

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. РЯБОВ

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2013

УДК 519.642

ББК 00.00

P00

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.Ф. Демьянов (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. В.Б. Хазанов (С.-Петербург.
гос. морской технический ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета*

Рябов В.М.

P00 **Численное обращение преобразования Лапласа —СПб.:**

Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. —187 с.

В книге изложена современная теория численных методов обращения интегрального преобразования Лапласа. Описаны методы обращения с помощью рядов Лагерра, построения специальных квадратурных формул как с вещественными узлами и коэффициентами, так и с комплексными. Изложена теория методов Виддера и их трактовка с точки зрения интегральных преобразований с дельтообразными ядрами. Построены оценки погрешности различных методов обращения и изучены вопросы их устойчивости. Приведены рекомендации по выбору метода обращения для решения конкретных задач.

Книга предназначена как для студентов старших курсов университетов, специализирующихся по численным методам, так и для научных работников, применяющим интегральные преобразования для решения различных прикладных задач.

Библиогр. 73 назв. Табл. 5. Ил. 7.

ББК 00.00

© В.М. Рябов, 2013

© Издательство
С.-Петербургского
университета, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегральное преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$,

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

представляет собой мощный инструмент для решения широкого класса прикладных задач математической физики. Одним из его главных достоинств является алгебраизация процедур математического анализа, с помощью которой удается свести интегральные и дифференциальные уравнения к более простым. Кроме того, изображение Лапласа является регулярной функцией в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$, что позволяет привлечь к исследованию решаемой задачи результаты теории функций комплексного переменного.

Как правило, при решении задач операционными методами наиболее трудным этапом является процесс обращения, т. е. определение оригинала по его изображению. Существуют таблицы соответствия функций-оригиналов и их изображений [15], теоремы разложения, формула обращения Римана–Меллина, позволяющие теоретически точно находить оригинал. Но решение практических задач часто приводит к изображениям, к которым не могут быть применены эти классические приемы обращения. Следовательно, возникает необходимость разработки и применения приближенных методов.

Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге [25]. Обзор других способов обращения, не вошедших в [25], приведен в статье [36]. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах [15], [72], [12], [26]. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач, среди прочих, посвящены фундаментальные труды [28], [54]. Среди недавних работ, содержащих обзор приближенных методов обращения, укажем книгу [64]. Разумеется, список цитированной литературы можно было бы бесконечно пополнять, однако ссылки на все наиболее интересные работы по рассматриваемой тематике можно обнаружить в приведенном списке работ.

Не существует универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой конкретный метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции-оригинала), что прежде

всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо приближены заданные образы и оригиналы. Выбор метода обращения существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала. Перечислим типичные ситуации:

- 1) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой фиксированной точке, отличной от бесконечности;
- 2) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки;
- 3) известны значения изображения $F(p)$ на вещественной полуоси $p \geq 0$;
- 4) известны значения изображения $F(p)$ во всей полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$.

Выбор подходящих методов обращения для указанных ситуаций, их описание либо отсылка к соответствующей литературе рассмотрены в работе [36].

Предполагается, что читатель знаком с проблемой обращения преобразования Лапласа и теоретическими подходами к её решению, изложенными, например, в книге [26].

Нумерация формул, теорем, утверждений и т. п. в каждой главе своя и начинается с единицы. Таблицы и рисунки (иллюстрации) ввиду их малого количества имеют сквозную нумерацию по всей книге. Конец доказательства обозначается знаком \square .

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ ЛАГЕРРА

§ 1. Постановка задачи. Выбор параметра функций Лагерра

Дано уравнение

$$(Ax)(p) \equiv \int_0^\infty \exp(-pt)x(t) dt = F(p), \quad (1)$$

где $x(t)$ — искомая вещественная функция-оригинал, а $F(p)$ — её изображение по Лапласу.

Рассмотрим систему функций Лагерра

$$\{l_k(t)\}_{k=0}^\infty, \quad l_k(t) = \exp(-t/2)L_k(t),$$

$$L_k(t) = \frac{e^t}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^k e^{-t}) — \text{многочлен Лагерра.}$$

Эта система полна и ортонормирована в пространстве $L_2(0, \infty)$.

Пусть a — произвольное положительное число. Система функций

$$\{\eta_k(t)\}_{k=0}^\infty, \quad \eta_k(t) = \sqrt{a} l_k(at), \quad (2)$$

также будет полна и ортонормирована в $L_2(0, \infty)$.

Предположим, что решение $x(t)$ уравнения (1) при некотором $a > 0$ представимо в виде ряда по системе функций (2):

$$x(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k \eta_k(t).$$

Подставляя его в уравнение (1), получаем

$$\sum_{k=0}^\infty c_k (A\eta_k)(p) = F(p). \quad (3)$$

Следовательно, задача нахождения $x(t)$ сводится к определению коэффициентов c_k из уравнения (3).

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных методов решения этой задачи, остановимся на выборе значения параметра a , входящего в определение системы функций (2).

Как известно, изображение $F(p)$ является регулярной функцией комплексной переменной p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq p_0$ при некотором вещественном p_0 .

Заметим, что в случае конечного p_0 переход к новому оригиналу $f_1(t) = f(t) \exp(-p_0 t)$ приводит нас к случаю $p_0 = 0$.

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$,
- 2) существует конечный предел $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$,
- 3) все особые точки $F(p)$ можно заключить в замкнутый круг, целиком лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$.

По изображениям многочленов Лагерра

$$(AL_k)(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) L_k(t) dt = \frac{(p-1)^k}{p^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

вычисляем изображения функций системы (2):

$$(A\eta_k)(p) = \sqrt{a} \int_0^\infty e^{-pt} e^{-at/2} L_k(at) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{(p/a - 0.5)^k}{(p/a + 0.5)^{k+1}}.$$

Их подстановка в (3) приводит к уравнению

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k c_k \sqrt{a} \left(\frac{a/2 - p}{a/2 + p} \right)^k = \left(\frac{a}{2} + p \right) F(p).$$

Положим

$$b_k = (-1)^k c_k \sqrt{a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

и сделаем замену переменной

$$z = (a/2 - p)/(a/2 + p). \quad (4)$$

Преобразование (4) конформно отображает правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq 0$ на круг $|z| \leq 1$. Функция

$$G(z) = \left(\frac{a}{2} + p \right) F(p) \Big|_{p=a(1-z)/(2(1+z))} = \frac{a}{1+z} F\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) \quad (5)$$

в силу сделанных относительно $F(p)$ предположений будет регулярна на круге $|z| \leq 1$.

Итак, функция (5) имеет представление

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (6)$$

причем радиус сходимости ряда (6) не менее единицы.

Как известно, радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки $G(z)$. Укажем способ выбора такого значения параметра a , при котором радиус сходимости ряда (6) максимален, что равносильно самому быстрому убыванию коэффициентов ряда (6) (см. [62]).

Пусть ρ — радиус сходимости ряда (6) и $\rho > 1$. При отображении

$$p = \frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z},$$

обратном к преобразованию (4), внешность круга $|z| \geq \rho$ конформно отображается на внутренность круга $|p - p_0| \leq r$ радиусом $r = a\rho/(\rho^2 - 1)$ с центром в точке

$$p_0 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Это число отрицательно. Равенство $p_0^2 - r^2 = (a/2)^2$ означает, что $a/2$ равно длине отрезка касательной к этому кругу от точки $p = 0$ до точки касания, и на границе этого круга по предположению лежит хотя бы одна особая точка изображения $F(p)$. Пусть 2φ — угол, под которым этот круг виден из начала координат, тогда

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{r}{a/2} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1}.$$

Эта функция убывает при $\rho > 1$. Значит, радиус сходимости ряда (6) будет наибольшим, если все особые точки функции $F(p)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, заключить в замкнутый круг с центром на отрицательной полуоси, который виден из начала координат под наименьшим углом, а в качестве параметра a взять удвоенную длину отрезка касательной к этому кругу от точки касания до точки $p = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Если множество особых всех точек $F(p)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, но неограничено, то при любом выборе параметра a радиус сходимости ряда (6) не превосходит единицы.

Прежде чем перейти к изучению основных методов обращения преобразования Лапласа, рассмотрим один иллюстративный пример.

Будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{n-1} c_k \eta_k(t).$$

Значения коэффициентов c_k определим методом наименьших квадратов [6] как решение системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k (A\eta_k, A\eta_j) = (F, A\eta_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Здесь (\cdot, \cdot) означает скалярное произведение в $L_2(0, \infty)$. Запишем систему в матричном виде

$$B_n C_n = F_n, \quad (7)$$

положив

$$B_n = (b_{kj})_{k,j=0}^{n-1}, \quad C_n = (c_0, \dots, c_{n-1}), \quad F_n = ((F, A\eta_0), \dots, (F, A\eta_{n-1})).$$

Вычислим элементы матрицы B_n :

$$b_{kj} = (A\eta_k, A\eta_j) = a \int_0^\infty \left(\frac{p - a/2}{p + a/2} \right)^{k+j} \cdot \frac{dp}{(p + a/2)^2} = \frac{1 + (-1)^{k+j}}{k + j + 1}.$$

Матрица B_n является матрицей Грама линейно независимых функций $A\eta_k$, поэтому она обратима. Отметим, что она не зависит от a . Следовательно, $C_n = B_n^{-1} F_n$. С ростом n норма $\|B_n^{-1}\|_2$ растет, что будет отрицательно сказываться на точности решения, так как вектор F_n , как правило, известен приближенно (как из-за приближенного задания $F(p)$, так и из-за неточности вычисления скалярных произведений $(F, A\eta_j)$). Поэтому вычисления необходимо производить так, чтобы ошибки нахождения F_n убывали не медленнее, чем растут значения $\|B_n^{-1}\|_2$. Представление о характере роста величин $\|B_n^{-1}\|_2$ дают следующие оценки: $\|B_{10}^{-1}\|_2 \leq \|B_{10}^{-1}\|_\infty \approx 4.3 \cdot 10^5$, $\|B_{15}^{-1}\|_2 \leq \|B_{15}^{-1}\|_\infty \approx 1.1 \cdot 10^9$.

З а м е ч а н и е 2. С ростом n решение системы (7) будет “размываться” в направлении собственных векторов матрицы B_n , соответствующих ее малым собственным значениям [57]. В таком случае

целесообразно использовать метод регуляризации сдвигом, т.е. находить вектор C_n как решение системы $(B_n + \alpha E_n)C_n = F_n$ при подходящем выборе параметра регуляризации $\alpha > 0$.

Замечание 3. Функции системы (2) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Естественно считать, что и оригинал $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ также стремится к нулю. Если значение $f(+\infty)$ существует и не равно нулю, то можно ввести новый оригинал $f_1(t) = f(t) - f(+\infty)$ либо $f_2(t) = f(t) - (1 - \exp(-t))f(+\infty)$. Значение $f(+\infty)$ можно вычислить по формуле $f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$.

§ 2. О сходимости рядов Лагерра

2.1. Сходимость в среднем

Введем в рассмотрение общие многочлены Лагерра [56]

$$L_n(t, \alpha) = \frac{1}{n!} t^{-\alpha} e^t (t^{\alpha+n} e^{-t})^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Они могут быть записаны в виде

$$L_n(t, \alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \cdot \frac{(-t)^k}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n + \alpha}{n - k} \frac{t^k}{k!}. \quad (8)$$

Многочлены (8) образуют полную систему в пространстве с весом $L_2(t^\alpha e^{-t}; 0, \infty)$ и ортогональны:

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_k(t, \alpha) L_j(t, \alpha) dt = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{k!} \delta_{kj}.$$

Предположим, что при некотором $\alpha > -1$ искомый оригинал $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty t^{-\alpha} e^{-t} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (9)$$

Функция $g(t) = t^{-\alpha} f(t)$ такова, что

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} |g(t)|^2 dt < \infty,$$

т.е. $g \in L_2(t^\alpha e^{-t}; 0, \infty)$, и поэтому она представима сходящимся в среднем рядом Фурье по общим многочленам Лагерра:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(t, \alpha). \quad (10)$$

Покажем, что при выполнении условия (9) изображение $F(p)$ будет регулярной функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 1/2$. Действительно, можно написать цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |e^{-pt} f(t)| dt &\leq \int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t} e^{-(\operatorname{Re} p - 1)t} |g(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t} e^{-2(\operatorname{Re} p - 1)t} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} t^\alpha e^{-t} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^{\infty} t^\alpha e^{-(2\operatorname{Re} p - 1)t} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} t^{-\alpha} e^{-t} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, изображение $F(p)$ при выполнении условий (9) и $\operatorname{Re} p > 1/2$ представимо абсолютно и равномерно сходящимся интегралом Лапласа, что и влечет регулярность изображения в указанной полуплоскости.

В книге [25] приведен точный метод вычисления коэффициентов ряда (10), использующий значения производных изображения. Отметим, что такой алгоритм обращения мало пригоден в случае приближенного задания изображения, и к тому же при сделанных предположениях ряд Лагерра может сходиться медленно.

Заметим, что ряды по функциям Лагерра (2) после домножения на $\exp(at/2)$ принимают вид (10) при $\alpha = 0$.

2.2. Поточечная сходимость

Приведем без доказательства условия, при которых ряды Фурье по многочленам Лагерра сходятся поточечно [56].

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, а функция $f(t)$ из класса $L_1(t^\alpha e^{-t}; 0, \infty)$ в окрестности фиксированной точки x удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x) - f(t)| \leq M|x - t|^\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (11)$$

и существуют интегралы

$$\int_0^1 t^{\alpha/2-1/4} |f(t)| dt, \quad \int_1^{\infty} t^{\alpha/2+1/2} e^{-t/2} |f(t)| dt,$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ по общим многочленам Лагерра сходится в точке x .

Теорема 2. Если функция $f(t)$ класса $L_1(t^\alpha e^{-t}; 0, \infty)$ в окрестности фиксированной точки x удовлетворяет условию Липшица (11) и при $-1 < \alpha \leq 0$ существуют интегралы

$$\int_0^1 t^{\alpha/2-3/4} |f(t)| dt, \quad \int_1^\infty t^{\alpha/2} e^{-t/2} |f(t)| dt,$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ по общим многочленам Лагерра сходится в точке x .

2.3. Равномерная сходимость

Пусть радиус сходимости ряда (6) больше единицы. Тогда на единичном круге $|z| \leq 1$ он сходится абсолютно и равномерно, и его там можно почленно дифференцировать любое число раз. Очевидно, что в этом случае выполнено неравенство $\sum_{k=0}^\infty |a_k| < \infty$, которое гарантирует равномерную сходимость ряда (6), поскольку функции Лагерра (2) равномерно ограничены.

Предположим, что мы выбрали узлы интерполирования на круге $|z| \leq 1$ так, что интерполяционный процесс по ним сходится равномерно к $G(z)$. В таком случае наряду со сходимостью интерполяционных многочленов к $G(z)$ будут сходиться и производные интерполяционных многочленов к соответствующим производным функции $G(z)$, в частности, и их значения при $z = 0$, т. е. коэффициенты интерполяционных многочленов будут стремиться к коэффициентам ряда (10), которые мы и разыскиваем.

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории сходимости интерполяционных процессов на комплексной плоскости. Для детального изучения вопроса рекомендуем книги [7], [55].

Пусть K — компактное множество в \mathcal{C} , дополнение $K^c = \mathcal{C} \setminus K$ которого является односвязной областью расширенной комплексной плоскости \mathcal{C} . Тогда существует конформное отображение

$$z = \psi(w) = cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \dots, \quad c > 0, \quad (12)$$

внешности единичного круга $|w| > 1$ на K^c .

Выберем узлы интерполирования $z_k^{(n)} (k = 0, 1, \dots, n)$ для всех $n = 0, 1, \dots$ принадлежащими K и положим

$$\omega_n(z) = \prod_{k=0}^n (z - z_k^{(n)}). \quad (13)$$

Рассмотрим числа

$$M_n = \max\{|\omega_n(z)| : z \in K\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Они удовлетворяют неравенству $M_n \geq c^{n+1}$.

Определение. Узлы $z_k^{(n)}$ называются *равномерно распределенными* (или *равнораспределенными*) на K , если

$$\sqrt[n+1]{M_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c. \quad (14)$$

Теорема 3. Для того чтобы для каждой регулярной на компакте K функции f

$$L_n(z) \Rightarrow f(z) \quad (n \rightarrow \infty, z \in K),$$

необходимо и достаточно, чтобы узлы интерполяции $z_k^{(n)}$ были равномерно распределены на K .

Итак, для обеспечения равномерной сходимости интерполяционных многочленов узлы интерполирования, т. е. корни многочленов (13), следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (14).

Известны три принципа выбора узлов на компакте, обеспечивающие равномерную сходимость: Вандермонда (Фекете), Чебышёва, Фейера.

Принцип Вандермонда. Для заданных точек $z_k \in K$ ($k = 0, 1, \dots, n$) составим произведение

$$P(z_0, z_1, \dots, z_n) = \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|.$$

Это ограниченная и непрерывная функция $(n+1)$ точек на K , и потому существует набор точек $z_0^{(n)}, z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ из K , для которых это произведение максимально. Этот набор называют n -й системой узлов Фекете (Вандермонда) (или W -системой). Заметим,

что поставленная задача эквивалентна задаче максимизации модуля определителя Вандермонда

$$W(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix},$$

откуда и происходит второе название системы узлов.

Узлы Вандермонда попарно различны, расположены на границе $\partial K = \partial K^c$ компакта K и “максимально удалены” друг от друга. К тому же многочлены влияния интерполяционного многочлена по ним

$$l_k(z) = \frac{\omega_n(z)}{(z - z_k^{(n)})\omega'_n(z_k^{(n)})}$$

удовлетворяют неравенству $|l_k(z)| \leq 1$ для всех k и $z \in K$.

Если K — единичный круг плоскости z , то узлы Вандермонда суть корни многочлена (с точностью до поворота на любой угол) $\omega_n(z) = z^{n+1} - 1$. Очевидно, в этом случае $M_n = 2$, конформное отображение (12) имеет вид $z = w$, и условие (14) выполняется.

Принцип Чебышёва. Как и выше, выберем узлы интерполирования $z_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) для всех $n = 0, 1, \dots$ принадлежащими K и положим

$$\omega_n(z) = \prod_{k=0}^n (z - z_k^{(n)}).$$

Функция $|\omega_n(z)|$ ограничена и непрерывна на K , и потому существует набор точек $z_0^{(n)}, z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ из K , на котором она принимает минимальное значение. Этот набор называют n -й системой узлов Чебышёва (или T -системой).

Если K — единичный круг плоскости z , то узлы Чебышёва суть корни многочлена $\omega_n(z) = z^{n+1} - 1$. Следовательно, $M_n = 1$, конформное отображение (12) имеет вид $z = w$, и условие (14) выполняется. Очевидно, в этом случае речь идет об интерполировании Эрмита с одним кратным узлом $z = 0$.

Если $K = [-1, 1]$, то многочленами вида (13), наименее уклоняющимися от нуля на K , являются многочлены Чебышёва первого рода $\omega_n(z) = T_{n+1}(z)/2^n$ с корнями $z_k^{(n)} = \cos((2k+1)\pi/(2n+2))$.

Принцип Фейера. Пусть компакт K таков, что функция ψ , отображающая множество $\{w : |w| > 1\}$ на K^c , непрерывно продолжается на множество $\{w : |w| \geq 1\}$. Пусть набор узлов $\{w_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ равномерно распределен на $|w| = 1$. Тогда набор точек

$$z_k^{(n)} = \psi\left(w_k^{(n)}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (15)$$

называется n -й системой узлов Фейера (или F -системой).

Пример 1. Пусть $K = [-1, 1]$. В этом случае отображение (12) задается функцией Жуковского $z = (w + 1/w)/2$, отображающей окружность $|w| = 1$ на $K = [-1, 1]$.

Положим $w_k^{(n)} = \exp(2\pi i k / (n+1))$, тогда $z_k^{(n)} = \cos(2\pi k / (n+1))$. Заметим, что $z_1^{(n)} = z_n^{(n)}$, $z_2^{(n)} = z_{n-1}^{(n)}, \dots$. В этих точках нужно использовать значения интерполируемой функции и ее производной.

Пример 2. Пусть $K = [-1, 1]$, $w_k^{(n)} = \exp((4k+1)\pi i / (2n+2))$, тогда $z_k^{(n)} = \cos((4k+1)\pi / (2n+2))$. Их удобнее перенумеровать, положив

$$z_k^{(n)} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, $\omega_n(z) = T_{n+1}(z)/2^n$, $M_n = 2^{-n}$, и условие (14) выполнено.

Замечание 4. Далее в качестве компакта K плоскости z рассматривается единичный круг или некоторое его подмножество, на которых порожденная изображением функция (6) регулярна. Скорость сходимости равномерно сходящихся интерполяционных процессов зависит от “размера” наибольшей области регулярности функции $G(z)$. В случае $K = [-1, 1]$ такой областью будет эллипс с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей $\rho > 1$. Тогда погрешность интерполяции будет величиной порядка ρ^{-n} . Подробнее на этих вопросах мы не будем останавливаться и отсылаем читателей к работам [7], [55].

Наша задача заключается в описании эффективных методов определения коэффициентов рядов Лагерра на основе уравнения (6).

Она решается совсем просто в случае узлов Чебышёва, если K — единичный круг. Действительно, из уравнения (6) находим $b_k = G^{(k)}(0)/k!$, $k = 0, 1, \dots$, и в итоге в силу (5) искомые коэффициенты выражаются через значения производных $F^{(k)}(a/2)$.

§ 3. Интерполяционные методы обращения

Дальнейшее содержание этой главы относится к изучению интерполяционных методов для W - и T -систем узлов интерполирования применительно к нахождению решения уравнения (1) в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta_k(t). \quad (16)$$

Теорема 4. Пусть при некотором $a > 0$ решение уравнения (1) представимо в виде ряда (16), коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty, \quad (17)$$

и пусть все особые точки изображения $F(p)$ заключены в замкнутый круг с центром на отрицательной полуоси, целиком лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$. Далее, пусть $z_0^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ есть W - или F -система узлов интерполирования для единичного круга плоскости z и интерполяционный многочлен по этой системе узлов для функции $G(z)$ равен

$$P_n(z) = p_0^{(n)} + p_1^{(n)}z + \dots + p_n^{(n)}z^n.$$

Тогда

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{a}} p_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Действительно, так как при любом $a > 0$ функции Лагерра ограничены [53]: $|\eta_k(t)| \leq \sqrt{a}$, то ряд (16) сходится равномерно, поэтому функция (5) регулярна на некотором круге радиусом более единицы и представима там рядом (6). Коэффициенты этого ряда могут быть найдены как пределы коэффициентов интерполяционных многочленов по соответствующей системе узлов, обеспечивающей равномерную сходимость интерполяционного процесса.

