Chui C. K., *An introduction to wavelets. Wavelet analysis and its applications*, 1, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.
10. Dahmen W., Micchelli C. A., *Banded matrices with banded inverses,* II: *Locally finite decomposition of spline spaces*, Constr. Approx. **9** (1993), no. 2–3, 263–281.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
191011, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки, 27