Итак, приближенные значения коэффициентов b_k ряда (6) находятся как решение системы

$$\sum_{k=0}^n b_k^{(n)} z_r^k = \left(\frac{a}{2} + p_r \right) F(p_r), \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (18)$$

по избранным узлам интерполяции z_0, \dots, z_n и соответствующим им точкам

$$p_r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - z_r}{1 + z_r}.$$

С вычислительной точки зрения реализация этой схемы сводится к решению следующих задач:

1) построение эффективных способов решения системы (18) при любых n ,

2) изучение влияния погрешностей задания $F(p)$ на ее решение, а тем самым и на приближенное решение уравнения (1) в виде отрезка ряда (16).

Случай узлов Фейера. Узлами Фейера для $K = [-1, 1]$, как мы видели, являются корни многочлена Чебышёва $T_n(x)$

$$z_r = \cos \frac{2r+1}{2n} \pi, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

На плоскости p им соответствуют точки вещественной оси

$$p_r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - z_r}{1 + z_r}$$

такие, что $0 < p_0 < \dots < p_{n-1} < \infty$.

Интерполяционный многочлен

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n)} z^k \quad (19)$$

определяется условиями $P_{n-1}(z_r) = G(z_r)$, $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Представим P_{n-1} в виде разложения по многочленам Чебышёва:

$$P_{n-1}(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu^{(n)} T_\nu(z),$$

в котором числа $d_\nu^{(n)}$ пока неизвестны. В силу ортогональности и нормировки $T_\nu(z)$ по весу $1/\sqrt{1-z^2}$ имеем

$$d_0^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P_{n-1}(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz,$$

$$d_\nu^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P_{n-1}(z) T_\nu(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Для вычисления интегралов применим формулу Мелера

$$\int_{-1}^1 \frac{f(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz \approx \frac{\pi}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f(z_r),$$

точную для любого многочлена степени не выше $2n-1$:

$$\begin{aligned} d_0^{(n)} &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} G(z_r), \\ d_\nu^{(n)} &= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} G(z_r) \cos \frac{2r+1}{2n} \pi \nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь нетрудно выразить коэффициенты $b_k^{(n)}$ представления (19) через найденные значения d_ν :

$$b_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu^{(n)} T_\nu^{(k)}(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu^{(n)} \frac{T_\nu^{(k)}(0)}{k!}. \quad (21)$$

Итак, решение системы (18) найдено.

Укажем способ вычисления входящих в формулу (21) величин $T_\nu^{(k)}(0)/k!$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\nu = k, k+1, \dots, n-1$ (остальные, очевидно, равны нулю).

Утверждение 1. *Справедливы равенства*

$$\frac{T_n^{(r)}(0)}{r!} = \begin{cases} 0, & n-r \text{ — нечетное,} \\ (-1)^{\frac{n-r}{2}} \cdot 2^{r-1} \cdot \frac{n}{r} \cdot C_{(n+r)/2-1}^{(n-r)/2}, & n-r \text{ — четное,} \end{cases} \quad (22)$$

$$0 < r \leq n,$$

$$\begin{aligned} T_n(0) &= \begin{cases} 0, & n \text{ — нечетное,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ — четное,} \end{cases} \\ \sum_{r=0}^n \left| \frac{T_n^{(r)}(0)}{r!} \right| &= \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. Из представления $T_n(x)$ в виде

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(2x)^n + \sum_{m=1}^{[n/2]} (-1)^m (2C_{n-m}^m - C_{n-m-1}^m) (2x)^{n-2m} \right], \quad (24)$$

используя тождество

$$2C_p^q - C_{p-1}^q = \frac{p+q}{p-q} C_{p-1}^q,$$

легко получаем равенства (22). Далее, левая часть в формуле (23) равна сумме модулей коэффициентов разложения $T_n(x)$ по степеням x , и знаки коэффициентов чередуются, как видно из (24). Равенство (22) получается в результате подстановки $x = \sqrt{-1}$ в представление

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right]. \square$$

Известен следующий результат [11]:

Теорема 5. Если модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ функции f удовлетворяет условию Дини—Липшица

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) \ln \delta = 0,$$

то f разлагается в ряд по многочленам Чебышёва первого рода, равномерно сходящийся на отрезке $[-1, 1]$.

Предположим, что функция $G(z)$ представима рядом

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} T_{\nu}(z) \quad (25)$$

и выясним, с какой точностью коэффициенты этого ряда приближаются величинами (20).

Подстановка ряда (25) в первую формулу (20) дает

$$d_0^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m T_m(z_r) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \left(\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} T_m(z_r) \right).$$

Значение в последних скобках вычисляется с помощью формулы Мелера: оно равно нулю для $m = 1, 2, \dots, 2n - 1$ и единице для $m = 0$. Ее значение при $m = 2n$ отлично от нуля, следовательно,

$$d_0^{(n)} - d_0 = O(|d_{2n}|), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для остальных номеров имеем

$$\begin{aligned}
d_\nu^{(n)} &= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} G(z_r) \cos \frac{2r+1}{2n} \pi \nu = \\
&= \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m T_m(z_r) \right) \cos \frac{2r+1}{2n} \pi \nu = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} d_m \left(\frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} T_m(z_r) T_\nu(z_r) \right), \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1. \quad (26)
\end{aligned}$$

Индекс m представим в виде $m = 2nj + \mu$, где $-n+1 \leq \mu \leq n$, и вычислим

$$\begin{aligned}
T_m(z_r) &= \cos \left((2nj + \mu) \frac{2r+1}{2n} \pi \right) = \\
&= \cos \left(2nj \frac{2r+1}{2n} \pi \right) \cos \left(\mu \frac{2r+1}{2n} \pi \right) = (-1)^j T_{|\mu|}(z_r).
\end{aligned}$$

Теперь снова для вычисления значений в последних скобках в (26) применим формулу Мелера и с учетом ортогональности многочленов Чебышева из (26) получаем

$$d_\nu^{(n)} = d_\nu + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (d_{2nj-\nu} + d_{2nj+\nu}),$$

откуда следует равенство

$$d_\nu^{(n)} - d_\nu = O(|d_{2n-\nu}|), \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Как видно, с увеличением номера точность вычисления коэффициентов ряда (25) уменьшается.

Перейдем к изучению влияния погрешности задания $F(p)$ на приближенное решение в виде отрезка ряда (16)

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k^{(n)} \eta_k(t). \quad (27)$$

Утверждение 2. Пусть в узлах Фейера $z_k = \cos((2k+1)\pi/(2n))$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, значения функции $G(z_k)$ известны с погрешностью ε_k , причем $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$. Тогда возникающая при этом ошибка в

правой части (27) по модулю не превосходит величины $\varepsilon \cdot 10^{0.384n}$ для любого $t \geq 0$.

Доказательство. Обозначим через d'_ν ошибки вычисления $d_\nu^{(n)}$ по формулам (20), возникающие из-за ошибок ε_k . Очевидно, $|d'_0| \leq \varepsilon$. Далее, для $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеем

$$\left| \frac{nd'_\nu}{2} \right|^2 = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \cos \frac{2k+1}{2n} \pi \nu \right|^2 \leq n \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{2k+1}{2n} \pi \nu.$$

Последняя сумма равна $n/2$ и легко вычисляется по формуле Мелера для $f(z) = T_\nu(z)$. Следовательно, для всех ν выполняется неравенство $|d'_\nu| \leq \varepsilon \sqrt{2}$, и из (21) вытекает, что ошибка вычисления $b_k^{(n)}$ не превосходит значения $\varepsilon \sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} |T_\nu^{(k)}(0)/k!|$. В итоге, с учетом связи $b_k^{(n)} = (-1)^k \tilde{c}_k^{(n)} \sqrt{a}$, получаем, что ошибка вычисления правой части в формуле (27) не превосходит величины

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{T_\nu^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[(1 + \sqrt{2})^\nu + (1 - \sqrt{2})^\nu \right] < \\ &< \varepsilon \sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} (1 + \sqrt{2})^\nu = \varepsilon \left[(1 + \sqrt{2})^n - 1 \right] < \varepsilon \cdot 10^{0.384n}. \square \end{aligned}$$

Случай узлов Вандермонда. Узлами Вандермонда для круга $|z| \leq 1$ являются корни из единицы, т.е. точки $z_k = w^k$, $w = \exp(-2\pi i/n)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. На плоскости p им соответствуют точки мнимой оси

$$p_k = i \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}.$$

В случае четного n среди них находится и бесконечно удаленная точка.

Коэффициенты интерполяционного многочлена, как и ранее, находим из системы уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu^{(n)} z_k^\nu = G(z_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (28)$$

Умножим (26) на z_k^{-r} , $r = 0, 1, \dots, n-1$, и затем просуммируем их

по k от 0 до $n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} G(z_k) z_k^{-r} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu}^{(n)} z_k^{\nu} \right) z_k^{-r} = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu}^{(n)} \sum_{k=0}^{n-1} (w^{\nu-r})^k.$$

Последняя внутренняя сумма в силу свойств корней из единицы равна n при $\nu = r$ и нулю в остальных случаях, и поэтому решением системы (28) будут числа

$$b_{\nu}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} G(z_k) z_k^{-\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (29)$$

Из симметрии узлов интерполирования относительно вещественной оси вытекает, что для вещественной функции-оригинала эти числа вещественны.

Подстановка ряда (6) в (29) дает

$$\begin{aligned} b_{\nu}^{(n)} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z_k^m \right) z_k^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k^{m-\nu} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (w^{m-\nu})^k \right). \end{aligned}$$

Выражение в последних скобках при $m - \nu = nj$ равно единице и нулю в остальных случаях, и поэтому

$$b_{\nu}^{(n)} - b_{\nu} = \sum_{j=1}^{\infty} b_{\nu+nj} = O(|b_{\nu+n}|), \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Как видно, в отличие от узлов Фейера, теперь с ростом номера коэффициента точность их вычисления не уменьшается.

Утверждение 3. Пусть в узлах Вандермонда $z_k = w^k$ значения функции $G(z_k)$ известны с погрешностью ε_k , причем $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$. Тогда возникающая при этом ошибка в правой части (27) по модулю не превосходит величины $n\varepsilon$ для любого $t \geq 0$.

Доказательство этого утверждения формально проводится так же, как и для узлов Фейера, хотя оно очевидно следует из представления (29).

§ 4. Ряды Лагерра и ускорение сходимости с применением преобразования Эйлера—Кноппа

Для суммирования слабосходящихся рядов принято исходный ряд заменять другим, сходящимся к той же сумме быстрее. Такие преобразования получили популярность со времен Эйлера. Метод суммирования $(E, 1)$, который применял Эйлер, получил развитие у многих исследователей. Одним из первых обобщений было нелинейное преобразование исходного ряда:

$$\hat{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-z} \right)^k \Delta^k a_0,$$

где Δ^k — оператор конечной разности порядка k . Метод $(E, 1)$ получается из последнего при $z = -1$. Дальнейшее обобщение этого преобразования приводит к методу Эйлера—Кноппа, состоящему на самом деле в дробно-линейном отображении исходного степенного ряда.

Теорема 6 (см. [66]). Пусть дана последовательность $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ и

$$A_k(\tau) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\tau)^{k-j} a_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) \frac{z^k}{(1-\tau z)^{k+1}}$$

для всех значений z и τ , при которых элементы сумм существуют и ряды сходятся.

Эта теорема не даёт ответа на вопрос, при каких значениях параметра τ из сходимости исходного ряда следует сходимость преобразованного. Также неизвестно, какой ряд предпочтительнее для вычисления в пересечении их областей сходимости. А так как данное преобразование мы будем использовать для ускорения сходимости степенного ряда, необходимо описать множество значений параметра τ , при которых область сходимости преобразованного ряда содержит круг сходимости исходного. При этом мы будем говорить, что преобразование Эйлера—Кноппа регулярно. Заметим,

это понятие шире рассматриваемого обычно в теории суммирования рядов.

В этом параграфе геометрически описано множество значений параметра τ , обеспечивающих свойство регулярности метода суммирования Эйлера—Кнопша. Эти результаты изложены частично в работах [18, 19].

Пусть $A(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k(\tau)|^{1/k}$. Тогда область сходимости преобразованного ряда определяется неравенством

$$A(\tau) \left| \frac{z}{1 - \tau z} \right| < 1. \quad (30)$$

Для дальнейшего нам понадобится

Утверждение 4. *Справедлива формула*

$$A(\tau) = \max_j \left| \frac{1}{z_j} - \tau \right|,$$

где z_j — особые точки функции $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Доказательство. В самом деле, записав преобразованный ряд в виде

$$\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) \frac{1}{(1/z - \tau)^{k+1}},$$

мы видим, что $(A(\tau))^{-1}$ есть радиус круга сходимости в плоскости (w) при отображении $w = z/(1 - \tau z)$. Также ясно, что

$$A(\tau) = \min_j \left| \frac{1}{1/z_j - \tau} \right|,$$

откуда следует утверждение леммы. \square

С учетом утверждения 4 неравенство (30) преобразуется к виду

$$\max_j \left| \frac{1}{z_j} - \tau \right| \left| \frac{z}{1 - \tau z} \right| < 1.$$

Обозначим $t = 1/z$ и запишем наше неравенство в виде $|t - \tau| > A(\tau)$. В плоскости (t) оно определяет внешность круга с центром в точке τ , содержащего все особые точки $t_j = 1/z_j$. Чем меньше радиус этого круга, тем больше площадь соответствующего круга в плоскости (z) .

Исходный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится в круге $|z| < |z_0|$, где z_0 — ближайшая к началу координат особая точка $\varphi(z)$. Преобразованный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) z^k (1 - \tau z)^{-k-1}$ сходится в круге $|\tau - 1/z| > A(\tau)$.

Нужно найти значения τ , при которых $\{|1/z - \tau| > A(\tau)\} \supset \{|z| < |z_0|\}$, или, что то же самое, $\{|1/z - \tau| \leq A(\tau)\} \subset \{|1/z| \leq 1/|z_0|\}$. Очевидно, это те значения, которые определяются из неравенства

$$A(\tau) + |\tau| \leq 1/|z_0|. \quad (31)$$

Если $\tau = 0$, то $A(\tau) = 1/|z_0|$, поэтому это неравенство определяет непустое множество.

Если z_0 — единственная (комплексная) особенность, то множество M есть отрезок $[0, 1/z_0]$, $\min_M A(\tau)$ достигается при $\tau = 1/z_0$. Если на отрезке $[-1/z_0, 1/z_0]$ есть другие особенности, то $M = [0, a]$, где $a = (1/z_0 + 1/z_1)/2$, а z_1 определяется из условия

$$\left| \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1} \right| = \max_j \left| \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_j} \right|.$$

При этом $\min_M A(\tau)$ достигается на $\tau = a$. В частности, если $\varphi(z)$ имеет особенности в диаметрально противоположных точках z_0 и $-z_0$, а все остальные лежат на прямой $0z_0$ с выкинутым отрезком $[-z_0, z_0]$, то $M = \{0\}$.

Пусть все точки t_j содержатся в круге $K(0, r)$. Для описания множества M в общем случае расположения особенностей поступим следующим образом. Опишем для каждой особой точки t_j множество $S(t_j)$ значений τ , при которых круг $|t - \tau| \leq A(\tau)$ лежит в круге $K(0, r)$. Пока речь идет о точке t_j , будем считать, что других особых точек нет. Затем найдем пересечение этих множеств по всем особым точкам, которое и будет искомым множеством M .

Итак, пусть заданы точка t_j и радиус r . Так как других точек нет, то $A(\tau) = |t_j - \tau|$ и нужно обеспечить включение

$$\{|t - \tau| \leq |t_j - \tau|\} \subset \{|t| \leq r\}.$$

Отсюда видно, что граница множества $S(t_j)$ состоит из центров окружностей, которые касаются окружности $|t| = r$ и проходят через точку t_j . Пусть $\tau \in \partial S(t_j)$. Точка соприкосновения окружностей $|t - \tau| = |t_j - \tau|$ и $|t| = r$ лежит на радиус-векторе, проходящем через точку $t = \tau$. Следовательно, $|\tau| + |t_j - \tau| = r$ при $\tau \in \partial S(t_j)$.

Последнее равенство есть, на самом деле, уравнение эллипса с фокусами 0 и t_j , длина большой оси которого равна r . Концы отрезка большой оси $[\xi_j, \eta_j]$ можно найти по формулам

$$\xi_j = \left(1 + \frac{r}{|t_j|}\right) \frac{t_j}{2}, \quad \eta_j = \left(1 - \frac{r}{|t_j|}\right) \frac{t_j}{2}.$$

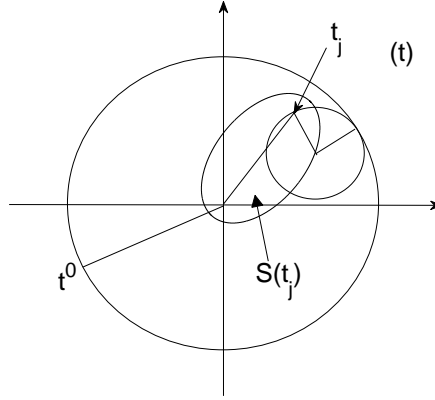


Рис. 1: К нахождению множества M

Пересечение полученных эллипсов и есть множество M . Пусть $t^0 = \arg \max_j |t_j|$, $t_j = 1/z_j$, z_j — особенности $\varphi(z)$. Из равенств $r = |t^0|$ и $S(t^0) = [0, t^0]$, следует, что $M = \bigcap_j S(t_j) = [0, \alpha t^0]$, где $0 \leq \alpha \leq 1$. Пояснению геометрии изложенного по части нахождения множества M служит рис. 1.

Утверждение 5. Если при данном значении τ суммирование регулярно, то $|a_k| = O\left((|\tau| + A(\tau))^k\right)$.

Доказательство. В самом деле, введя оператор сдвига $E : a_j = E a_{j-1}$, представим $A_k(\tau)$ в виде

$$A_k(\tau) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\tau)^{k-j} E^j a_0 = (E - \tau)^k a_0.$$

Из определения числа $A(\tau)$ сразу получаем, что

$$|(E - \tau)^k a_0| = O\left((A(\tau))^k\right).$$

Остается еще раз воспользоваться оператором E :

$$\begin{aligned}
|a_k| &= |E^k a_0| = |(E - \tau + \tau)^k a_0| = \\
&= \left| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \tau^{k-j} (E - \tau)^j a_0 \right| \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\tau|^{k-j} |(E - \tau)^j a_0| = \\
&= O\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\tau|^{k-j} (A(\tau))^j\right) = O\left((|\tau| + A(\tau))^k\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 7. *Суммирование Эйлера—Кноппа с параметром τ регулярно тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

- 1) $\tau = \alpha t^0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$
- 2) $|\tau| + A(\tau) = |t^0|, \quad A(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k(\tau)|^{1/k} = \max_j |t_j - \tau|.$

Доказательство. Очевидно, из второго утверждения теоремы следует первое, но такая формулировка удобнее для дальнейшего использования. Достаточность второго условия следует из определяющего неравенства (31) для множества M . Остается показать, что на множестве M неравенство $|\tau| + A(\tau) < |t^0|$ не имеет места.

Из утверждения 5 следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{(|\tau| + A(\tau))^k} = C < \infty. \quad (32)$$

Учитывая равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = |t^0|$, из (32) получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|t^0|^k}{(|\tau| + A(\tau))^k} = C. \quad (33)$$

Из (33) следует, что неравенство $|\tau| + A(\tau) < |t^0|$ на M не выполняется, так как его следствие $C = \infty$ противоречит утверждению 6. Отсюда и из неравенства (31) следует доказываемое утверждение. \square

Фактически мы доказали также, что функция $\eta_\varphi(\tau) = |\tau| + A(\tau)$ достигает абсолютного минимума на M , т. е.

$$M = \{\tau \mid \inf_q \eta_\varphi(q) = \eta_\varphi(\tau)\}.$$

Перейдем к вычислению коэффициентов преобразованного ряда.

Коэффициенты a_k могут быть получены как коэффициенты разложения Тейлора функции $\varphi(z)$:

$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Но эта формула неустойчива при вычислениях. Вместо нее обычно применяют приближенные методы вычисления a_k (см., например, [2]). Один из них основан на построении интерполяционного процесса для функции $\varphi(z)$. Узлы интерполирования выбирают так, чтобы обеспечить равномерную сходимость многочленов к предельной функции на некотором множестве, выбор которого диктуется постановкой задачи. Часто в качестве узлов для многочлена n -й степени берут корни из единицы $(n+1)$ -й степени. Это обеспечивает равномерную сходимость интерполяционного процесса внутри единичного круга и позволяет привлечь к нахождению коэффициентов и оценке их погрешности хорошо развитые методы гармонического анализа.

Значения $A_k(\tau)$, которые нам и нужны, находятся затем по формуле, приведенной в теореме 6. При этом происходит излишняя потеря точности. Чтобы избежать этого, введем новую переменную $w = z/(1 - \tau z)$ и запишем

$$\varphi(z) = \varphi\left(\frac{w}{1 + \tau w}\right) = (1 + \tau w) \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) w^k.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(w) = \frac{1}{1 + \tau w} \varphi\left(\frac{w}{1 + \tau w}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) w^k.$$

При требовании регулярности преобразования Эйлера—Кнопша выполнено неравенство $|\tau| \leq |t^0| < 1$ и на замкнутом круге $|w| \leq 1$ коэффициент $1/(1 + \tau w)$ регулярен. Далее, при отображении $z = w/(1 + \tau w)$ круг $|w| \leq 1$ переходит в “круг” $|\tau - 1/z| \geq 1$. В плоскости (t) (при отображении $t = 1/z$) ему соответствует “круг” $|t - \tau| \geq 1$. Вспомним, что все особые точки t_j функции $\varphi(1/t)$ содержатся в пересечении кругов $K(\tau, A(\tau)) = \{t \mid |t - \tau| \leq A(\tau)\}$ и $K(0, |t^0|) =$

$\{t \mid |t| \leq |t^0|\}$. Также ясно, что если $\tau \in M$, то $A(\tau) \leq |t^0| < 1$. Отсюда получаем, что при требовании регулярности суммирования Эйлера—Кноппа все точки t_j принадлежат кругу $|t - \tau| < 1$ и функция $\Phi(w)$ регулярна в круге $|w| \leq 1$. Это позволяет применять те же средства нахождения коэффициентов $A_k(\tau)$, которые используются для вычисления коэффициентов исходного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \varphi(z)$. При этом сокращается и объем вычислений и погрешность, возникающая при вычислении чисел $A_k(\tau)$ через медленно сходящиеся a_k .

Далее мы будем решать задачу ускорения сходимости ряда Лагерра, где используется описанная схема вычисления коэффициентов преобразования Эйлера—Кноппа. Наилучшее значение параметра $\tau_{\text{опт}}$ при этом определяется как решение задачи безусловной (без требования регулярности метода Эйлера—Кноппа) минимизации

$$\tau_{\text{опт}} = \arg \min \frac{A(\tau)}{|1 - \tau|}.$$

Мы убедимся, что $|\tau_{\text{опт}}| \leq 1$ и даже $|\tau_{\text{опт}}| \leq |t^0|$ (последнее — без доказательства). Тогда вышеописанные рассуждения сохраняют силу и законно применять ту же схему нахождения коэффициентов $A_k(\tau)$.

Здесь мы построили и обосновали схему вычисления коэффициентов преобразования Эйлера—Кноппа, в которой количество операций и ошибки округления существенно сокращаются по сравнению с прямым вычислением по формуле теоремы (6). Эта схема применима, когда на множестве узлов интерполяционного процесса сумма исходного ряда известна точно или приближенно. Такая ситуация имеет место, например, при вычислении коэффициентов преобразованного ряда Лагерра (см. ниже) с использованием значений заданного изображения Лапласа. Без обоснования этот прием вычисления коэффициентов был предложен в статье [19].

Итак, пусть дано изображение

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p > \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (34)$$

Оригинал разложим в ряд по многочленам Лагерра:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(bt), \quad (35)$$

где b — положительный параметр, $b > 2\lambda$. Подставив (35) в (34), получим формальное равенство

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(p-b)^k}{p^{k+1}}. \quad (36)$$

Предположим, что $pF(p)$ регулярна в окрестности бесконечности. Отображением $z = (p-b)/p$ преобразуем ряд (36) в степенной:

$$pF(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(p-b)^k}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \varphi(z). \quad (37)$$

Из предположения регулярности функции $pF(p)$ в окрестности бесконечности и условия $b > \max\{0, 2\lambda\}$ следует, что функция $\varphi(z)$ регулярна в некотором круге $|z| < r$ радиусом $r > 1$.

Преобразование Эйлера—Кноппа ряда (37) имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) \frac{z^k}{(1-\tau z)^{k+1}}, \quad A_k(\tau) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\tau)^{k-j} a_j.$$

Теорема 8. Пусть функция-оригинал $f(t)$ представима в виде (35), а параметр τ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} \tau < 1$. Тогда

$$f(t) = \exp\left(\frac{b\tau t}{\tau-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(\tau)}{(1-\tau)^{k+1}} L_k\left(\frac{bt}{1-\tau}\right).$$

Детальному доказательству приведённых утверждений и оптимальному выбору параметра τ (в случае комплекснозначного оригинала он комплексный) с целью ускорения сходимости исходного ряда посвящена работа [20], к которой мы и отсылаем заинтересованного читателя.

§ 5. Обращение преобразования Лапласа при помощи рядов по обобщённым функциям Лагерра

Пусть при некотором $s \geq 1$ функция $\varphi_s(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и пусть существуют значения $f(+0), f(+\infty), \varphi_s(\infty)$.

Дальнейшее изложение является обобщением выше изложенного материала, соответствующего случаю $s = 1$.

Пусть $s > 1$. Напишем тождество

$$\varphi_s(p) = p^{s-1} (pF(p))$$

и устремим в нём p к бесконечности: слева в пределе имеем конечное значение $\varphi_s(\infty)$, второй сомножитель справа равен $f(+0)$, а первый неограниченно возрастает. Следовательно, $f(0) = 0$. Далее, предположим, что $f'(t)$ также является оригиналом. Преобразования Лапласа $f(t)$ и $f'(t)$ связаны соотношением $L(f') = pL(f) - f(0)$. Но $f(0) = 0$, а $f'(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pL(f') = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 F(p)$. Если $s > 2$, то из представления

$$\varphi_s(p) = p^{s-2} (p^2 F(p))$$

аналогично предыдущим рассуждениям получаем $f'(0) = 0$ и т. д. Следовательно, точка $t = 0$ будет корнем кратности $s - 1$, т. е. при $t \approx 0$ будет $f(t) \approx Ct^{s-1}$.

Однако, функции Лагерра (2) таким свойством не обладают, и поэтому надеяться на то, что отрезок ряда по ним точно учитывает характер поведения оригинала при $t \approx 0$, не приходится. Следовательно, желательно иметь систему функций, все элементы которой заранее учитывают эту особенность оригинала. Отметим, что функции Лагерра при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, поэтому естественно считать выполненным условие $f(+\infty) = 0$. Если это не так, введём новый оригинал $f_1(t) = f(t) - f(+\infty)$. Однако такая замена изменяет поведение оригинала в нуле. Очевидно, функция

$$f_1(t) = f(t) - f(+\infty)(1 - e^{-t})^n$$

при любом $n \geq s - 1$ имеет точку $t = 0$ корнем кратности не менее $s - 1$.

Введём в рассмотрение две системы функций

$$\varphi_n(t) = e^{-t/2} t^{\alpha/2} L_n(t, \alpha), \quad (38)$$

$$\psi_n(t) = e^{-t/2} t^\alpha L_n(t, \alpha), \quad \alpha \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (39)$$

где $L_n(t, \alpha)$ — многочлены Лагерра (8).

Системы функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^\infty$, $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^\infty$ полны в $L_2(0, \infty)$ [53]. При $\alpha = 0$ обе системы совпадают с обычными функциями Лагерра (2). Скалярное произведение функций (41) легко вычисляется [53]:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha L_n(t, \alpha) L_m(t, \alpha) dt = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n} \delta_{nm}.$$

Следовательно, при любом $a > 0$ система функций

$$\eta_n^\varphi(t) = \sqrt{a} \varphi_n(at) \Big/ \sqrt{\Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}}$$

полна и ортонормирована в $L_2(0, \infty)$.

Лемма 1. *Изображение функции $t^\beta L_n(t, \alpha)$ равно*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-p t} t^\beta L_n(t, \alpha) dt &= \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} p^{-\beta-1} \times \\ &\times {}_2F_1 \left(-n, \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1}{p} \right), \quad (40) \end{aligned}$$

где

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

есть гипергеометрический ряд.

Доказательство. Интегрируя тождество

$$t^\beta L_n(t, \alpha) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n + \alpha) \cdots ((n + \alpha) - (n - k) + 1)}{(n - k)!} \cdot \frac{t^{k+\beta}}{k!}$$

после домножения его на $e^{-p t}$ в пределах от 0 до ∞ и осуществляя очевидные преобразования, искомое изображение последовательно записываем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+\alpha) \cdots (k+\alpha+1)}{(n-k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{k! p^{k+\beta+1}} = \\
& = p^{-\beta-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{(n-k)! k!} \cdot \frac{1}{p^k} = \\
& = p^{-\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} p^{-k} \times \\
& \quad \times \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} = \\
& = p^{-\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\beta+1)_k (1/p)^k}{(\alpha+1)_k k!} = \\
& = p^{-\beta-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} {}_2F_1 \left(-n, \beta+1, \alpha+1, \frac{1}{p} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 2. Скалярное произведение функций системы (39) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha} L_n(t, \alpha) L_m(t, \alpha) dt = \\
&= (-1)^{m+n} \Gamma(2\alpha+1) \binom{m+\alpha}{n} \binom{n+\alpha}{m}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Доказательство. Исходя из определения (39), имеем

$$(\psi_n, \psi_m) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m+\alpha}{m-k} \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha+k} L_n(t, \alpha) dt. \quad (42)$$

Воспользуемся формулой (40) при $p = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\beta L_n(t, \alpha) dt = \frac{\Gamma(\beta+1) \Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} {}_2F_1(-n, \beta+1, \alpha+1, 1),$$

Последовательно применяя рекуррентное соотношение

$${}_2F_1(a-1, b, c, 1) = \frac{c-b-a}{c-a} {}_2F_1(a, b, c, 1),$$

для натурального n получим тождество

$${}_2F_1(-n, b, c, 1) = \frac{(c-b) \cdots (c-b+n-1)}{c \cdots (c+n-1)}, \quad (43)$$

в силу чего имеем

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\beta L_n(t, \alpha) dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{n!} (\alpha-\beta) \cdots (\alpha-\beta+n-1). \quad (44)$$

Следовательно, входящие в правую часть (42) интегралы можно вычислить по формуле (41) при $\beta = 2\alpha + k$. Теперь, обозначив a_k общий член суммы в (42), устанавливаем рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = a_k \frac{(-m+k)(2\alpha-k+1)}{(-n+\alpha+1+k)(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Если $a_0 \neq 0$ (что имеет место при нецелом α или целом α , большем $n-1$), то искомая величина равна

$$\sum_{k=0}^m a_k = a_0 \cdot {}_2F_1(-m, 2\alpha+1, -n+\alpha+1, 1),$$

и далее остаётся снова применить формулу (43), после чего сравнение левой и правой части в (41) не составляет труда. Аналогично проводятся вычисления и в случае, когда первое отличное от нуля слагаемое в (42) есть a_j при $j > 0$.

З а м е ч а н и е 5. Приводимые в [9] на с. 859 и в других руководствах по операционному исчислению формулы вычисления произведений (ψ_n, ψ_m) неверны.

При любом $a > 0$ система функций

$$\eta_n^\psi(t) = \sqrt{a} \psi_n(at) \frac{n! \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1) \sqrt{\Gamma(2\alpha+1)}}$$

полна и нормирована в $L_2(0, \infty)$. Заметим, что она ортогональна лишь при $\alpha = 0$, а в случае натурального α матрица Грама этой системы будет $(2\alpha+1)$ -диагональной, как это следует из (41). Все функции систем (41), (42) имеют точку $t = 0$ корнем кратности $\alpha/2$ или α , соответственно, так что следует полагать $\alpha/2 = s-1$, либо

$\alpha = s - 1$, где s — любое положительное число, не превосходящее скорости убывания изображения при $p \rightarrow \infty$.

Лемма 3. Системы функций $\{\eta_n^\varphi(t)\}$, $\{\eta_n^\psi(t)\}$ равномерно ограничены при любом $a > 0$, т. е. существует постоянная $M < \infty$ такая, что

$$|\eta_n^\varphi(t)| \leq M, \quad |\eta_n^\psi(t)| \leq M, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением второй системы, ибо для первой системы никаких отличий в доказательстве нет.

Теорема Сегё (см. [53], с. 250) утверждает, что при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\max_{t \geq 0} e^{-t/2} t^\lambda |L_n(t, \alpha)| \sim n^Q,$$

причём

$$Q \leq \max \left\{ \lambda - \frac{1}{3}, \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \right\}.$$

При $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\Gamma(n + \alpha + 1) \sim n! (n + 1)^\alpha,$$

и из определения функций $\eta_n^\psi(t)$ следует

$$\max_{t \geq 0} |\eta_n^\psi(t)| = O(n^{Q-\alpha}).$$

Но $Q - \alpha < 0$, откуда и следует утверждение леммы. \square

Перейдём к задаче построения искомого оригинала в виде рядов по системам $\{\eta_n^\varphi(t)\}$, $\{\eta_n^\psi(t)\}$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\varphi \eta_k^\varphi(t), \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\psi \eta_k^\psi(t)$$

и выбору оптимального значения параметра a , входящего в определение систем функций, в зависимости от свойств данного изображения $F(p)$.

Сначала рассмотрим систему функций $\eta_n^\psi(t)$.

Положим $\alpha = s - 1$ и предположим, что искомый оригинал $f(t)$ представим в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\psi} \eta_k^{\psi}(t), \quad (45)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{\psi}| < \infty$.

В силу леммы 2 ряд (45) сходится абсолютно и равномерно на любом $[0, T]$, $T > 0$, при любом $a > 0$, так что его преобразование Лапласа равно

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\psi} L(\eta_k^{\psi}(t)) = F(p). \quad (46)$$

Преобразование Лапласа функции $t^{\alpha} L_n(t, \alpha)$ легко вычисляется с использованием представления (44) при $\beta = \alpha$ и равно

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha} L_n(t, \alpha) dt = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \left(\frac{p-1}{p} \right)^n p^{-\alpha-1}.$$

Теперь находим изображение функций η_k^{ψ} :

$$L(\eta_k^{\psi}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\Gamma(2\alpha + 1)}} \left(\frac{p/a - 0.5}{p/a + 0.5} \right)^k \frac{1}{(p/a + 0.5)^{\alpha+1}}.$$

Запишем равенство (43) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\psi} \left(\frac{a/2 - p}{a/2 + p} \right)^k = \left(p + \frac{a}{2} \right)^{\alpha+1} F(p),$$

где

$$b_k^{\psi} = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\Gamma(2\alpha + 1)}} a^{\alpha-1/2} c_k^{\psi}.$$

Как и ранее, положим $z = (a/2 - p)/(a/2 + p)$ и введём функцию

$$G(z) = \left(p + \frac{a}{2} \right)^{\alpha+1} F(p) \Big|_{p=\frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z}} = \left(\frac{a}{1+z} \right)^{\alpha+1} F\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right).$$

В итоге приходим к уравнению

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\psi} z^k,$$

полностью аналогичному уравнению (6), полученному ранее в случае $\alpha = 0$. Поэтому все полученные ранее в § 1 утверждения для обычных функций Лагерра, в частности, о выборе оптимального параметра a и способах определения коэффициентов рядов, справедливы и в нашем случае.

Пусть теперь искомым оригинал $f(t)$ представим в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\varphi} \eta_k^{\varphi}(t),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{\varphi}| < \infty$. Применяя формулу (40) для вычисления изображений функций $\eta_k^{\varphi}(t)$, снова получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\varphi} z^k = G(z) \equiv \left(\frac{a}{1+z} \right)^{\alpha/2+1} F \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right). \quad (47)$$

В отличие от предыдущего случая коэффициент b_k^{φ} связан со всеми $c_0^{\varphi}, \dots, c_k^{\varphi}$, как следует из (40).

Допустим, мы нашли приближенные значения коэффициентов $b_0^{\varphi}, \dots, b_n^{\varphi}$. Зная b_n^{φ} , мы сможем найти c_n^{φ} , после чего, “выбросив” из $b_0^{\varphi}, \dots, b_{n-1}^{\varphi}$ составляющие “вдоль” $\eta_n^{\varphi}(t)$, аналогично найдем c_{n-1}^{φ} , и т. д. Изображение $\eta_n^{\varphi}(t)$ входит в левую часть (47) в виде слагаемого (с коэффициентом ${}_2F_1(-n, \alpha/2 + 1, \alpha + 1, z)$), содержащего все степени $z^i, i = 0, 1, \dots, n$. Если $\alpha = 0$, то ${}_2F_1(-n, 1, 1, z) = (1-z)^n$. Следовательно, ошибка вычисления c_n^{φ} войдет в значения остальных коэффициентов с биномиальными коэффициентами. На следующем шаге характер распространения ошибки сохранится. В итоге погрешность вычисления коэффициентов c_k^{φ} может оказаться недопустимо большой. В случае $\alpha \neq 0$ картина качественно не меняется. Численные эксперименты подтвердили неустойчивость этой процедуры.

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

§ 1. Интерполяционные квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа

1.1. Дано уравнение

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt = F(p),$$

где $f(t)$ — искомая функция-оригинал, а $F(p)$ — её изображение по Лапласу. Как известно, изображение $F(p)$ регулярно в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$. Далее будем считать $\gamma = 0$, чего всегда можно добиться сдвигом по p за счет домножения оригинала на соответствующую экспоненту.

Как известно, обращение преобразования Лапласа задается интегралом Римана—Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad c > 0, \quad t > 0.$$

Напомним, что интеграл понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t .

Положим в формуле обращения $p = c + i\tau$, тогда $\exp(pt) = \exp(ct) \exp(i\tau t)$. При фиксированном t первый сомножитель постоянен, а второй пробегает единичную окружность на комплексной плоскости бесконечное число раз. С ростом t первый сомножитель и скорость пробега окружности вторым сомножителем неограниченно возрастают, так что попытка приблизить интеграл римановыми суммами вряд ли приведет к цели. Например, в простейшем случае для $f(t) = 1$ имеем $F(p) = 1/p$, так что при любом $c > 0$ сомножитель $\exp(ct)$ быстро растет с увеличением t , однако оригинал постоянен и не зависит от c .

Итак, пусть $F(p)$ регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ наряду с функцией $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ при некотором $s > 0$ и пусть

существует значение $\varphi_s(\infty)$. Запишем формулу обращения преобразования Лапласа в виде интеграла Римана—Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p) dp, \quad c > 0. \quad (1)$$

Предположим, что оригинал $f(t)$ с достаточной точностью может быть приближен линейной комбинацией функций $f_1(t), \dots, f_n(t)$, изображения которых известны и равны $F_1(p), \dots, F_n(p)$. Положим $\Phi_k(p) = p^s F_k(p)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Теперь выберем произвольным образом попарно различные точки p_1, \dots, p_n в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и построим интерполяционный “многочлен” для функции $\varphi_s(p)$ по её значениям $\varphi_s(p_1), \dots, \varphi_s(p_n)$ относительно системы $\Phi_1(p), \dots, \Phi_n(p)$, т. е. положим

$$\varphi_s(p) \approx \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(p), \quad (2)$$

а коэффициенты c_k определим из условий

$$\varphi_s(p_j) = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(p_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Например, в случае $f_k(t) = t^{s+k-2}$ получаем $\Phi_k(p) = p^{1-k}$ и формула (2) имеет вид

$$\varphi_s(p) \approx \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(p) = \sum_{k=1}^n l_k \left(\frac{1}{p} \right) \varphi_s(p_k), \quad (3)$$

где

$$l_k(x) = \omega_k(x)/\omega_k(x_k), \quad \omega_k(x) = \omega(x)/(x-x_k), \quad \omega(x) = \prod_{k=1}^n (x-x_k), \\ x = 1/p, \quad x_k = 1/p_k.$$

После подстановки правой части формулы (3) в (1) получим квадратурную формулу (КФ)

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n A_k(t) \varphi_s(p_k) \quad (4)$$

с коэффициентами

$$A_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} l_k \left(\frac{1}{p} \right) dp. \quad (5)$$

По построению формула точна для функций $f_k(t) = t^{s+k-2}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и потому коэффициенты (5) имеют вид $t^{s-1} P_{n-1,k}(t)$, где $P_{n-1,k}(t)$ — некоторый многочлен степени не выше $n-1$, однозначно определяемый узлами p_1, \dots, p_n . Назовем её интерполяционной КФ (ИКФ).

1.2. Естественно поставить вопрос о том, нельзя ли за счет специального выбора узлов повысить степень точности (вообще говоря, узлы могут зависеть от t), и если можно, то на сколько единиц? Оказывается, что более, чем на n единиц нельзя увеличить степень точности (доказательство этого утверждения в более общем случае приведено далее в гл.4 § 3).

Теорема 1. Для того чтобы формула (4) была точна для функций $\varphi_s(p) = p^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$, необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1) формула (4) интерполяционная, т. е. её коэффициенты вычисляются по формуле (5),

2) выполняются условия “ортогональности”

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \omega \left(\frac{1}{p} \right) p^{-k} dp = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

где

$$\omega \left(\frac{1}{p} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k} \right). \quad (7)$$

Доказывается эта теорема так же, как и для классических квадратурных формул типа Гаусса (см., напр., [22]), и имеется в книге [25]. Здесь мы его не приводим, поскольку далее будет доказано более общее утверждение.

Итак, существование квадратурной формулы наивысшей степени точности (КФНСТ) обращения преобразования Лапласа сводится к существованию многочлена (7), удовлетворяющего условию (6).

Положив $z = pt$, $q_k = p_k t$, перепишем условие (6) в виде

$$\int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} e^z z^{-s} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q_1} \right) \cdots \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q_n} \right) z^{-k} dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Далее будет показано (см. также [25]), что многочлен

$$\omega_n \left(\frac{1}{z} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{q_k} \right)$$

с точностью до постоянного сомножителя совпадает с многочленом

$$P_n^s \left(\frac{1}{z} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k z^{-k},$$

корни которого, как будет далее показано, попарно различны и лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

В записи многочлена P_n^s использован символ Похгаммера

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ a(a+1) \cdots (a+k-1), & k \geq 1. \end{cases}$$

Следовательно, КФНСТ вида (4) существует и единственна, и её узлы попарно различны и представимы в виде $p_k = q_k t$, где q_k — корни уравнения $P_n^s(1/q) = 0$. Коэффициенты КФНСТ вычисляем по формуле (5):

$$A_k(t) = \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^z z^{-s} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1/z - 1/q_j}{1/q_k - 1/q_j} dz = B_k t^{s-1}.$$

Итак, КФНСТ имеет вид

$$f(t) \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^n B_k \varphi_s \left(\frac{q_k}{t} \right). \quad (8)$$

Её коэффициенты можно найти как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n B_k q_k^{-m} = \frac{1}{\Gamma(s+m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (9)$$

эквивалентной, как нетрудно проверить, условию интерполяционности квадратурной формулы. Очевидно, эта система однозначно разрешима в силу попарной различности чисел q_k . Заметим, что на самом деле условия (9) выполняются для $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

1.3. Сравним между собой ИКФ (4) и КФНСТ (8).

Пусть сначала $s = 1$. Если узлы ИКФ (4) не зависят от t , то правая часть в формуле (4) есть многочлен степени $n - 1$, неограниченно возрастающий по модулю при $t \rightarrow \infty$. Однако искомый оригинал может себя вести совсем иначе, например, иметь предельные значения $f(+0), f(+\infty)$, которые не получаются из правой части (4) при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow +\infty$, соответственно. Формула (8) даёт верные результаты как при $t \rightarrow 0$, так и при $t \rightarrow \infty$, поскольку $\sum_{k=1}^n B_k = 1$ (см. (9)) и $\varphi_1(0) = f(\infty)$, $\varphi_1(\infty) = f(0)$. Дело здесь в том, что зависимость приближённого решения (4) от t входит лишь в коэффициенты, но не входит в $\varphi_s(p)$, что неестественно, хотя бы с учётом тауберовых теорем (см. [72], [37]), ибо поведение оригинала при малых t определяется поведением изображения при больших по модулю p , и наоборот: поведение оригинала при больших t определяется поведением изображения при малых по модулю p . А в формуле (8) аргумент t определяет привлекаемые к вычислениям значения изображения в полном соответствии с названными теоремами.

Пусть теперь $s \neq 1$. Если функция $\varphi_s(p)$ регулярна при $p \rightarrow \infty$, то выбор в качестве s скорости убывания изображения $F(p)$ при $p \rightarrow \infty$ означает максимальный учёт гладкости оригинала в окрестности точки $t = 0$ (эта точка будет корнем оригинала кратности $s - 1$ (см. [39])), что и делает первый сомножитель справа в (8), однако при $t \rightarrow \infty$ никаких априорных ограничений на поведение оригинала при этом не накладывается.

Поясним это подробнее на примере КФНСТ с одним узлом:

$$f(t) \approx f_s(t) = \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} \varphi_s\left(\frac{s}{t}\right). \quad (10)$$

Возьмём функцию-оригинал $f(t) = (1 - e^{-t})^3$, его изображение равно $F(p) = 6/p(p+1)(p+2)(p+3)$. Очевидно, точка $t = 0$ — трёхкратный корень оригинала и $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$. Рассмотрим случаи $s = 1, 2, 3, 4$. По формуле (10) находим приближённые

оригиналы

$$\begin{aligned}f_1(t) &= 6t^3/(1+t)(1+2t)(1+3t), \\f_2(t) &= 6t^3/(1+t)(2+t)(2+3t), \\f_3(t) &= 9t^3/(1+t)(3+t)(3+2t), \\f_4(t) &= 32t^3/(2+t)(4+t)(4+3t),\end{aligned}$$

откуда при $t \rightarrow 0$ получаем $f_1(t) \approx 6t^3$, $f_2(t) \approx 1.5t^3$, $f_3(t) \approx t^3$, $f_4(t) \approx t^3$, а при $t = \infty$ имеем $f_1(\infty) = 1$, $f_2(\infty) = 2$, $f_3(\infty) = 4.5$, $f_4(\infty) = 32/3$. Как видно, с ростом s в окрестности нуля приближение к оригиналу улучшается, а в окрестности точки $t = \infty$, наоборот, ухудшается.

В общем случае за счёт выбора s можно добиваться определённого поведения приближённого решения в окрестности точек $t = 0$ и $t = \infty$ (заметим, что при построении других методов обращения допустимы и отрицательные значения s).

Оказывается, многочлены $P_n^s(x)$, определяющие КФНСТ (8), обладают теми же свойствами, что и классические ортогональные многочлены Эрмита, Лагерра, Якоби [56].

1.4. Пусть даны две различные ИКФ обращения преобразования Лапласа вида (8) при $s = 1$:

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_1(p_k/t) \equiv S_n(f, t), \quad f(t) \approx \sum_{k=1}^n B_k \varphi_1(q_k/t) \equiv T_n(f, t),$$

точные для функций $f_k(t) = t^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Используя исходное уравнение

$$\int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt = F(p),$$

запишем их правые части в виде сингулярных интегралов

$$\begin{aligned}S_n(f, t) &= \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n A_k p_k t^{-1} \exp(-xp_k/t) \right] f(x) dx, \\T_n(f, t) &= \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^n B_k p_k t^{-1} \exp(-xp_k/t) \right] f(x) dx.\end{aligned}$$

С помощью известного соотношения

$$\int_0^\infty e^{-px} x^n dx = n!/p^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

легко доказываются тождества

$$S_n(x^k, t) = \lambda_{nk} t^k, \quad T_n(x^k, t) = \mu_{nk} t^k,$$

где

$$\lambda_{nk} = k! \sum_{j=1}^n A_j p_j^{-k}, \quad \mu_{nk} = k! \sum_{j=1}^n B_j q_j^{-k}.$$

Следовательно, функции t^k , $k = 0, 1, \dots$ — собственные для операторов S_n, T_n . Так как обе ИКФ точны для первых n из них, то $\lambda_{nk} = \mu_{nk} = 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Предположим, что $\lambda_{nn} \neq 1$, $\mu_{nn} \neq 1$, $\lambda_{nn} \neq \mu_{nn}$. Очевидно, при любых α, β оператор $\alpha S_n + \beta T_n$ имеет те же собственные функции t^k с собственными числами $\alpha \lambda_{nk} + \beta \mu_{nk}$. Выберем α и β из условий $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \lambda_{nn} + \beta \mu_{nn} = 1$, тогда линейная комбинация исходных ИКФ с такими коэффициентами будет точна по крайней мере для функций t^k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Аналогичным способом можно строить улучшенные формулы по трём исходным квадратурам, для других значений s , иного набора функций и т. д.

§ 2. Общие свойства ортогональных многочленов, определяющих КФНСТ

Напомним, что многочлен $\omega_n(1/z)$ удовлетворяет условию “ортогональности”

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^z z^{-s} \omega_n \left(\frac{1}{z} \right) z^{-k} dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad c > 0.$$

После замены переменной $z = 1/x$ получим условие

$$\int_L h(x) \omega_n(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (11)$$

где $h(x) = x^{s-2} e^{1/x}$, а линия интегрирования L есть окружность

$$\left| x - \frac{1}{2c} \right| = \frac{1}{2c}, \quad c > 0.$$

Заметим, что здесь c — любое положительное число.

Классические многочлены Эрмита, Лагерра, Якоби удовлетворяют условию ортогональности вида

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) Q_m(x) dx = 0, \quad m \neq n,$$

со знакопостоянным весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), причём вес ρ является решением уравнения Пирсона [56]

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (12)$$

где $A(x) = p_0 + p_1x$, $B(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$ — многочлены с вещественными коэффициентами. Классические веса Эрмита, Лагерра, Якоби соответствуют трём случаям: 1) уравнение $B(x) = 0$ не имеет решений ($B(x) = \text{const} \neq 0$); 2) уравнение $B(x) = 0$ имеет один простой вещественный корень; 3) уравнение $B(x) = 0$ имеет два различных вещественных корня. Классические веса удовлетворяют предельным условиям

$$\lim_{x \rightarrow a} \rho(x)B(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b} \rho(x)B(x) = 0, \quad (13)$$

а для соответствующих ортогональных многочленов справедлива формула Родрига [56]

$$Q_n(x) = \frac{c_n}{\rho(x)} (\rho(x)B^n(x))^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где c_n — произвольный сомножитель. В случае $B(x) = x^2$ решение уравнения Пирсона имеет вид $x^\alpha e^{\beta/x}$, оно определено для всех $x > 0$, но весом не является (на конечном отрезке это вес, но для него предельные условия не выполняются).

Построенный нами многочлен (7), определяющий КФНСТ, удовлетворяет условию ортогональности (11) с весом $h(x) = x^{s-2}e^{1/x}$. Нетрудно проверить, что $h(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона (11) при $B(x) = x^2$, $A(x) = (s-2)x - 1$. Далее, $h(x)B(x) = x^s e^{1/x}$, так что выполняются и предельные условия (13), только теперь вместо отрезка (a, b) следует иметь в виду окружность L , а в качестве a и b выступает одна и та же точка $x = 0$ при стремлении к ней с разных сторон вдоль указанной окружности.

Теорема 2. Для многочленов (7) справедлива формула Родрига

$$\omega_n(x) = \frac{c_n}{h(x)} (h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Её доказательство не приводим, поскольку оно ничем не отличается от имеющегося в [56].

Как и для классических ортогональных многочленов, справедлива и аналогично доказывается

Теорема 3. Многочлены (7) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} B(x)\omega_n''(x) + [A(x) + B'(x)]\omega_n'(x) - n(n+s-1)\omega_n(x) &= 0, \\ B(x) = x^2, \quad A(x) = (s-2)x - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, многочлены $\omega_n(x)$ удовлетворяют трёхчленному рекуррентному соотношению вида

$$\omega_n(x) = (x + a_n)\omega_{n-1}(x) + b_n\omega_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

где a_n, b_n — некоторые вещественные числа (см. [25]) (в отличие от классических многочленов здесь $b_n > 0$).

Получим явное выражение многочленов $\omega_n(x)$, исходя из формулы Родрига (14).

Пусть $g(z)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая достаточно число раз функция. Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x},$$

откуда следует равенство

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для функции $g(z) = e^z z^{-a}$, где a — константа, это равенство имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{y/x} \frac{x^a}{y^{a+1}} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{y/x} \frac{x^{a-1}}{y^a} \right),$$

откуда для произвольного натурального n получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(e^{y/x} \frac{x^a}{y^{a+1}} \right) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(e^{y/x} \frac{x^{a-n}}{y^{a-n+1}} \right). \quad (16)$$

Положим $a = 2n + s - 2$. По формуле Лейбница правая часть равна

$$\begin{aligned} & (-1)^n x^{n+s-2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}} e^{y/x} \frac{\partial^k}{\partial y^k} y^{-(n+s-1)} = \\ & = (-1)^n x^{s-2} e^{y/x} \sum_{k=0}^n (-1)^n \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k y^{-(n+s-1)-k}. \end{aligned}$$

Вычислим правую часть формулы (14) с помощью равенства (16), полагая $y = 1$ и учитывая, что $h(x)B^n(x) = e^{1/x}x^{2n+s-2}$, в результате чего придём к представлению

$$\omega_n(x) = c_n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k = c_n P_n^s(x). \quad (17)$$

Покажем, что корни x_k многочленов (17) (или корни q_k многочленов (7)) простые. Заметим, что $P_n^s(0) \neq 0$, так что все x_k отличны от нуля. Пусть \bar{x} — кратный корень многочлена (17), т.е. $\omega_n(\bar{x}) = \omega'_n(\bar{x}) = 0$. Из уравнения (15) следует, что и $\omega''_n(\bar{x}) = 0$. далее, дифференцируя уравнение (15) и полагая $x = \bar{x}$, последовательно найдём, что $\omega'''_n(\bar{x}) = \dots = \omega_n^{(n)}(\bar{x}) = 0$. Но последнее равенство невозможно. Значит, все узлы КФНСТ (8) попарно различны.

Заметим, что в формуле (8) функция $\varphi_s(p)$ предполагается регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, так что правая часть в (8) существует лишь при условии $\operatorname{Re} q_k > 0$, т.е. все узлы КФНСТ должны принадлежать правой полуплоскости. Справедливость этого утверждения будет доказана позже.

Итак, КФНСТ обращения преобразования Лапласа и порождающие их ортогональные многочлены по сути ничем не отличаются от классических вещественных случаев. Правда, в классических случаях узлы КФНСТ принадлежат области интегрирования. В нашем случае буквального аналога этому утверждению быть не может, ибо в формуле обращения линия интегрирования произвольна, и узлы квадратуры не могут находиться на всех этих линиях. Тем не менее и для КФНСТ обращения преобразования Лапласа, как мы покажем, имеет место утверждение, аналогичное вещественному случаю, но имеющее более общий характер.

§ 3. Связь КФНСТ обращения преобразования Лапласа с аппроксимациями Паде

В предположении регулярности функции $\varphi_s(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ перепишем формулу обращения (1) иначе (после замены переменной вида $p_1 = pt$):

$$f(t) = t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p/t) dp, \quad c > 0. \quad (18)$$

Для приближённого вычисления интеграла заменим функцию e^p её дробно-рациональной аппроксимацией Паде (см. [23], [3]). Напомним их определение.

Пусть дана функция $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_0 \neq 0$.

Определение. Аппроксимацией Паде типа $[m/n]$ для $f(z)$ называется функция

$$[m/n]_f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m(z), Q_n(z)$ — многочлены степеней m и n соответственно, такая, что

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = O(|z|^{m+n+1}), \quad z \rightarrow 0, \quad Q_n(0) = 1. \quad (19)$$

Если $f(z)$ дифференцируема достаточное число раз, то условие (19) равносильно таким:

$$f^{(k)}(0) = \left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \right)^{(k)} \Big|_{z=0}, \quad k = 0, 1, \dots, m+n.$$

Для функции e^z существуют аппроксимации Паде всех типов и их можно построить по формулам

$$\begin{aligned} P_m(z) &= {}_1F_1(-m, -m-n, z), \\ Q_n(z) &= {}_1F_1(-n, -m-n, -z), \end{aligned}$$

где

$${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

есть гипергеометрическая функция. В следующих утверждениях выясняется тесная связь аппроксимаций Паде с КФНСТ.

Теорема 4. *Полюсы аппроксимации Паде типа $[m/n]$ для функции e^z при $m \geq n - 1$ являются узлами КФНСТ обращения преобразования Лапласа вида (8).*

Доказательство. Знаменатель аппроксимации Паде типа $[m/n]$ для функции $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ можно представить в виде определителя см. ([3]) (с точностью до нормировки)

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} a_{m-n+1} & a_{m-n+2} & \dots & a_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+n} \\ z^n & z^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

При $j < 0$ следует считать $a_j = 0$.

В случае $f(z) = e^z$ имеем

$$a_j = \frac{1}{j!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-j-1} dp, \quad c > 0. \quad (21)$$

Рассмотрим интегралы

$$I_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-(m-n+2)} [p^{-n} Q_n(p)] p^{-j} dp, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Положим $s = m - n + 2$. По условию $m - n + 2 \geq 0$, так что $s \geq 1$, и интегралы существуют. Подставляя в них выражение (20) для $Q_n(z)$ и учитывая представление (21), придём к равенству

$$I_j = \begin{vmatrix} a_{m-n+1} & a_{m-n+2} & \dots & a_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+n} \\ a_{m-n+1+j} & a_{m-n+2+j} & \dots & a_{m+1+j} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что при любом $j = 0, 1, \dots, n-1$ последняя строка определителя совпадает с одной из предыдущих строк, так что все I_j равны нулю. А это означает, что многочлен $p^{-n} Q_n(p)$ удовлетворяет тем же условиям ортогональности, что и $P_n^s(1/p)$, и они отличаются лишь нормировкой, т. е. $Q_n(p) = c p^n P_n^s(1/p)$. Следовательно, корни знаменателя аппроксимации Паде совпадают с корнями уравнения $P_n^s(1/p) = 0$, т. е. с узлами КФНСТ.

Теорема 5. Пусть функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ при некотором натуральном s регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Если $P_m(p)/Q_n(p)$ — аппроксимация Паде типа $[m/n]$ для e^p и $s = m - n + 2$, то при достаточно малом положительном значении s справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} p^{-s} \varphi_s\left(\frac{p}{t}\right) dp = \sum_{k=1}^n A_k \varphi_s\left(\frac{p_k}{t}\right), \quad (22)$$

где A_k, p_k — коэффициенты и узлы КФНСТ вида (8).

Доказательство. Пусть $Q_n(p)$ — знаменатель аппроксимации Паде типа $[m/n]$ для функции e^p и $m - n + 2 = s$. Возьмём любое число c такое, что $0 < c < \min_k \operatorname{Re} p_k$, где p_k — корни уравнения $Q_n(p)$. Такое число c существует, так как все узлы КФНСТ расположены в правой полуплоскости.

Пусть $P_m(p)$ — произвольный многочлен степени m . Рассмотрим функцию

$$f(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = R_{m-n}(p) - \frac{B_1}{p - p_1} - \dots - \frac{B_n}{p - p_n}. \quad (23)$$

Если $m - n < 0$, то $R_{m-n}(p) = 0$. Пусть γ означает замкнутый контур, проходимый по часовой стрелке и состоящий из дуги C_R окружности радиусом R с центром в точке $p = 0$, лежащей слева от прямой $\operatorname{Re} p = c$ и отрезка этой прямой, стягивающей дугу C_R . Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(p) p^{-s} \varphi_s(p/t) dp. \quad (24)$$

Интеграл в (24), берущийся по дуге C_R , при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю, так как на C_R справедливо равенство $f(p)p^{-s} = O(p^{-2})$, а $\varphi_s(p/t)$ ограничена. Значит, при $R \rightarrow \infty$ величина (24) стремится к левой части формулы (22). С другой стороны, по теореме о вычетах

$$I = \sum_{j=1}^n D_j \varphi_s(p_j/t),$$

если положить $D_j = B_j p_j^{-s}$. Теперь выберем значения входящих в (23) коэффициентов B_j так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^n D_j p_j^{-k} = \frac{1}{\Gamma(s+k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

Отсюда находим, что $D_j = A_j$, ибо p_j — узлы КФНСТ, и условия (25) на самом деле верны для $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, и интеграл (24) равен правой части в формуле (22).

Теперь покажем, что первое слагаемое справа в (23) можно выбрать так, чтобы левая часть в (23) совпала с аппроксимацией Паде типа $[m/n]$ для e^p . Для этого достаточно показать, что совпадают в нуле значения производных $f(p)$ и e^p , т.е. $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \dots, m + n$. Дифференцируя k раз тождество (23) и полагая $p = 0$, находим

$$f^{(k)}(0) = R_{m-n}^{(k)}(0) + k! \sum_{j=1}^n B_j / p_j^{k+1}.$$

При $s = 1$, т.е. при $m = n - 1$ первое слагаемое справа отсутствует; далее, $B_j = D_j p_j = A_j p_j$, и поэтому

$$f^{(k)}(0) = k! \sum_{j=1}^n B_j / p_j^{k+1} = 1.$$

Пусть теперь $m - n = s - 2 \geq 0$. При $k > m - n$ имеем

$$f^{(k)}(0) = k! \sum_{j=1}^n B_j / p_j^{k+1} = 1, \quad k = m - n + 1, m - n + 2, \dots, m + n.$$

Далее, за счёт выбора коэффициентов многочлена $R_{m-n}(p) = b_0 + b_1 p + \dots + b_{m-n} p^{m-n}$ добьёмся выполнения условий $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \dots, m - n$. В итоге такого выбора $f(p)$ оказывается аппроксимацией Паде, для которой верна формула (22). \square

Утверждение теоремы 2 допускает такую “моментную” формулировку: пусть заданы числа (моменты)

$$\mu_j = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} p^{-j} dp, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где s — натуральное число, и пусть $P_m(p)/Q_n(p)$ — аппроксимация Паде типа $[m/n]$ для e^p , причём $m - n + 2 = s$. Тогда имеют место равенства

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} p^{-s} p^{-j} dp = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m + n.$$

З а м е ч а н и е 1. Как мы видели выше, для e^p существуют аппроксимации Паде всех типов $[m/n]$, в том числе и при $m < n-1$. Их также можно использовать для построения квадратурных формул обращения преобразования Лапласа: запишем формулу обращения в виде

$$f(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p F\left(\frac{p}{t}\right) dp,$$

а затем заменим e^p её аппроксимацией Паде, что приводит к приближённой формуле

$$f(t) \approx \frac{1}{t} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} F\left(\frac{p}{t}\right) dp. \quad (26)$$

Теперь разложение (23) на простейшие дроби не содержит целой части ($R_{m-n}(p) = 0$). Повторяя предыдущие рассуждения применительно к интегралу (26), придём к квадратурной формуле по значениям функции $F(p_k/t)$, которую можно преобразовать, домножив и разделив слагаемые в квадратурной сумме на $(p_k/t)^s$, а подынтегральную функцию в (23) на $(p/t)^s$, к формуле вида (8), но теперь $s < 0$. Такие формулы при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ ведут себя иначе, чем КФНСТ.

З а м е ч а н и е 2. Изучением сходимости КФНСТ в этой главе мы не занимаемся, поскольку далее в главе 4 будет исследован случай “обобщённых” КФНСТ, содержащих в себе КФНСТ.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Одна формула обращения преобразования Лапласа, связанная с гамма-функцией

Пусть $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Как известно, функция $1/\Gamma(z)$ целая. При любом комплексном s функция $1/\Gamma(s+z)$ также целая, т. е.

$$\frac{1}{\Gamma(s+z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js} z^j,$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно на всей комплексной плоскости. В частности, при $z = n - s + 1$ получаем абсолютно сходящийся числовой ряд

$$\frac{1}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js} (n + s - 1)^j.$$

На множестве функций, регулярных на круге $|t| \leq r$, $r > 0$, введём оператор (скорее, символ)

$$\Gamma^{-1} \left(s + t \frac{d}{dt} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js} \left(t \frac{d}{dt} \right)^j.$$

Пусть $f(t) = t^m$, m — неотрицательное целое число. Очевидно,

$$\left(t \frac{d}{dt} \right)^j t^m = \left(t \frac{d}{dt} \right)^{j-1} t \frac{d}{dt} t^m = m \left(t \frac{d}{dt} \right)^{j-1} t^m = \dots = m^j t^m.$$

Следовательно,

$$\Gamma^{-1} \left(s + t \frac{d}{dt} \right) t^m = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{js} m^j t^m = \frac{t^m}{\Gamma(s+m)}.$$

Положим, как обычно, $\varphi_s(p) = p^s F(p)$, где $F(p)$ — изображение некоторой функции-оригинала, s — положительное число.

Лемма 1. Пусть функция $P_s(t) = \varphi_s(1/t)$ регулярна на круге $|t| \leq r$, $r > 0$. Тогда функция

$$g(t) = \Gamma^{-1} \left(s + t \frac{d}{dt} \right) P_s(t)$$

целая, а искомый оригинал равен $t^{s-1}g(t)$.

Доказательство. Функция $P_s(t)$ регулярна на круге $|t| \leq r$ и представима там рядом

$$P_s(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j. \quad (1)$$

Следовательно,

$$\Gamma^{-1} \left(s + t \frac{d}{dt} \right) P_s(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Gamma^{-1} \left(s + t \frac{d}{dt} \right) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{t^j}{\Gamma(s+j)}.$$

Перестановка порядка суммирования и применения оператора Γ^{-1} оправдана абсолютной и равномерной сходимостью ряда (1). Очевидно, функция

$$g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{t^j}{\Gamma(s+j)}$$

целая, ибо этот ряд сходится всюду.

Введём функцию $f(t) = t^{s-1}g(t)$. Она абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, $0 \leq a < b < \infty$, так как $s > 0$, и существует её преобразование Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{t^{s-1+j}}{\Gamma(s+j)} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{p^{s+j}} = p^{-s} P_s \left(\frac{1}{p} \right) = F(p). \square$$

В дальнейшем нам потребуется одно неравенство, к выводу которого мы сейчас перейдём.

Пусть функция $g(t)$ регулярна на круге $|t| \leq r$, $r > 0$. Возьмём произвольную точку z такую, что $|z| < r$, и пусть $C = \{t \mid t = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. По формуле Коши имеем

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{i\varphi})}{1-z/t} d\varphi.$$

Пусть задан некоторый линейный непрерывный функционал \mathcal{L} , тогда

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi}) \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right) d\varphi \quad (2)$$

и

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(z^m)}{t^m},$$

причём этот ряд сходится абсолютно, т. е. при фиксированном z сходится ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\mathcal{L}(z^m)|/r^m.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского к (2), получим

$$|\mathcal{L}g(z)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \int_0^{2\pi} \left| \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right) \right|^2 d\varphi. \quad (3)$$

Используя ортогональность степеней на окружности

$$\int_0^{2\pi} t^{-m} \bar{t}^{-q} d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq q, \\ 2\pi/r^{2m}, & m = q, \end{cases}$$

придём к тождеству

$$\int_0^{2\pi} \left| \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-z/t}\right) \right|^2 d\varphi = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} |\mathcal{L}(z^m)|^2 / r^{2m}.$$

В итоге из (3) получим искомое неравенство

$$|\mathcal{L}g(z)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})|^2 \sum_{m=0}^{\infty} |\mathcal{L}(z^m)|^2 / r^{2m}. \quad (4)$$

При $r = 1$ это неравенство превращается в известное неравенство Хэммерлина [21].

§ 2. Оценки погрешности квадратурных формул обращения преобразования Лапласа

Доказанная в предыдущем параграфе лемма и неравенство (4) позволяют получить оценки погрешности широкого класса квадратурных формул обращения преобразования Лапласа, в том числе и КФНСТ.

Пусть дано изображение $F(p)$ и $\varphi_s(p) = p^s F(p)$.

Теорема 1. Пусть при некотором $s > 0$ функция $P_s(t) = \varphi_s(1/t)$ регулярна на круге $|t| \leq r$, $r > 0$, и пусть A_1, \dots, A_n — произвольные комплексные числа, а μ_1, \dots, μ_n произвольные попарно различные комплексные числа такие, что $|\mu_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда соответствующая функция-оригинал представима в виде

$$f(t) = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^n A_k P_s(\mu_k t) + \varepsilon_n(t) \right], \quad (5)$$

и при любом ρ таком, что $0 < t < \rho \leq r$, справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leq M_{\rho s} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right|^2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^{2m} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где

$$M_{\rho s} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_s(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \right]^{1/2}.$$

Доказательство. На множестве функций $g(t)$, регулярных на круге $|t| \leq r$, рассмотрим оператор Q_s , действующий по правилу

$$Q_s g(t) = \left(\Gamma^{-1} \left(s + t \frac{d}{dt} \right) - \sum_{k=1}^n A_k G_k \right) g(t), \quad G_k g(t) = g(\mu_k t).$$

Пусть z — произвольное комплексное число такое, что $|z| < \rho \leq r$. Положим $g(t) = P_s(t)$ и введём функционал \mathcal{L} так, что

$$\mathcal{L}g(z) = Q_s g(t) |_{t=z}.$$

По лемме 1 получаем

$$\mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}P_s(z) = z^{1-s} f(z) - \sum_{k=1}^n A_k P_s(\mu_k z).$$

Положим $\varepsilon_n(z) = \mathcal{L}P_s(z)$, тогда

$$f(z) = z^{s-1} \left[\sum_{k=1}^n A_k P_s(\mu_k z) + \varepsilon_n(z) \right],$$

т.е. получили представление (5). Для оценки величины $\varepsilon_n(z)$ воспользуемся неравенством (4). Очевидно,

$$\mathcal{L}(z^m) = \frac{z^m}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k (\mu_k z)^m,$$

и потому

$$|\mathcal{L}P_s(z)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_s(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right|^2 \left| \frac{z}{\rho} \right|^{2m}.$$

Это неравенство равносильно (6), если положить $z = t$, считая $0 < t < \rho \leq r$. Заметим, что в силу сделанных предположений ряд справа сходится.

Очевидно, формулу (5) можно рассматривать как КФ обращения преобразования Лапласа с коэффициентами A_k и узлами $p_k = 1/\mu_k$ и с погрешностью $\varepsilon_n(t)$, ибо $P_s(\mu_k t) = \varphi_s(p_k/t)$. Первый сомножитель $M_{\rho s}$ в оценке (6) зависит лишь от изображения и является нормой функции $P_s(t)$ на окружности радиусом $\rho < r$, а второй сомножитель зависит только от КФ.

Следствие 1. Справедлива более простая, менее точна оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leq M_{\rho s} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right|^2 \right)^{1/2}, \quad 0 < t < \rho \leq r. \quad (7)$$

Следствие 2. Справедливо неравенство

$$|t^{1-s} f(t)| \leq M_{\rho s} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma^2(s+m)} \right)^{1/2}, \quad 0 < t < \rho \leq r. \quad (8)$$

Для его доказательства достаточно в формуле (5) положить все коэффициенты A_k равными нулю. В частности, при $s = 1$ из (8) получаем априорную оценку искомого оригинала

$$|f(t)| \leq M_{\rho 1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!^2} \right)^{1/2} \approx 1.51 M_{\rho 1}, \quad 0 < t < \rho \leq r.$$

Перейдём к ИКФ. Пусть КФ

$$f(t) = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^n A_k \varphi_s(p_k/t) + \varepsilon_n(t) \right] \quad (9)$$

интерполяционная, т.е. $\varepsilon_n(t) = 0$ для функций $\varphi_s(p) = p^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, или другими словами, выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} = 1/\Gamma(s+m), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если числа $\mu_k = 1/p_k$ и функция $\varphi_s(p)$ удовлетворяют условию теоремы 1, то для погрешности $\varepsilon_n(t)$ ИКФ справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leq M_{\rho s} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right|^2 \right)^{1/2}, \quad 0 < t < \rho \leq r.$$

Пусть теперь КФ (9) есть КФНСТ, тогда

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} = 1/\Gamma(s+m), \quad m = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Напомним, что узлы КФНСТ простые, принадлежат полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и являются корнями уравнения $P_n^s(1/p) = 0$. Приведём без доказательства следующее утверждение (см. [63]).

Лемма 2. При любом $s > 0$ корни уравнения $P_n^s(1/p) = 0$ удовлетворяют неравенству

$$n + s - 1 \leq |p_k| < 2n + s - 2/3. \quad (10)$$

При любом $n > 1$ условие $|\mu_k| = |1/p_k| < 1$ выполнено, и если функция $\varphi_s(p)$ удовлетворяет условию теоремы 1, то для погрешности КФНСТ вида (9) справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leq M_{\rho s} \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} \right)^2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^{2m} \right)^{1/2},$$

$$0 < t < \rho \leq r.$$

Если $s > 1$, то эта оценка справедлива и для $n = 1$. В отличие от предыдущих КФ теперь в оценке отсутствует знак модуля, поскольку комплексные узлы КФНСТ попарно сопряжены (коэффициенты многочленов P_n^s вещественны), как и соответствующие им коэффициенты, и поэтому величина $\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m}$ вещественна.

§ 3. Скорость сходимости КФНСТ обращения преобразования Лапласа

3.1. Поведение узлов и коэффициентов КФНСТ при возрастании числа узлов. Далее узлы и коэффициенты будем обозначать p_{kn} и A_{kn} , чтобы подчеркнуть их зависимость от n , и саму КФНСТ в виде

$$f(t) = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^n A_{kn} \varphi_s(p_{kn}/t) + \varepsilon_n(t) \right].$$

Узлы p_{kn} суть корни уравнения $P_n^s(1/p_{kn}) = 0$, где

$$\begin{aligned} P_n^s(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k = \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+s-2} (1-xt)^n dt, \quad (11) \end{aligned}$$

а коэффициенты A_{kn} однозначно определяются либо из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_{kn} p_{kn}^{-m} = 1/\Gamma(s+m), \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

либо по явным формулам, приведённым ниже. Положим $z_{kn} = -(2n + s - 2)/p_{kn}$, $k = 1, 2, \dots, n$. В работе [63] показано, что при $n \rightarrow \infty$ точки z_{kn} стремятся к точкам кривой γ :

$$\gamma = \{z : |\omega(z)| = 1, \operatorname{Re} z < 0\},$$

где

$$\omega(z) = \exp\left(\sqrt{1 + z^{-2}}\right) / \left[z\left(1 + \sqrt{1 + z^{-2}}\right)\right].$$

Будем исходить из представления [67]

$$A_{kn} = \frac{(-1)^{n+1} n! (2n + s - 2)^2}{n! \Gamma(n + s - 1) p_{kn}^2 (P_{n-1}^s(1/p_{kn}))^2}.$$

Положим $x_{kn} = 1/p_{kn}$, заменим n на $n-1$ в интеграле (11) и сделаем в нём замену переменной $t = (2n + s - 2)t'$, в результате чего получим

$$P_{n-1}^s(x_{kn}) = (-1)^{n-1} \frac{(2n + s - 2)^{n+s-2}}{\Gamma(n + s - 2)} \int_0^\infty g(t) e^{(n-2)h(t)} dt, \quad (12)$$

где

$$g(t) = t^{s-1} e^{-t(s+2)} (1 + z_{kn} t), \quad h(t) = -2t + \ln[t(1 + z_{kn} t)].$$

Асимптотика интеграла в формуле (12) может быть найдена методом перевала [58], для чего сначала находим точки перевала как корни t_\pm уравнения $h'(t) = 0$:

$$t_\pm = \frac{1 - z_{kn} \pm \sqrt{1 + z_{kn}^2}}{-2z_{kn}},$$

а затем вычисляем значения функции $h(t)$ в них:

$$h(t_+) = \frac{1 - z_{kn} + \sqrt{1 + z_{kn}^2}}{z_{kn}} + \ln \frac{-1}{2(z_{kn} + \sqrt{1 + z_{kn}^2})},$$

$$h(t_-) = \frac{1 - z_{kn} - \sqrt{1 + z_{kn}^2}}{z_{kn}} + \ln \frac{(z_{kn} + \sqrt{1 + z_{kn}^2})}{2}.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_0^\infty g(t) e^{(n-2)h(t)} dt \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(C_1 e^{nh(t_+)} + C_2 e^{nh(t_-)} \right), \quad (13)$$

где C_1, C_2 — не зависящие от n постоянные (далее всюду буквой C с индексом или без индекса будем обозначать величины, не зависящие от n). Рассмотрим поведение первого слагаемого в формуле (12) при $n \rightarrow \infty$ после подстановки в неё асимптотики (13):

$$\frac{(2n + s - 2)^{n+s-2}}{\Gamma(n + s - 2)} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{nh(t_+)},$$

считая для простоты число s натуральным. Применение формулы Стирлинга даёт для него асимптотическое представление в виде

$$C_3 \frac{2^n n^{n+s-2}}{\sqrt{n} n^{n+s-3} e^{-n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{-1}{2(z_{kn} + \sqrt{1 + z_{kn}^2})} \right)^n \times \\ \times \left(\exp \left(\frac{1}{z_{kn}} - 1 + \frac{\sqrt{1 + z_{kn}^2}}{z_{kn}} \right) \right)^n = C_4 \omega^n(z_{kn}) \left(\exp \left(\frac{1}{z_{kn}} \right) \right)^n.$$

Аналогично получаем представление для второго слагаемого:

$$\frac{(2n + s - 2)^{n+s-2}}{\Gamma(n + s - 2)} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{nh(t_-)} \sim C_5 \omega^{-n}(z_{kn}) \left(\exp \left(\frac{1}{z_{kn}} \right) \right)^n.$$

Следовательно,

$$P_{n-1}^s(x_{kn}) \sim (\exp(1/z_{kn}))^n (C_5 \omega^n(z_{kn}) + C_6 \omega^{-n}(z_{kn})).$$

Если $|\omega^n(z_{kn})| > 1$, то главным в асимптотике будет первое слагаемое, в случае противоположного неравенства — второе слагаемое. Оказывается, что высоты перевалов в точках t_{\pm} , т.е. значения $\operatorname{Re}(h(t_{\pm}))$, одинаковы, что означает выполнение соотношения $|\omega^n(z_{kn})| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Итак, $P_{n-1}^s(x_{kn}) \sim C_7 (\exp(1/z_{kn}))^n$.

З а м е ч а н и е 1. В работе [63] высказана гипотеза (подтверждаемая вычислениями), что при $s > 0.0709$ величина $|z_{kn}|$ меньше модуля точки кривой γ , имеющей тот же аргумент, что и точка z_{kn} .

В итоге с учётом полученной асимптотики величины $P_{n-1}^s(x_{kn})$ и явного выражения коэффициентов КФНСТ вытекает

Теорема 2. Для коэффициентов КФНСТ при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$A_{kn} \sim C n^{-s} (\exp(-1/z_{kn}))^{2n}. \quad (14)$$

Следствие 3. При $n \rightarrow \infty$ величины $n^s A_{kn}$ и $\exp(p_{kn})$ возрастают с одинаковой скоростью.

Действительно,

$$\exp(p_{kn}) = \exp(-(2n+s-2)/z_{kn}) = \exp((2-s)/z_{kn})(\exp(-1/z_{kn}))^{2n}.$$

Дальнейшее очевидным образом вытекает из (14).

Следствие 4. Справедлива асимптотическая формула

$$\exp(\operatorname{Re}(1/z_{kn}))|n^s A_{kn}|^{1/(2n)} \sim 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Замечание 2. Если $z \in \gamma$ и $\arg z$ монотонно изменяется от $\pi/2$ до π , то $|z|$ монотонно изменяется от 1 до 1.5088, а $\operatorname{Re}(z)$ — от 0 до -1.5088 . Следовательно, наибольшие по модулю коэффициенты A_{kn} соответствуют узлам p_{kn} с наименьшим аргументом.

Замечание 3. Аналогичным образом методом перевала может быть получена формула вида (14) для любой точки $z_{kn} \in \gamma$, отличной от z_0 и соответствующей коэффициенту A_{kn} : теперь величина C в формуле вида (14) содержит множитель $\exp(-in\operatorname{Im}(h(t_+)))$, по модулю равный единице, а основание степени 3.764 следует заменить на меньшую величину $(\exp(-\operatorname{Re}(h(t_+)) - 1)/2)^2$.

Следствие 5. Устойчивость КФНСТ по отношению к ошибкам задания функции $\varphi_s(p)$ определяется величиной

$$M_n = \sum_{k=1}^n |A_{kn}| \leq C n^{1-s} \max_k |\exp(-1/z_{kn})|^{2n} \approx C n^{1-s} 3.764^n. \quad (15)$$

Действительно, при нечётном n величина $\max_k |\exp(-1/z_{kn})|^2$ достигается на единственной вещественной точке $z_0 = -1.5088$ кривой γ , соответствующей единственному вещественному узлу, и приближённо равна 3.764.

Приведём необходимые в дальнейшем две важные характеристики КФНСТ: числа

$$\mu_{nj} = \sum_{k=1}^n A_{kn} p_{kn}^{-j} \exp(-p_{kn}), \quad j = 0, 1, \dots \quad (16)$$

и дельтообразные ядра

$$\delta_n(x) = \sum_{k=1}^n A_{kn} p_{kn} \exp(-p_{kn}x). \quad (17)$$

Теорема 3. Для чисел (16) при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\mu_{nj} = O(n^{-j}), \quad j = 0, 1, \dots$$

Доказательство очевидным образом вытекает из утверждений теоремы 2 и её следствий с учётом соотношения $p_{kn}^{-j} = O(n^{-j})$.

Теорема 4. При $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\delta_n(1) = O(n), \quad \delta_n(1 + \varepsilon) = o(1)$$

для любого фиксированного положительного числа ε .

Доказательство основано на отмеченной выше ограниченности величин $nA_{kn} \exp(-p_{kn})$ и очевидной формуле $\exp(-\varepsilon p_{kn}) = o(1/n)$.

Итак, ядро (17) имеет в точке $x = 1$ ярко выраженный максимум, справа от неё с ростом n ядро стремится к нулю. Слева от точки $x = 1$ поведение ядра более сложное, для описания которого нужны отдельные исследования. Детальному исследованию КФНСТ и порождаемых ими дельтообразных ядер посвящены работы [29, 30, 31, 32].

3.2. Оценки погрешности КФНСТ. Для погрешности $\varepsilon_n(t)$ КФНСТ

$$f(t) = t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^n A_k \varphi_s(p_k/t) + \varepsilon_n(t) \right]$$

была получена оценка

$$|\varepsilon_n(t)| \leq M_{\rho s} \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} \right)^2 \left(\frac{t}{\rho} \right)^{2m} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

$$0 < t < \rho \leq r.$$

Узлы КФНСТ удовлетворяют неравенству (10), а для величины $M_n = \sum_{k=1}^n |A_{kn}|$ справедливо неравенство (15).

Пусть $s > 0$. Положим

$$\sigma_n(t) = \left(\sum_{m=2n}^{\infty} a_m^2 \cdot (t/\rho)^{2m} \right)^{1/2}, \quad (19)$$

где

$$a_m = \frac{1}{\Gamma(s+m)} - \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m}, \quad m = 2n, 2n+1, \dots$$

Очевидно,

$$|a_m| \leq B_m, \quad B_m = \frac{1}{\Gamma(s+m)} + M_n \max_k \frac{1}{|p_k|^m}.$$

Из неравенства (10) следует

$$\max_k \frac{1}{|p_k|} \leq \frac{1}{n+s-1} \equiv b_n.$$

Далее,

$$\begin{aligned} B_{m+1} &= \frac{1}{\Gamma(s+m+1)} + M_n \max_k \frac{1}{|p_k|^{m+1}} \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{s+m}, b_n \right\} B_m = B_m b_n. \end{aligned}$$

Теперь можно оценить погрешность (18).

Теорема 5. Для любого $s > 0$ при $n > 1$ справедливо неравенство

$$\sigma_n(t) \leq \frac{B_{2n}(t/\rho)^{2n}}{[1 - (b_n t/\rho)^2]^{1/2}}.$$

Доказательство. Из определения (19) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n^2(t) &\leq B_{2n}^2(t/\rho)^{4n} + B_{2n+1}^2(t/\rho)^{4n+2} + \dots \leq \\ &\leq B_{2n}^2(t/\rho)^{4n} [1 + b_n^2(t/\rho)^2 + b_n^4(t/\rho)^4 + \dots] = \frac{B_{2n}^2(t/\rho)^{4n}}{1 - b_n^2(t/\rho)^2}. \square \end{aligned}$$

Замечание 4. Поскольку $|t/\rho| < 1$, то

$$\sigma_n(t) \leq \frac{B_{2n}}{\sqrt{1 - b_n^2}}.$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$ очевидно неравенство $1/\Gamma(2n+s) \ll M_n b_n^{2n}$, так что $B_{2n} = O(M_n b_n^{2n})$.

Итак, устойчивость и сходимость КФНСТ характеризуются числами

$$M_n = O(n^{1-s} 3.764^n), \quad B_{2n} = O\left(n^{1-s} \left(\frac{3.764}{n^2}\right)^n\right).$$

Перейдём к случаю натурального s . Возьмём аппроксимацию Паде типа $[m/n]$ для функции e^p , причём $m-n+2 = s \geq 1$. Запишем её разложение на простейшие дроби в форме

$$\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = R_{m-n}(p) - \frac{B_1}{p-p_1} - \dots - \frac{B_n}{p-p_n}. \quad (20)$$

Коэффициенты A_k КФНСТ, как было показано, связаны с коэффициентами этого разложения связны соотношением $A_k = B_k p_k^{-s}$. Введём в рассмотрение числа

$$C_r^{(m,n)} = \frac{1}{r!} - \sum_{k=1}^n B_k p_k^{-r-1} = \frac{1}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k p_k^{s-r-1}, \quad r = s-1, s, \dots$$

В силу интерполяционности КФНСТ они обладают свойством

$$C_r^{(m,n)} = 0, \quad r = s-1, s, \dots, s+2n-2 \\ (\text{или } r = m-n+1, m-n+2, \dots, m+n),$$

так что величина (19) представима в виде

$$\sigma_n(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{m+n+k+1}^{(m,n)} \right)^2 (t/\rho)^{2(n+k)} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Ряд (21) сходится при всех $t \leq \rho$, поскольку $|p_k| > 1$, следовательно, для всех $t \leq \rho$ справедлива оценка

$$\sigma_n(t) \leq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{m+n+k+1}^{(m,n)} \right)^2 \right]^{1/2} \equiv \sigma_{mn}. \quad (22)$$

Продифференцируем r раз ($r \geq 0$) тождество (20):

$$-r! \sum_{k=1}^n B_k p_k^{-r-1} = R_{m-n}^{(r)}(0) - \left(\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} \right)^{(r)} \Big|_{p=0}.$$

При $s = 1$ первое слагаемое справа отсутствует, а при $s \geq 2$ числа $C_r^{(m,n)}$ не равны нулю лишь для $r > m + n$, но тогда $R_{m-n}^{(r)}(0) = 0$. Итак, для вычисления $C_r^{(m,n)}$ достаточно уметь вычислять значения производных аппроксимации Паде в точке $p = 0$. Положим

$$D_k = \left(\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} \right)^{(k)} \Big|_{p=0}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Считать непосредственно по этой формуле затруднительно. Укажем более простой способ, предварительно построив представление остаточного члена аппроксимации Паде. Положим $R_{mn}(z) = e^z - P_m(z)/Q_n(z)$. Из определения аппроксимации Паде следует, что функция

$$e^z Q_n(z) - P_m(z) = R_{mn}(z) Q_n(z) \quad (23)$$

при $z \rightarrow 0$ имеет порядок малости не менее $m + n + 1$.

Лемма 3. *Справедливы представления*

$$R_{mn}(z) = \frac{(-1)^n m! n! z^{n+m+1} {}_1F_1(n+1, n+m+1, z)}{(m+n+1)! (m+n)! Q_n(z)},$$

$$e^z Q_n(z) - P_m(z) = (-1)^n \frac{m!}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{z^{n+m+k+1}}{(n+m+k+1)!}.$$

Доказательство. Возьмём от обеих частей (23) производную порядка $n + m + k + 1$ и вычислим её при $z = 0$, применяя формулу Лейбница и представление аппроксимации Паде через гипергеометрический ряд. Производная левой части равна

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n+m+k+1}{j} Q_n^{(j)}(0) &= \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+m+k+1}{j} \frac{n! (m+n-j)!}{(n+m)! (n-j)!} = \\ &= (-1)^n \frac{n! m!}{(m+n)!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n+m+k+1}{j} \binom{m+n-j}{n-j} = \\ &= (-1)^n \frac{n! m!}{(m+n)!} \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n+m+k+1}{n-l} \binom{m+l}{l}. \quad (24) \end{aligned}$$

Рассмотрим тождество $(1+x)^i(1+x)^{-k-1} = (1+x)^{i-k-1}$ для целых неотрицательных значений i, k . Очевидны представления

$$\begin{aligned}(1+x)^i &= 1 + xC_i^1 + x^2C_i^2 + \dots + x^iC_i^i, \\ (1+x)^{-k-1} &= 1 - xC_{k+1}^1 + x^2C_{k+2}^2 - \dots + (-1)^l x^l C_{k+l}^l + \dots, \\ (1+x)^{i-k-1} &= 1 + xC_{i-k-1}^1 + x^2C_{i-k-1}^2 + \dots + x^n C_{i-k-1}^n + \dots\end{aligned}$$

Перемножим два первых тождества и затем найдём коэффициент при x^n , он будет равен (суммирование идёт по всем допустимым l)

$$\sum_l (-1)^{n-l} C_{n+k-l}^{n-l} C_i^l = \sum_l (-1)^l C_{k+l}^l C_i^{n-l}.$$

Приравнявая его к соответствующему коэффициенту в третьем равенстве, получим тождество

$$\sum_l (-1)^l C_{k+l}^l C_i^{n-l} = C_{i-k-l}^l.$$

С его помощью вычисляется последняя сумма в (24):

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n+m+k+1}{n-l} \binom{m+l}{l} = C_{n+k}^n = \frac{(n+k)!}{k! n!},$$

из чего следует

$$(e^z Q_n(z))^{(n+m+k+1)} \Big|_{z=0} = (-1)^n \frac{m!}{(n+m)!} \frac{(n+k)!}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и окончательное представление в виде ряда

$$e^z Q_n(z) - P_m(z) = (-1)^n \frac{m!}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{z^{n+m+k+1}}{(n+m+k+1)!}. \quad (25)$$

Разделив обе части этого представления на $Q_n(z)$, получим доказываемое равенство для $R_{mn}(z)$. \square

Запишем левую часть (25) в виде $Q_n(p)[e^p - P_m(p)/Q_n(p)]$; её производная порядка $r \geq 0$ в точке $p = 0$ равна

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} Q_n^{(k)}(0) (1 - D_{r-k}). \quad (26)$$

Значения $Q_n^{(k)}(0)$ отличны от нуля и равны

$$Q_n^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{n! (m+n-k)!}{(n+m)! (n-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Приравнивая значения (26) значению производной порядка r правой части (25) при $z = 0$ и полагая последовательно $r = 0, 1, \dots$, мы сможем определить все значения D_k , $k = 0, 1, \dots$. Очевидно, $D_k = 1$, если $k \leq m+n$ (впрочем, эти равенства следуют из определения аппроксимации Паде), и из определения чисел $C_r^{(m,n)}$ вновь следует, что $C_r^{(m,n)} = 0$ при $r \leq m+n$. В итоге приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. Для $r \geq m+n+1$ величины $C_r^{(m,n)}$ могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} C_{m+n+1}^{(m,n)} &= (-1)^n \frac{m! n!}{(m+n)! (m+n+1)!}, \\ C_r^{(m,n)} &= (-1)^n \frac{m! (r-m-1)!}{(n+m)! (r-m-n-1)!} - \\ &- \sum_{k=1}^j (-1)^k \frac{n! (m+n-k)!}{(n-k)! (m+n)! k!} C_{r-k}^{(m,n)}, \\ r &= n+m+2, n+m+3, \dots, \quad j = \min\{n, r-n-m-1\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь можно установить скорость убывания величины

$$\sigma_{mn} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{m+n+k+1}^{(m,n)} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{28}$$

при возрастании числа узлов n .

Теорема 6. Для любого фиксированного натурального s тако-го, что $m-n+2 = s$, величина (28) при $n \rightarrow \infty$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\sigma_{mn} = O \left(\frac{m! n!}{(m+n)! (m+n+1)!} \right).$$

Доказательство. Из (27) находим рекуррентное соотношение

$$C_{m+n+2}^{(m,n)} = C_{m+n+1}^{(m,n)} \left(\frac{n+1}{n+m+2} + \frac{n}{m+n} \right).$$

Ясно, что при $n \rightarrow \infty$ и m стремится к бесконечности, так что $C_{m+n+2}^{(m,n)} \sim C_{m+n+1}^{(m,n)}$. Пусть $r = m + n + j$, $j = 1, 2, \dots$. При увеличении r на единицу первое слагаемое справа в (27) умножается на величину $(n + j)/j(n + m + j + 1)$, т.е. он имеет тот же порядок относительно n , а с ростом j убывает как $1/j$. Далее, нетрудно убедиться, что сумма модулей коэффициентов при $C_{r-k}^{(m,n)}$ во втором слагаемом справа в (27) ограничена величиной $(e - 1)/2$, а сами величины $C_{r-k}^{(m,n)}$ ведут себя примерно так же, как и первое слагаемое в (27). Следовательно, справедливо асимптотическое равенство

$$C_{m+n+j+1}^{(m,n)} \sim a C_{m+n+1}^{(m,n)} / j!,$$

где a — некоторая константа. Значит, скорость убывания величины (28) совпадает со скоростью убывания первого ненулевого коэффициента (26), что и требовалось доказать. \square

Итак, КФНСТ быстро сходятся, практически с той же скоростью, что и классические квадратуры типа Гаусса.

Замечание 5. Утверждения лемм 3, 4 и теоремы 6 остаются в силе и при целом $s \leq 0$. Как и ранее, берём аппроксимацию Паде типа $[m/n]$ при $m - n + 2 = s$ и рассматриваем интеграл (26) (гл. 2). Для его приближённого вычисления описанным ранее способом строится квадратурная формула по корням знаменателя аппроксимации Паде, т.е. корням уравнения $Q_n(p) = 0$. Оказывается, что при условии $n + s - 1 > 0$ все корни этого уравнения попадают в правую полуплоскость [63]. Далее, как и ранее, вводим числа $C_r^{(m,n)}$. Покажем, что при $s \leq 0$ имеют место равенства

$$C_r^{(m,n)} = 0, \quad r = s - 1, s, \dots, -1.$$

Так как $m - n < 0$, то аппроксимация Паде имеет вид

$$\frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{p - p_i}.$$

Положим $p = 1/w$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{p - p_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{w B_i}{1 - w p_i} = \sum_{i=1}^n w B_i \sum_{k=0}^{\infty} (w p_i)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w^{k+1} \sum_{i=1}^n B_i p_i^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k w^{k+1}, \end{aligned}$$

где

$$d_k = \sum_{i=1}^n B_i p_i^k.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} &= \frac{p^{(0)}p^m + p^{(1)}p^{m-1} \dots + p^{(m)}}{q^{(0)}p^n + q^{(1)}p^{n-1} \dots + q^{(n)}} = w^{n-m} \frac{p^{(m)}w^m + \dots + p^{(0)}}{q^{(n)}w^n + \dots + q^{(0)}} = \\ &= w^{n-m} \frac{p^{(0)}}{q^{(0)}} (1 + c_1 w + c_2 w^2 + \dots). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w^{n-m} \frac{p^{(0)}}{q^{(0)}} (1 + c_1 w + c_2 w^2 + \dots) = - \sum_{k=0}^{\infty} d_k w^{k+1},$$

и так как слева стоит малая величина порядка $n-m$, то необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$d_0 = d_1 = \dots = d_{n-m-2},$$

которые можно записать эквивалентным образом в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{p_i^{r+1}} = \frac{1}{\Gamma(r+1)}, \quad r = s-1, s, \dots, -1.$$

Все дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в случае положительных s .

В табл. 1 приведены значения σ_{mn} для $s = 1$, т.е. $m = n - 1$, показывающие высокую скорость сходимости КФНСТ. Однако следует помнить, что для достижения такой точности приближенного решения необходимо обеспечить проведение вычислений с достаточным числом значащих цифр, а также обеспечить соответствующую точность вычисления изображения, иначе отмеченная ранее неустойчивость КФНСТ сведет на нет все усилия.

Таблица 1

| n | σ_{mn} | n | σ_{mn} |
|-----|----------------------|-----|----------------------|
| 2 | $2.6 \cdot 10^{-2}$ | 8 | $1.2 \cdot 10^{-17}$ |
| 4 | $1.2 \cdot 10^{-6}$ | 10 | $7.1 \cdot 10^{-24}$ |
| 6 | $7.3 \cdot 10^{-12}$ | 12 | $1.8 \cdot 10^{-30}$ |

§ 4. Квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа с фиксированными узлами, оптимальные на классе гладких функций

Пусть p_1, \dots, p_n — произвольные попарно различные точки полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, где функция $\varphi(p) = pF(p)$ регулярна. Рассмотрим квадратурную формулу

$$f(t) \approx f_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k/t). \quad (29)$$

При условии

$$\sum_{k=1}^n A_k = 1 \quad (30)$$

она точна для $f(t) = 1$ и точно восстанавливает значения оригинала $f(+0), f(+\infty)$, если они существуют. Обозначим $C^r M$ класс функций, r раз непрерывно дифференцируемых на полуоси $t \geq 0$ и таких, что $|f^{(r)}(t)| \leq M$. Рассмотрим задачу построения КФ с фиксированными положительными узлами p_1, \dots, p_n , погрешность которых на классе $C^r M$ минимальна.

Представим правую часть приближенного равенства (29) в виде

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k/t) = \int_0^\infty K_n(t, x) f(x) dx,$$

где

$$K_n(t, x) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n A_k p_k \exp(-xp_k/t).$$

Если выполнено условие (30), то погрешность формулы (29) представима в виде

$$\begin{aligned} f_n(t) - f(t) &= \int_0^\infty K_n(t, x) [f(x) - f(t)] dx = \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \int_0^\infty K_n(t, x) (x-t)^k dx + \\ &\quad + \frac{1}{r!} \int_0^\infty K_n(t, x) (x-t)^r f^{(r)}(\eta(x)) dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее считаем, что $r \leq n$. Пусть выполнены условия

$$\int_0^\infty K_n(t, x)(x - t)^k dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r - 1, \quad (32)$$

тогда из представления (31) следует оценка

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{M}{r!} t^r \int_0^\infty |(z - 1)^r \delta_n(z)| dz, \quad (33)$$

где

$$\delta_n(z) = \sum_{k=1}^n A_k p_k \exp(-zp_k).$$

Естественно поставить задачу минимизации

$$\int_0^\infty |(z - 1)^r \delta_n(z)| dz \rightarrow \min$$

при ограничениях (30), (32) на коэффициенты A_1, \dots, A_n .

Лемма 5. Условия (30), (32) эквивалентны условиям

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-j} = \frac{1}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, r - 1. \quad (34)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (34). Легко проверить, что равенство

$$\int_0^\infty \delta_n(z) dz = 1$$

эквивалентно условию (30). Соотношения (32) можно записать иначе:

$$\int_0^\infty (z - 1)^k \delta_n(z) dz = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r - 1.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (z - 1)^k \delta_n(z) dz &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \int_0^\infty z^j \delta_n(z) dz = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{m=1}^n A_m p_m \int_0^\infty z^j \exp(-zp_m) dz = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{m=1}^n A_m p_m^{-j} j!, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что при $k \geq 1$ из (34) следует (32), поскольку

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} = 0. \square$$

Итак, условия (30), (32) совпадают с первыми r условиями интерполяционности КФ при $s = 1$ (см. гл. 2). В случае $r = n$ коэффициенты A_k однозначно определяются из условий (34), и фактически задачу минимизации решать не нужно.

Далее считаем $r < n$. Заменой $z = -\ln t$ преобразуем задачу минимизации к виду

$$L(A) = \int_0^1 |(1 + \ln t)^r \sum_{k=1}^n A_k p_k t^{p_k-1}| dt \rightarrow \min \quad (35)$$

при условиях (30), (32). Ясно, что эта задача имеет решение. Очевидно, что неравенство (33) обращается в равенство на функции-оригинале с кусочно-постоянной производной порядка r , по модулю равной M и меняющей знак в тех же точках, что и функция под знаком модуля в интеграле (33). Формально эта функция не принадлежит классу $C^r M$, но нижняя граница интеграла слева в (35) достигается именно на ней.

Опишем приближенный метод нахождения решения задачи (35) путем сведения к задаче линейного программирования, используя при этом некоторые идеи работы [10].

Обозначим Ω_r множество векторов $A = (A_1, \dots, A_n)$, удовлетворяющих условиям (30), (32), и положим

$$\Phi(t, A) = (1 + \ln t)^r \sum_{k=1}^n A_k p_k t^{p_k-1}. \quad (36)$$

Лемма 6. Для любых чисел p_1, \dots, p_n таких, что $1 < p_1 < \dots < p_n$, функция $\Phi(t, A)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет не более n точек перемены знака.

Доказательство. Вынесем в (36) за знак суммы множитель t^{p_1-1} , считая $A_1 \neq 0$ (в противном случае можно уменьшить n) и положим

$$a_k = p_k - p_1, \quad t = \exp(x), \quad \varphi_k(x) = \exp(a_k x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ чебышевская на любом отрезке, так как $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, и потому сумма в (36) имеет менее n корней. При нечетном r есть еще одна точка перемены знака функции $\Phi(t, A)$, равная $t = e^{-1}$. \square

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на N частей точками $t_j : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, и положим $h_N = \max_j \{t_j - t_{j-1}\}$. Рассмотрим задачу минимизации на Ω_r функции

$$L_N(A) = \sum_{j=1}^N \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t, A) dt \right| \quad (37)$$

при условиях (30), (32). Обозначим её решение A_N , а решение задачи (35) — A^* .

Теорема 7. *Справедливы неравенства*

$$L_N(A_N) \leq L(A^*) \leq L(A_N).$$

Доказательство. Неравенство $L(A^*) \leq L(A_N)$ очевидно. Из определения величины $L_N(A)$ следует неравенство $L_N(A) \leq L(A)$ при любом $A \in \Omega_r$, откуда $L_N(A^*) \leq L(A^*)$, но $L_N(A_N) \leq L_N(A^*)$. \square

Следовательно, оптимальное решение задачи $L_N(A) \rightarrow \min$ позволяет получить двусторонние оценки для искомого оптимального значения $L(A^*)$.

Теорема 8. *Для любого $A \in \Omega_r$ справедливо неравенство*

$$0 \leq L(A) - L_N(A) \leq Ch_N,$$

где C — некоторая не зависящая от N величина.

Доказательство. Положим

$$R_j(A) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\Phi(t, A)| dt - \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t, A) dt \right|,$$

тогда

$$L(A) - L_N(A) = \sum_{j=1}^N R_j(A).$$

Если на интервале (t_{j-1}, t_j) функция $\Phi(t, A)$ знакопостоянна, то $R_j(A) = 0$. Пусть (t_{j-1}, t_j) содержит единственную точку σ перемены знака функции $\Phi(t, A)$, тогда $R_j(A) \neq 0$. Очевидна следующая

цепочка преобразований:

$$\begin{aligned} R_j(A) &= \int_{t_{j-1}}^{\sigma} |\Phi(t, A)| dt + \int_{\sigma}^{t_j} |\Phi(t, A)| dt - \\ &\quad - \left| \int_{t_{j-1}}^{\sigma} \Phi(t, A) dt \right| - \left| \int_{\sigma}^{t_j} \Phi(t, A) dt \right| = \\ &= 2 \min \left\{ \left| \int_{t_{j-1}}^{\sigma} \Phi(t, A) dt \right|, \left| \int_{\sigma}^{t_j} \Phi(t, A) dt \right| \right\}, \end{aligned}$$

и для оценки $R_j(A)$ можно воспользоваться любым из стоящих справа интегралов. Например, рассмотрим первый из них:

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k p_k \int_{t_{j-1}}^{\sigma} (1 + \ln t)^r t^{p_k-1} dt \right|.$$

Поскольку

$$(1 + \ln t)^r = \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \ln^j t,$$

то достаточно рассмотреть интегралы вида

$$\int_{t_{j-1}}^{\sigma} t^{p_k-1} \ln^m t dt, \quad m = 0, 1, \dots, r.$$

При $m = 0$ имеем

$$\int_{t_{j-1}}^{\sigma} t^{p_k-1} dt = \frac{1}{p_k} (\sigma^{p_k} - t_{j-1}^{p_k}) \leq \sigma^{p_k-1} (\sigma - t_{j-1}).$$

При $m \geq 1$ в силу формулы

$$\int t^a \ln^m t dt = \frac{t^{a+1}}{m+1} \sum_{k=0}^m (-1)^k (m+1) \cdots (m-k+1) \frac{\ln^{m-k} t}{(a+1)^{k+1}}$$

достаточно оценить разность $y(\sigma) - y(t_{j-1})$ для функций вида

$$y(t) = t^b \ln^k t, \quad b = p_m, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Очевидно, производная $y'(t)$ ограничена на $[0, 1]$, если $b > 1$, и в этом случае

$$|y(\sigma) - y(t_{j-1})| \leq \max_t |y'(t)| (\sigma - t_{j-1}).$$

В итоге получим оценку

$$R_j(A) \leq C(\sigma - t_{j-1}) < C(t_j - t_{j-1}) \leq Ch_N.$$

Ясно, что оценку такого же вида можно получить и в случае, когда на (t_{j-1}, t_j) расположено несколько точек перемены знака функции $\Phi(t, A)$. Остается вспомнить, что общее число таких точек по лемме 6 не превосходит n , не зависящего от N . \square

Возьмем в качестве t_j равноотстоящие точки отрезка $[0, 1]$, тогда $h_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Если с ростом N оптимальные решения A_N ограничены, то сходимость метода следует из теоремы 8.

Задача минимизации величины (37) сводится к основной задаче линейного программирования: найти неотрицательный вектор, удовлетворяющий линейным ограничениям и доставляющий данной линейной форме минимальное значение. Действительно,

$$\Phi(t, A) = \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(t), \quad \varphi_k(t) = (1 + \ln t)^r p_k t^{p_k - 1}.$$

Положим

$$c_{jk} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(t) dt, \quad l_j(A) = \sum_{k=1}^n A_k c_{jk},$$

тогда

$$L_N(A) = \sum_{j=1}^N |l_j(A)|.$$

Далее стандартным образом избавляемся от знака модуля, вводя в рассмотрение положительные и отрицательные части функционалов $l_j(A)$ и т. д. Затем можно воспользоваться известными методами решения подобных задач [5].

§ 5. Обращение многомерного преобразования Лапласа при помощи КФ

В этом параграфе результаты работы [39], изложенные в § 2, обобщаются на многомерный случай. Доказательства по существу сохраняются, поэтому мы не будем их подробно повторять, а будем отмечать необходимые изменения в них.

Далее рассуждения проводятся для двумерного случая, с целью упрощения изложения, хотя они справедливы и в случае произвольной размерности.

1⁰. Двумерным преобразованием Лапласа функции $f(t_1, t_2)$ называется величина

$$F(p_1, p_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-p_1 t_1 - p_2 t_2) f(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Справедлива формула обращения

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \exp(p_1 t_1 + p_2 t_2) F(p_1, p_2) dp_1 dp_2$$

при соответствующем выборе c_1, c_2 (см. [14]).

По аналогии с одномерным случаем рассмотрим функцию

$$\varphi_s(p) = p_1^{s_1} p_2^{s_2} F(p_1, p_2),$$

где числа s_1, s_2 не превосходят скоростей убывания изображения по p_1 и p_2 , соответственно. Если функции $F(p_1, p_2), \varphi_{s_1 s_2}(p_1, p_2)$ регулярны при $\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2 > 0$, то формулу обращения можно записать в виде

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_1^{s_1-1} t_2^{s_2-1}}{(2\pi i)^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} dp_1 \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} e^{p_1 t_1 + p_2 t_2} p_1^{-s_1} p_2^{-s_2} \varphi_{s_1 s_2} \left(\frac{p_1}{t_1}, \frac{p_2}{t_2} \right) dp_2.$$

Затем, выбрав произвольным образом попарно различные точки $(p_1^{(i)}, p_2^{(j)}), i, j = 1.2. \dots, n$, в области регулярности изображения, по аналогии с одномерным случаем, введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$f(t_1, t_2) \approx t_1^{s_1-1} t_2^{s_2-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \varphi_{s_1 s_2} \left(\frac{p_1}{t_1}, \frac{p_2}{t_2} \right). \quad (38)$$

Далее, можно выбрать коэффициенты A_{ij} из условия точности КФ для некоторого набора функций $\varphi_{s_1 s_2}(p_1, p_2)$ аналогично тому, как это делалось в одномерном случае. На этой стороне дела мы не будем останавливаться, а основное внимание уделим оценке погрешности данной КФ вида (38).

2⁰. Рассмотрим множество функций $g(z_1, z_2)$, регулярных в бицилиндре

$$\Delta_r = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < r_1, |z_2| < r_2\} \quad (39)$$

и непрерывных на его замыкании. Такой класс функций обозначим R_r .

Пусть $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Напомним (см. §1), что при любом фиксированном числе s функция $1/\Gamma(s+z)$ целая, т. е. разлагается во всюду сходящийся степенной ряд

$$\frac{1}{\Gamma(s+z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ms} z^m.$$

По аналогии с одномерным случаем введем оператор

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} \left(s + z \frac{d}{dz} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ms} \left(z \frac{d}{dz} \right)^m = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \gamma_{m_1 s_1} \gamma_{m_2 s_2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{m_1} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{m_2}, \end{aligned}$$

определенный на регулярных в бицилиндре (39) функциях. Исходя из этого определения, легко проверить, что при любом мультииндексе $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ таком, что $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ ($\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$) справедливо тождество

$$\Gamma^{-1} \left(s + z \frac{d}{dz} \right) z^\alpha = \frac{z^\alpha}{\Gamma(s+\alpha)} = \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\Gamma(s_1+\alpha_1)\Gamma(s_2+\alpha_2)}.$$

Лемма 7. Пусть функция-оригинал $f(z_1, z_2)$ представима рядом

$$f(z) = z^\beta \sum_{|m|=0}^{\infty} a_m z^m = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_{m_1 m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \quad (40)$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам

$$|a_{m_1 m_2}| \leq \frac{\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2}}{m_1! m_2!}, \quad (\sigma_1, \sigma_2 > 0), \quad (41)$$

и её изображение по Лапласу таково, что при некотором $s = (s_1, s_2)$ функция

$$P_s(z) = z^{-s} \varphi_s(1/z) = \frac{1}{z_1^{s_1} z_2^{s_2}} \varphi_{s_1 s_2} \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2} \right) \quad (42)$$

регулярна в бицилиндре (39). Тогда имеет место формула обращения

$$\Gamma^{-1} \left(s + z \frac{d}{dz} \right) P_s(z) = \frac{1}{z^{s-1}} f(z) = \frac{1}{z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1}} f(z_1, z_2).$$

Доказательство. Из условий леммы вытекает возможность почленного применения преобразования Лапласа к представлению (40) и равенство

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2) &= \sum_{|m|=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{p^{m+\beta+1}} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_{m_1 m_2} \frac{\Gamma(m_1 + \beta_1 + 1)}{p_1^{m_1+\beta_1+1}} \frac{\Gamma(m_2 + \beta_2 + 1)}{p_2^{m_2+\beta_2+1}}. \end{aligned}$$

Неравенства (41) обеспечивают сходимость этого ряда. Функция (42) будет равна

$$\begin{aligned} P_{s_1 s_2}(z_1, z_2) &= \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_{m_1 m_2} z_1^{m_1+\beta_1+1} z_2^{m_2+\beta_2+1} \Gamma(m_1 + \beta_1 + 1) \Gamma(m_2 + \beta_2 + 1). \end{aligned}$$

Она регулярна в бицилиндре (39), и в силу её свойств получаем

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} \left(s + z \frac{d}{dz} \right) P_s(z) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_{m_1 m_2} z_1^{m_1+\beta_1+1-s_1} z_2^{m_2+\beta_2+1-s_2} = \\ &= z_1^{\beta_1+1-s_1} z_2^{\beta_2+1-s_2} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_{m_1 m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2} = z_1^{1-s_1} z_2^{1-s_2} f(z_1, z_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

3⁰. Пусть $z = (z_1, z_2)$ — произвольная точка такая, что $|z_i| < \rho_i$, $i = 1, 2$, т.е. $z \in \Delta_\rho$, а функция $g(z) = g(z_1, z_2)$ принадлежит

классу R_ρ . Обозначим $\partial\Delta_\rho$ границу бицилиндра Δ_ρ и запишем интегральную формулу Коши [59]

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial\Delta_\rho} \frac{g(t) dt}{t-z} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial\Delta_\rho} \frac{g(t_1, t_2) dt_1 dt_2}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\rho_1 \exp(i\varphi_1), \rho_2 \exp(i\varphi_2)) d\varphi_1 d\varphi_2}{(1 - z_1/t_1)(1 - z_2/t_2)}, \\ &\quad t_m = \rho_m \exp(i\varphi_m), \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть задан некоторый линейный непрерывный функционал \mathcal{L} , тогда

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} g(re^{i\varphi}) \mathcal{L}\left(\frac{1}{1 - z/t}\right) d\varphi, \quad (43)$$

причем ряд

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{1 - z/t}\right) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(z^m)}{t^m} = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{\mathcal{L}(z_1^{m_1} z_2^{m_2})}{t_1^{m_1} t_2^{m_2}}$$

абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{|\mathcal{L}(z_1^{m_1} z_2^{m_2})|}{\rho_1^{m_1} \rho_2^{m_2}} < \infty$$

при любом $z \in \Delta_\rho$. Из (43) следует неравенство

$$|\mathcal{L}g(z)|^2 \leq \frac{1}{(4\pi^2)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} |g(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \int_{[0, 2\pi]^2} \left| \mathcal{L}\left(\frac{1}{1 - z/t}\right) \right|^2 d\varphi. \quad (44)$$

Система степеней $\{t_i^j\}$, $i = 1, 2$, $j = 0, \pm 1, \dots$, ортогональна на окружности, т. е.

$$\int_0^{2\pi} t_i^{-l} \overline{t_p^{-m}} d\varphi_i = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ 2\pi/\rho_i^{2m}, & l = m, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

В итоге неравенство (44) примет вид

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}g(z)|^2 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} |g(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{L}(z^m)|^2}{\rho^{2m}} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\rho_1 e^{i\varphi_1}, \rho_2 e^{i\varphi_2})|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{L}(z_1^{m_1} z_2^{m_2})|^2}{\rho_1^{2m_1} \rho_2^{2m_2}}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Положим $\lambda_i = p_1^{(i)}$, $\mu_j = p_2^{(j)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где $p_1^{(i)}, p_2^{(j)}$ — узлы КФ (38), и пусть $|\lambda_i|, |\mu_j| < 1$ для всех i, j . Теперь введем в рассмотрение оператор

$$Q_s = \Gamma_s^{-1} \left(s + s \frac{d}{dz} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} G_{ij},$$

определенный на классе R_ρ , где

$$G_{ij}g(z) = g(\lambda_i z_1, \mu_j z_2).$$

Пусть $t = (t_1, t_2)$ некоторая фиксированная точка, принадлежащая Δ_ρ , т. е. $|t_i| < \rho_i$, $i = 1, 2$. В качестве функционала \mathcal{L} возьмем значение

$$\mathcal{L}g(z) = Q_s g(z) \Big|_{z=t}. \tag{46}$$

Исходя из определения и свойств входящих сюда операторов, имеем

$$\mathcal{L}(z^m) = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \left(\frac{1}{\Gamma(s_1 + m_1) \Gamma(s_2 + m_2)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_i^{m_1} \mu_j^{m_2} \right). \tag{47}$$

Легко проверить, что для функционала (46) входящие в его оценку (45) величины существуют.

Теорема 9. Пусть функция-оригинал $f(t_1, t_2)$ и её изображение $F(p_1, p_2)$ удовлетворяют условиям леммы 7 и пусть даны произвольные попарно различные комплексные числа λ_i, μ_i такие, что $|\lambda_i|, |\mu_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда функция $f(t_1, t_2)$ для любых $t_1, t_2 \geq 0$ представима в виде

$$f(t_1, t_2) = t_1^{s_1-1} t_2^{s_2-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} P_{s_1 s_2}(\lambda_i t_1, \mu_j t_2) + \varepsilon_n^{(s_1, s_2)}(t_1, t_2) \right), \tag{48}$$

и для любых чисел ρ_1, ρ_2 таких, что $0 \leq t_i \leq \rho_i < r_i$, $i = 1, 2$, имеет место оценка

$$|\varepsilon_n^{(s_1, s_2)}(t_1, t_2)| \leq \sigma_{s_1 s_2} \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_{s_1 s_2}(\rho_1 e^{i\varphi_1}, \rho_2 e^{i\varphi_2})|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \right)^{1/2}, \quad (49)$$

где

$$\sigma_{s_1 s_2}^2 = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s_1 + m_1)\Gamma(s_2 + m_2)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_i^{m_1} \mu_j^{m_2} \right|^2 \times \\ \times \left(\frac{t_1}{\rho_1} \right)^{2m_1} \left(\frac{t_2}{\rho_2} \right)^{2m_2}. \quad (50)$$

Доказательство. Положим $g(z) = P_s(z)$ (см. (42)). Тогда в силу леммы 7 и определения Q_s имеем

$$\mathcal{L}P_s(z) = t_1^{1-s_1} t_2^{1-s_2} f(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} P_{s_1 s_2}(\lambda_i t_1, \mu_j t_2). \quad (51)$$

Обозначим $\varepsilon_n^{(s_1, s_2)}(t_1, t_2)$ левую часть (51), тогда (51) можно переписать в форме (48). Для оценки величины $\mathcal{L}P_s(z)$ воспользуемся неравенством (45), при этом члены ряда справа в (45) вычисляем с помощью формулы (47), что в итоге приводит к оценке (48). \square

Замечание 6. Как и в одномерном случае, имеет место равномерная оценка величины (50), а именно

$$\sigma_{s_1 s_2} \leq \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(s_1 + m_1)\Gamma(s_2 + m_2)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_i^{m_1} \mu_j^{m_2} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (52)$$

4⁰. С помощью доказанной теоремы можно получать оценки погрешности различных КФ при конкретном выборе чисел A_{ij}, λ_i, μ_j .

Остановимся на одном частном случае применительно к двумерному преобразованию Лапласа. Пусть $A_k^{(s)}, p_k^{(s)}$ — коэффициенты и узлы КФНСТ обращения преобразования Лапласа в одномерном случае (см. гл. 2). Положим в формуле (48) $A_{ij} = A_i^{(s_1)} A_j^{(s_2)}, \lambda_i = 1/p_i^{(s_1)}, \mu_j = 1/p_j^{(s_2)}, i, j = 1, 2, \dots, n$, т.е. для обращения двумерного преобразования Лапласа возьмем произведение одномерных

формул. Мы видели, что для любых $s_1, s_2 > 0$ при $n \geq 2$ справедливы неравенства $|\lambda_i|, |\mu_i| < 1$. Следовательно, для такой КФ применима теорема 9, в частности оценка (52) имеет вид

$$\sigma_{s_1 s_2} \leq \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s_1 + m_1) \Gamma(s_2 + m_2)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_i^{m_1} \mu_j^{m_2} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (53)$$

Заметим, что в ней отсутствует знак модуля, поскольку все слагаемые в двойной сумме вещественны в силу попарной комплексной сопряженности узлов и коэффициентов одномерных КФНСТ.

Пусть s_1, s_2 — натуральные числа. Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_1(s) &= I_0(2) - \sum_{m=0}^{s-2} (m!)^{-2}, \quad I_0(2) = 2.27958530 \dots, \\ f_2(s, A_i^{(s)}, \lambda_i) &= \sum_{i=1}^n A_i^{(s)} \lambda_i^{1-s} \left(e^{\lambda_i} - \sum_{j=0}^{s-2} \frac{\lambda_i^j}{j!} \right), \\ f_3(s, A_i^{(s)}, \lambda_i) &= \sum_{i=1}^n \frac{(A_i^{(s)})^2}{1 - \lambda_i^2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{A_i^{(s)} A_j^{(s)}}{1 - \lambda_i \lambda_j}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что величина в правой части оценки (53) представима в виде

$$\begin{aligned} & (f_1(s_1) f_1(s_2) - 2 f_2(s_1, A_i^{(s_1)}, \lambda_i) f_2(s_2, A_i^{(s_2)}, \mu_i) + \\ & + f_3(s_1, A_i^{(s_1)}, \lambda_i) f_3(s_2, A_i^{(s_2)}, \mu_i))^{1/2} \equiv \sigma_n^{(s_1, s_2)}. \end{aligned}$$

Её вычисление для конкретных n, s_1, s_2 труда не представляет. Так, при $s_1 = s_2 = 1$ и $n = 2, 3, 4$ получаем значения

$$\sigma_2^{(1,1)} = 5.6 \cdot 10^{-2}, \quad \sigma_3^{(1,1)} = 5.2 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma_4^{(1,1)} = 2.6 \cdot 10^{-6}.$$

Как видим, с ростом n они быстро убывают.

5⁰. Опишем применение двумерного преобразования Лапласа к решению краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0. \quad (54)$$

Разыскивается его решение, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

и граничным условиям

$$\left(d_0 \frac{\partial u}{\partial x} + e_0 u \right)_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left(d_1 \frac{\partial u}{\partial x} + e_1 u \right)_{x=a} = \psi_2(t),$$

где d_i, e_i , $i = 1, 2$ — некоторые постоянные числа. Предположим, что искомая функция и все её далее встречающиеся производные, а также функции $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t)$ преобразуемы по Лапласу (далее для упрощения выкладок считаем $f(x, t) = 0$). Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} U(p, q) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qt} u(x, t) dx dt, \quad \Phi(p) = \int_0^\infty e^{-px} \varphi(x) dx, \\ \overline{\psi}_i(q) &= \int_0^\infty e^{-qt} \psi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \quad \overline{u}(0, q) = \int_0^\infty e^{-qt} u(0, t) dt, \\ \overline{u}(a, q) &= \int_0^\infty e^{-qt} u(a, t) dt, \quad \overline{u}'_x(0, q) = \int_0^\infty e^{-qt} u'_x(0, t) dt, \\ \overline{u}'_x(a, q) &= \int_0^\infty e^{-qt} u'_x(a, t) dt. \end{aligned}$$

Применим двумерное преобразование Лапласа по переменным x, t к уравнению (54):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qt} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt \quad (55)$$

и одномерное преобразование Лапласа по t к граничным условиям, которые примут вид

$$d_0 \overline{u}'_x(0, q) + e_0 \overline{u}(0, q) = \overline{\psi}_1(q), \quad d_1 \overline{u}'_x(a, q) + e_1 \overline{u}(a, q) = \overline{\psi}_2(q). \quad (56)$$

Будем считать, что при $x > a$ решение $u(x, t)$ равно нулю. С помощью интегрирования по частям из (55) находим изображение

$$U(p, q) = \frac{p \overline{u}(0, q) - \Phi(p) + \overline{u}'_x(0, q) - p e^{-pa} \overline{u}(a, q) - e^{-pa} \overline{u}'_x(a, q)}{p^2 - q}. \quad (57)$$

Сюда входят неизвестные величины $\bar{u}'_x(0, q), \bar{u}'_x(a, q)$ (две другие $\bar{u}(0, q), \bar{u}(a, q)$ либо выражаются через них, либо находятся из условий (56)). Покажем, что эти функции могут быть выражены через известные величины.

Так как промежуток изменения переменной x конечен, то преобразование Лапласа по x вида

$$\int_0^a e^{-px} f(x) dx,$$

а вместе с ним и двумерное преобразование $U(p, q)$ существуют при любом конечном значении p , как с положительной, так и с отрицательной вещественной частью. Следовательно, дробь (57) должна быть регулярной при всех p , в том числе и при $p = \pm\sqrt{q}$, когда знаменатель равен нулю. Поэтому приравняем нулю числитель дроби (57) при $p = \sqrt{q}$ и $p = -\sqrt{q}$. Из этих двух уравнений величины $\bar{u}'_x(0, q), \bar{u}'_x(a, q)$ однозначно определяются.

Итак, изображение $U(p, q)$ известно. Далее выбираем значения параметров s_1, s_2 в зависимости от скорости убывания изображения по переменным p, q и применяем КФ обращения. Напомним, что в случае ограниченного оригинала следует положить $s_1 = s_2 = 1$.

К сожалению, при $x \rightarrow a$ ($x < a$) приближенные решения будут содержать большую ошибку, что объясняется разрывом оригинала при $x = a$, ибо мы положили $u(x, t) = 0$ при $x > a$ независимо от значений $u(a, t)$. Напомним, что формула обращения Римана-Меллина доставляет значение оригинала в точке его непрерывности и полусумму значений слева и справа от точки разрыва в случае разрыва первого рода, так что в нашем случае приближенный результат при $x \rightarrow a$ будет отличаться от точного практически в два раза (см. табл. 2).

Покажем, как можно устранить эту особенность.

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a, \quad t \geq 0, \\ u(a, t), & x \geq a, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Разумеется, функция $u(a, t)$ нам неизвестна, но её изображение

$$V(a, q) = \int_0^\infty e^{-qt} u(a, t) dt$$

находится из второго уравнения в (56):

$$V(a, q) = \frac{\overline{\psi_2}(q) - d_1 \overline{u}'_x(a, q)}{e_1}.$$

Функция $u_1(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$ в области $0 < x < a$, $t > 0$ совпадает с искомым решением и непрерывна при всех положительных значениях x, t . Её двумерное преобразование Лапласа равно

$$U_1(p, q) = U(p, q) + \frac{e^{-p a}}{p} V(a, q), \quad (58)$$

так как

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p x - q t} v(x, t) dx dt = \frac{1}{p} e^{-p a} V(a, q)$$

(под $U(p, q)$ подразумевается величина (57)). В частности, в КФ (48) при $s_1 = s_2 = 1$ используется функция (42), содержащая значения функции

$$\varphi_{11}(p, q) = p q U(p, q) + q e^{-p a} V(a, q).$$

Пример. Рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \\ \left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} &= 2(1 - e^{-t/2}), \quad \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=1} = 1. \end{aligned}$$

Для обращения преобразования Лапласа использовалась КФ (48), полученная при $s_1 = s_2 = 1$ произведением одномерных формул для $n = 8$. В первом случае обращалось изображение (57), а во втором — изображение (58). Для сравнения эта же задача решалась третьим способом — разностным методом по неявной шеститочечной разностной схеме с применением метода прогонки на каждом временном слое с шагами $\tau = 0.05$ по переменной t и $h = 0.025$ по переменной x . В табл. 2 приведены полученные описанными тремя способами значения $u(x, 2)$.

Видно, что во втором и третьем случаях решения близки друг к другу, в то время как в первом случае в окрестности точки $x = 1$ происходит резкое изменение решения, чего и следовало ожидать.

Во втором случае в окрестности точки $x = 1$ решение практически не меняется, что и было заложено в самом способе устранения разрыва.

Таблица 2

| x | Значения $u(x, 2)$ | | |
|-----|--------------------|----------|----------|
| | способ 1 | способ 2 | способ 3 |
| 0.1 | 1.0359 | 1.0359 | 1.0347 |
| 0.2 | 1.0182 | 1.0182 | 1.0142 |
| 0.3 | 1.0037 | 1.0037 | 1.0010 |
| 0.4 | 0.9923 | 0.9924 | 0.9927 |
| 0.5 | 0.9828 | 0.9840 | 0.9840 |
| 0.6 | 0.9806 | 0.9780 | 0.9776 |
| 0.7 | 0.9638 | 0.9738 | 0.9734 |
| 0.8 | 1.0149 | 0.9713 | 0.9714 |
| 0.9 | 0.9052 | 0.9704 | 0.9704 |
| 1.0 | 0.5339 | 0.9708 | 0.9732 |

Замечание 7. В предельном случае $a = \infty$ задача устранения разрыва не возникает, и предложенная методика обобщает известную (см. [14]) на случай первого из граничных условий (56). При $a < \infty$ методика [14] неприменима. Отметим, что при обращении преобразования Лапласа приближенное решение определяется по заданным координатам x, t независимо друг от друга, в отличие от разностных методов, где решение определяется последовательно на временных слоях. В настоящем параграфе изложение результатов следует работам [40, 44, 8].

ОБОБЩЁННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НАИВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 1. Постановка задачи

Напомним, что КФНСТ по построению точна для оригиналов вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t)$, где Q_{2n-1} — любой многочлен степени не выше $2n-1$. В предположении существования значений $f(+0)$, $f(+\infty)$ и ограниченности оригинала следует полагать $s=1$, тогда КФНСТ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ приводит к точному результату, так как сумма коэффициентов КФНСТ равна единице. Заметим, что предельные значения оригинала $f(+0)$, $f(+\infty)$, если они существуют, могут быть вычислены по формулам

$$f(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p), \quad f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

К сожалению, КФНСТ плохо приспособлены для обращения изображений, соответствующих медленно протекающим длительным процессам. Так, в задачах линейной вязкоупругости [38], описывающих напряженное состояние на основе определяющего соотношения Больцмана—Вольтерра (пространственные координаты ниже для простоты опущены), деформации ε и напряжения σ связаны соотношением (обобщённый закон Гука)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right). \quad (1)$$

Первое слагаемое справа в (1) соответствует мгновенной деформации, а второе — наследственной деформации. Как правило, из эксперимента определяется функция ползучести материала — значение правой части (1) при $\sigma = \text{const}$, т. е.

$$\varepsilon(t) = \frac{c}{E} \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right). \quad (2)$$

Важнейшей задачей становится выбор подходящего ядра K интегрального уравнения (1), определяющего функцию ползучести (2). Ядро K должно иметь интегрируемую особенность в точке $t =$

0. Чаще всего в качестве такового берут дробно-экспоненциальную функцию Работнова [38] (резольвента ядра Абеля)

$$\Theta_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \quad -1 < \alpha \leq 0. \quad (3)$$

Способ определения параметров дробно-экспоненциальной функции по измеренной функции ползучести описан в работе [16].

Интеграл от этого ядра по полуоси $t \geq 0$ должен быть конечным, для чего необходимо $\beta < 0$. Не умаляя общности, далее считаем $\beta = -1$, и пусть символ $\Theta_\alpha(t)$ означает $\Theta_\alpha(-1, t)$.

В наследственной механике твердого тела наряду с функцией (3) широко используется и интеграл от нее с переменным верхним пределом. Для облегчения использования этих величин составлены таблицы функций [38]

$$F_1(\alpha, x) = t^{-\alpha} \Theta_\alpha(x), \quad F_2(\alpha, x) = t^{-\alpha-1} \int_0^t \Theta_\alpha(\tau) d\tau, \quad x = t^{\alpha+1}.$$

Заметим, что $F_1(\alpha, x) = E_{1/a}(-x, a)$, $a = \alpha + 1$, где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

есть функция Миттаг-Леффлера [13].

Однако при решении конкретных задач необходимо вводить в память вычислительной машины части этих таблиц, соответствующие найденным параметрам Θ_α — функций, которые заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи (и в итоге таковых в таблице может не оказаться). При изменении параметров приходится эту работу проделывать заново, что неудобно и сопряжено с внесением ошибок.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1), получаем

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{\lambda}{p^{\alpha+1} - \beta} \right) \bar{\sigma}(p). \quad (4)$$

В частности, изображение функции ползучести равно

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{c}{pE} \left(1 + \frac{\lambda}{p^{\alpha+1} - \beta} \right). \quad (5)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению движения среды, получим второе соотношение между $\bar{\varepsilon}(p)$ и $\bar{\sigma}(p)$, а затем, используя (4), найдём $\bar{\varepsilon}(p)$ и $\bar{\sigma}(p)$. Если искомые функции $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ ограничены, то можно положить $s = 1$ и в качестве $\varphi_s(p)$ рассматривать функции $p\bar{\varepsilon}(p)$ и $p\bar{\sigma}(p)$. Они зависят фактически от p^a , $a = \alpha + 1$. Заметим, что для реальных процессов деформирования значение s можно увеличить: так, изображение по Лапласу второго слагаемого в (2), определяющего наследственную деформацию, равно $\lambda/(p(p^a - \beta))$, и можно положить $s = 1 + a$. Искомые решения $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ на конечном по t отрезке времени допускают хорошие приближения вида $t^{s-1}Q(t^a)$ при $0 < a \leq 1$, где $Q(t)$ — некоторый многочлен, и при уменьшении a скорость их изменения уменьшается.

В таком случае целесообразно вместо КФНСТ построить и использовать обобщенные квадратурные формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ), точные для функций $\varphi(p) = p^{-aj}$, $j = 0, 2n-1$, или для оригиналов вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t^a)$ (Q_{2n-1} — произвольный многочлен), где a — любое положительное число (наибольший интерес представляет случай $a \in (0, 1]$).

Такие формулы были введены в работе [41] и исследованы в статье [45]. Результаты их применения к решению практических задач содержатся в [16].

§ 2. Обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности

Рассматривается квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k) \quad (6)$$

с узлами в правой полуплоскости, в которой $\varphi(p)$ регулярна. Потребуем, чтобы формула (6) была точна для функций $\varphi(p) = p^{-am}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ (т. е. обладала $(n-1)$ -свойством), где a — некоторое фиксированное положительное число. Это требование равносильно условиям

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-am} = \frac{1}{\Gamma(s+am)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (7)$$

которые будем называть условиями интерполяционности, а саму формулу (6) интерполяционной. Условия (7) эквивалентны формулам

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \frac{\omega_n(p^{-a})}{(p^{-a} - p_k^{-a}) \omega'_n(p_k^{-a})} dp, \quad (8)$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - p_k^{-a}). \quad (9)$$

Как и в случае КФНСТ естественно поставить задачу построения формул наивысшей степени точности за счёт выбора узлов.

Теорема 1. Для того чтобы формула (6) обладала $(2n-1)$ -свойством, необходимо и достаточно выполнения двух условий:

- 1) формула (6) интерполяционная, т. е. её коэффициенты вычисляются по формуле (8);
- 2) построенный по узлам формулы многочлен (9) удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n(p^{-a}) p^{-am} dp = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть формула (6) обладает $(2n-1)$ -свойством. Очевидно, что она интерполяционная. Возьмём произвольный многочлен $Q_{n-1}(p^{-a})$ и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n(p^{-a}) Q_{n-1}(p^{-a}) dp.$$

Так как $\omega_n(p^{-a}) Q_{n-1}(p^{-a})$ есть многочлен от p^{-a} степени не выше $2n-1$, то этот интеграл точно вычисляется по формуле (6), что даёт нулевое значение. Следовательно, второе условие выполнено.

Пусть теперь выполнены условия 1)–2) теоремы. Возьмём произвольный многочлен $P_{2n-1}(p^{-a})$ и разделим его на $\omega_n(p^{-a})$:

$$P_{2n-1}(p^{-a}) = \omega_n(p^{-a}) Q_{n-1}(p^{-a}) + R_{n-1}(p^{-a}).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} P_{2n-1}(p^{-a}) dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n(p^{-a}) Q_{n-1}(p^{-a}) dp + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} R_{n-1}(p^{-a}) dp.$$

Первый интеграл по условию 2) равен нулю, а второй интеграл по условию 1) точно равен

$$\sum_{k=1}^n A_k R_{n-1}(p_k^{-a}) = \sum_{k=1}^n A_k P_{2n-1}(p_k^{-a}),$$

т. е. формула (6) обладает $(2n-1)$ -свойством. \square

Доказанная теорема сводит вопрос о существовании квадратурной формулы (6) с $(2n-1)$ -свойством к существованию многочлена $\omega_n(x)$ вида (9), удовлетворяющего условию (10).

Лемма 1. Для любых положительных чисел a, s и при любом целом неотрицательном m определитель

$$\begin{vmatrix} 1/\Gamma(s) & 1/\Gamma(s+a) & \dots & 1/\Gamma(s+ma) \\ 1/\Gamma(s+a) & 1/\Gamma(s+2a) & \dots & 1/\Gamma(s+(m+1)a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/\Gamma(s+ma) & 1/\Gamma(s+(m+1)a) & \dots & 1/\Gamma(s+2ma) \end{vmatrix} \quad (11)$$

отличен от нуля.

Доказательство. Для $m=1$ утверждение очевидно. Пусть $m > 1$. Домножим первую строку и первый столбец определителя на $\Gamma(s/2)$, вторую строку и второй столбец — на $\Gamma(s/2+a)$, и так далее, последнюю строку и последний столбец — на $\Gamma(s/2+ma)$. Все эти числа не равны нулю. Воспользуемся известным соотношением между B - и Γ -функциями Эйлера

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

в результате чего получим определитель

$$\begin{vmatrix} B(s/2, s/2) & \dots & B(s/2, s/2+ma) \\ B(s/2+a, s/2) & \dots & B(s/2+a, s/2+ma) \\ \dots & \dots & \dots \\ B(s/2+ma, s/2) & \dots & B(s/2+ma, s/2+ma) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

[illegible]
$$\int_0^1 p(t)t^{ak}Q_m[(1-t)^a]dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (14)$$
$$p(t) = [t(1-t)]^{s/2-1}, \quad Q_m(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m.$$
$$\int_0^1 p(t)P_m(t^a)Q_m[(1-t)^a]dt = 0. \quad (15)$$

Теорема 2. Многочлен $\omega_n(x)$ вида (9), удовлетворяющий условиям (10), существует и единствен.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-\alpha} dp = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0,$$
$$\frac{b_1}{\Gamma[s + (n + k - 1)a]} + \cdots + \frac{b_n}{\Gamma[s + ka]} = -\frac{1}{\Gamma[s + (n + k)a]},$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Определитель этой системы по лемме 1 отличен от нуля, так что у неё существует единственное (вещественное) решение. \square

Итак, многочлен $\omega_n(x)$, определяющий узлы обобщённой квадратурной формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ) с $(2n - 1)$ -свойством, определяется однозначно. При $a = 1$ ОКФНСТ совпадают с КФНСТ, построенными ранее, и их узлы, как было показано, простые. Значит, и в некоторой окрестности точки $a = 1$ все точки p_k^{-a} также простые. При построении ОКФНСТ для различных значений n, s, a узлы всегда оказывались попарно различными. Видимо, утверждение о простоте корней справедливо при любом $a > 0$, однако его доказательством мы не располагаем.

§ 3. Расположение узлов обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности

В предыдущем параграфе были приведены необходимые и достаточные условия того, что КФ обладает $(2n - 1)$ -свойством. Покажем, что это наивысшая возможная степень точности.

Теорема 3. *При любом выборе узлов квадратурная формула с n узлами не может обладать $2n$ -свойством.*

Доказательство. Если КФ обладает $2n$ -свойством, то она обладает и $(2n - 1)$ -свойством. Значит, её узлы однозначно определяются теоремой 1. Возьмём произвольный многочлен $Q_n(x)$ с вещественными коэффициентами и положим $P_{2n}(x) = \omega_n(x)Q_n(x)$. Его коэффициенты вещественны. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} P_{2n}(p^{-a}) dp. \quad (16)$$

Применение к нему ОКФНСТ даёт нулевой результат. С другой стороны, в представлении

$$p^{-s} P_{2n}(p^{-a}) = [p^{-s/2} \omega_n(p^{-a})][p^{-s/2} Q_n(p^{-a})]$$

оба сомножителя суть изображения функций

$$f_1(x) = x^{s/2-1} \Omega_n(x^a), \quad f_2(x) = x^{s/2-1} q_n(x^a),$$

где $\Omega_n(x)$, $q_n(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, так что интеграл (16) равен значению свёртки $(f_1 * f_2)(t)$ в точке $t = 1$, т. е. интегралу

$$\int_0^1 [x(1-x)]^{s/2-1} \Omega_n(x^a) q_n[(1-x)^a] dx.$$

Этот интеграл имеет вид (15), и к тому же многочлен $\Omega_n(x)$ отличен от нуля, так как порождающий его многочлен $\omega_n(x)$ не нулевой. Но тогда, как было показано выше, можно так выбрать $Q_n(x)$, порождающий многочлен $q_n(x)$, что интеграл будет отличен от нуля. Следовательно, ОКФНСТ для интеграла (15) не точна. \square

Перейдём к вопросу о расположении узлов ОКФНСТ.

Теорема 4. *Узлы ОКФНСТ удовлетворяют неравенствам*

$$\operatorname{Re}(p_k^a) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай вещественных корней (такие всегда существуют при нечётном n). Пусть r — вещественный корень уравнения $\omega_n(x) = 0$. Следовательно, $\omega_n(x) = (x-r)Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами. Запишем условие ортогональности (10) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p [p^{-\alpha}(p^{-a}-r)] [p^{-\beta} Q_{n-1}(p^{-a})] [p^{-\gamma} P_{n-1}(p^{-a})] dp = 0, \quad (17)$$

где α, β, γ — любые положительные числа такие, что $\alpha + \beta + \gamma = s$, а $P_{n-1}(x)$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами. Очевидно, каждая квадратная скобка есть изображение, причём первая из них соответствует оригиналу

$$f_1(t) = t^{\alpha-1} \left[\frac{t^a}{\Gamma(\alpha+a)} - \frac{r}{\Gamma(\alpha)} \right],$$

а две другие соответствуют функциям

$$f_2(t) = t^{\beta-1} q_{n-1}(t^a), \quad f_3(t) = t^{\gamma-1} p_{n-1}(t^a),$$

где $q_{n-1}(x), p_{n-1}(x)$ — некоторые многочлены с вещественными коэффициентами. Левая часть (17) есть формула обращения при $t =$

1, т. е. она равна значению оригинала, соответствующего произведению трёх изображений, входящих в (17), и этот оригинал есть свёртка $f_1 * f_2 * f_3$, значение которой в точке $t = 1$ равно интегралу в левой части формулы (17). Функция $f_1(t)$ при $r \leq 0$ знакопостоянна на $(0, 1)$, а функции $f_2(t), f_3(t)$ имеют на $(0, 1)$ не более $n - 1$ корней каждая. Значит, свёртка $f_1 * f_2$ имеет на $(0, 1)$ не более $n - 1$ корней (интегрирование по некоторому отрезку не увеличивает числа корней интегрируемой функции). Далее, как и выше, можно так выбрать многочлен $p_{n-1}(x)$, что в свёртке $(f_1 * f_2) * f_3$ подынтегральная функция будет знакопостоянна, так что свёртка будет отлична от нуля, что противоречит равенству (17). Итак, необходимо $r > 0$.

Перейдём к случаю комплексных корней: пусть $\omega_n(x) = (x^2 + 2bx + c)Q_{n-2}(x)$, причём числа b, c и все коэффициенты многочлена $Q_{n-2}(x)$ вещественны, и выполнено неравенство $b^2 < c$, т. е. корни комплексны и сопряжены. Предположим, что $b \geq 0$. По аналогии с предыдущим случаем запишем условие ортогональности в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p [p^{-\alpha}(p^{-2a} + 2bp^{-a} + c)][p^{-\beta}Q_{n-2}(p^{-a})] \times \\ \times [p^{-\gamma}P_{n-1}(p^{-a})] dp = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = s. \quad (18)$$

Первой квадратной скобке отвечает оригинал

$$t^{\alpha-1} \left[\frac{t^{2a}}{\Gamma(\alpha + 2a)} + 2b \frac{t^a}{\Gamma(\alpha + a)} + c \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right],$$

не меняющий знака на $(0, 1)$. Его свёртка с оригиналом, отвечающим второй скобке, имеет на $(0, 1)$ не более $n - 2$ корней, а за счёт выбора $P_{n-1}(x)$ можно сделать всю свёртку знакопостоянной, а тем самым и интеграл слева в (18) отличным от нуля, что противоречит равенству (18). Значит, $b < 0$, что и доказывает теорему. \square

Следствие. Узлы КФНСТ (см. гл. 2) принадлежат правой полуплоскости.

Это утверждение вытекает из теоремы 4 при $a = 1$.

§ 4. Сходимость обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности

Пусть при некотором $s > 0$ функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Преобразуем формулу обращения Римана-Меллина к виду

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p) dp. \quad (19)$$

Затем представляем $\varphi_s(p)$ в виде суммы интерполяционного многочлена для неё по узлам ОКФНСТ и погрешности интерполяции $r_n(\varphi_s, p)$ (см. гл.2 § 1). Для вычисления первого слагаемого в (19) применим ОКФНСТ:

$$\frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p/t) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_s(p_k/t), \quad (20)$$

а второе слагаемое есть погрешность $R_n(\varphi_s, t)$ ОКФНСТ (20), которая выражается через погрешность интерполяции $r_n(\varphi_s, p)$ функции $\varphi_s(p)$ по её значениям в узлах формулой

$$R_n(\varphi_s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} r_n(\varphi_s, p) dp. \quad (21)$$

Надеяться на сходимость ОКФНСТ можно только при сходимости интерполяционного процесса, поэтому исследование начнем с изучения сходимости интерполирования.

Далее считаем, что функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ зависит лишь от p^a , т.е. $\varphi_s(p) = \Phi(p^a)$. В этом случае как интерполяционный многочлен для $\varphi_s(p) = p^s F(p)$, так и погрешность интерполяции также зависят лишь от p^a , и потому погрешность интерполяции в (21) далее будем обозначать как $r_n(\varphi_s, p^a)$. Положим $w = p^a$ и предположим, что все особые точки функции $\Phi(w)$ расположены в конечной части полуплоскости $\operatorname{Re} w < 0$.

В результате замены переменной

$$z = \frac{a-w}{a+w}, \quad a > 0, \quad (22)$$

полуплоскость $\operatorname{Re} w \geq 0$ конформно отображается на круг $|z| \leq 1$, на котором функция

$$\Phi_1(z) = \Phi(a(1-z)/(1+z)) \quad (23)$$

заведомо регулярна. Если все особые точки $\Phi(w)$ содержатся в круге $|w - w_0| \leq r_0$, $w_0 < 0$, $w_0 + r_0 < 0$, на границе которого лежит хотя бы одна особая точка $\Phi(w)$ и который виден из начала координат под наименьшим углом, а в качестве a взять длину отрезка касательной к этому кругу от точки касания до начала координат, т. е. $a = \sqrt{w_0^2 - r_0^2}$, то функция (23) будет регулярна в круге $|z| < \rho$, $\rho = (a - w_1)/(a + w_1)$, где $w_1 = w_0 + r_0$. При этом в силу выше сказанного на окружности $|z| = \rho$ лежит хотя бы одна особая точка функции (23). Замена (22) отображает прямую $\operatorname{Re} w = 0$ на окружность $|z| = 1$, а линию интегрирования в (21) — на окружность вида $|z + (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, расположенную внутри окружности $|z| = 1$ и касающуюся ее в точке $z = -1$. Точки $w_k = p_k^a$ отображаются внутрь круга $|z| \leq 1$.

Следуя работе [16], дадим

Определение. Пусть F, B, G — не пустые замкнутые ограниченные множества точек комплексной плоскости z , причем $F \subset G$ и $B \subset G$. Будем говорить, что выполнено условие $\{F, B, G\}$, если для всякой функции $f(z)$, регулярной на G , при любом выборе последовательности узлов интерполирования $z_k^{(n)}$ $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, из любого подмножества $F^* \subset F$ последовательность интерполяционных многочленов для функции $f(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $f(z)$ на любом подмножестве $B^* \subset B$.

Справедлива следующая

Теорема 5 ([16]). Пусть F и B — два замкнутых ограниченных множества точек плоскости z . Пусть K_ξ — наименьший замкнутый круг, содержащий множество B и имеющий центр в точке $\xi \in F$. Тогда множество $G = \bigcup_{\xi \in F} K_\xi$ является наименьшим множеством, для которого выполняется условие $\{F, B, G\}$.

Если $F = B = \{z : |z| \leq 1\}$, то наименьшим множеством, удовлетворяющим условию $\{F, B, G\}$, является круг $G = \{z : |z| \leq 3\}$.

Теорема 6. Пусть при некотором $s > 0$ все особые точки функции $\Phi(w)$ заключены в круг $|w - w_0| \leq r_0$, $w_0 < 0$, $w_0 + r_0 < 0$, который виден из начала координат под наименьшим углом. Если $r_0 < -3w_0/5$, то последовательность интерполяционных многочленов для функции $\Phi(w)$ по узлам ОКФНСТ (20) при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $\Phi(w)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$.

Доказательство. Замена (22) при $a = \sqrt{w_0^2 - r_0^2}$ приводит к функции (23), регулярной в круге $|z| < \rho$, $\rho = (\sqrt{w_0^2 - r_0^2} - w_0 -$

$r_0)/(\sqrt{w_0^2 - r_0^2} + w_0 + r_0)$. Нетрудно убедиться, что при условии $r_0 < -3w_0/5$ выполняется неравенство $\rho > 3$, т. е. функция (23) заведомо регулярна на круге $G = \{z : |z| \leq 3\}$. Точки $w_k = p_k^a$ при замене (22) переходят внутрь круга $F = \{z : |z| \leq 1\}$. Потребуем, чтобы интерполяционный процесс для функции (23) по образам точек w_k равномерно сходил к ней на множестве $B = F$ (а тем самым и на образе линии интегрирования в формуле (21)). В силу сказанного выше выполнено условие $\{F, B, G\}$, из чего следует утверждение теоремы. \square

Перейдем к изучению сходимости ОКФНСТ вида (20).

Если искомый оригинал — ограниченная функция, то ее изображение регулярно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, а предельные значения оригинала $f(+0)$, $f(+\infty)$, если они существуют, могут быть вычислены по приведенным выше формулам. В таком случае параметр s следует выбирать из условия $s \geq 1$, что далее и будем предполагать.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для любого $t \in (0, T]$ ($0 < T < \infty$), справедливо утверждение

$$R_n(\varphi_s, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (24)$$

Доказательство. По теореме 6 остаточный член интерполирования $r_n(\varphi_s, w)$ равномерно стремится к нулю в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, в том числе на линии интегрирования в (21) при $n \rightarrow \infty$, и в бесконечно удаленной точке. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящий от w номер N такой, что для $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|r_n(\varphi_s, w)| \leq \varepsilon$. Положим $p = c + i\sigma$, тогда

$$|R_n(\varphi_s)| \leq \varepsilon \frac{e^{cT}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{(c^2 + \sigma^2)^{s/2}},$$

и при $s > 1$ утверждение (24) очевидно.

В случае $s = 1$ запишем представление (21) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [e^{pt} p^{-s} r_n(\varphi_s, \infty) - e^{pt} p^{-s} (r_n(\varphi_s, \infty) - r_n(\varphi_s, p^a))] dp. \quad (25)$$

Первый интеграл в (25) стремится к нулю, а второй перепишем иначе:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s-a} [p^a (r_n(\varphi_s, \infty) - r_n(\varphi_s, p^a))] dp. \quad (26)$$

Вернёмся к переменной $w = p^a$ и рассмотрим стоящую в квадратных скобках в интеграле (26) величину, т.е. функцию $y(w) = w(r_n(\varphi_s, \infty) - r_n(\varphi_s, w))$. По условию $\varphi_s(p) = \Phi(p^a) = \Phi(w)$ регулярна в окрестности бесконечно удалённой точки $|w| \geq R$, следовательно, и погрешность $r_n(\varphi_s, w)$ и функция $r_n(\varphi_s, w) - r_n(\varphi_s, \infty)$ будут регулярны в этой окрестности.

Значение интеграла (26) не зависит от выбора s . С ростом s линия интегрирования в (26) смещается вправо, как и соответствующая ей парабола в плоскости w , и при $s \rightarrow \infty$ обе линии находятся в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки. Следовательно, функция $r_n(\varphi_s, w) - r_n(\varphi_s, \infty)$ в этой окрестности будет стремиться к нулю, как $1/w$, а значит, и $w[r_n(\varphi_s, w) - r_n(\varphi_s, \infty)]$ будет регулярна в области $|w| \geq R$ (и в эту окрестность уже попала парабола в плоскости w). Функция $r_n(\varphi_s, w)$ сходится равномерно к нулю при $n \rightarrow \infty$ в области $|w| \geq R_1$ при некотором $R_1 > R$. Рассмотрим функцию $w[r_n(\varphi_s, w) - r_n(\varphi_s, \infty)]$ на границе этой области при $n \rightarrow \infty$. Погрешность $r_n(\varphi_s, w)$ равномерно относительно p стремится к нулю, как и $r_n(\varphi_s, \infty) \rightarrow 0$, а модуль $|w|$ остаётся равным R_1 . Следовательно, функция $w[r_n(\varphi_s, w) - r_n(\varphi_s, \infty)]$ стремится к нулю на границе области $|w| \geq R_1$, и в силу принципа максимума модуля она и внутри этой области равномерно стремится к нулю. Теперь так же, как и выше, заключаем, что интеграл (26) стремится к нулю, поскольку $s + a > 1$. \square

З а м е ч а н и е. Полученные выше оценки погрешности различных КФ справедливы лишь при ограничении вида $t < \rho \leq r$, в то время как в последней теореме такого условия нет.

Материал настоящего параграфа отражен в работе [27].

ДЕЛЬТА-МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Существуют различные подходы к построению приближенных методов обращения преобразования Лапласа. Как правило, обычно исходят из того, чтобы метод был точен для нескольких первых функции некоторой фиксированной системы. Если искомый оригинал представим в виде ряда по избранной системе функций, то можно надеяться на получение удовлетворительного приближения к нему в результате применения таких методов. Однако для большинства методов обращения отсутствуют какие-либо оценки погрешности, что затрудняет сравнение методов между собой и выбор конкретного метода для практического применения. Цель настоящей главы заключается в рассмотрении различных методов с единой точки зрения, а именно изучения порождаемых ими так называемых дельтообразных ядер, а также вопросам конструирования дельта-методов с заданными свойствами, оценке их погрешности, ускорению сходимости и т.д. Конкретные дельта-методы были построены в работах [50], [60]. Идеология дельта-методов принадлежит, видимо, Виддеру [72], хотя и в неявной форме.

Любой метод обращения использует значения изображения и его производных в определенных точках вещественной оси или комплексной плоскости. Так как исходное уравнение линейно относительно оригинала и изображения, то в общем случае метод обращения имеет вид

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m A_{kj}(t) F^{(k)}(p_{kj}(t)), \quad (1)$$

где $A_{kj}, p_{kj}(t)$ — коэффициенты и узлы, определяющие конкретный метод обращения. Верхние пределы суммирования могут быть бесконечными. С учётом определения преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt$$

перепишем формулу (1) иначе:

$$f(t) \approx \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m (-1)^k A_{kj}(t) x^k \exp(-xp_{kj}(t)) \right] f(x) dx. \quad (2)$$

Положим

$$\delta_{nm}(x, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m (-1)^m A_{kj}(t) x^k \exp(-x p_{kj}(t)). \quad (3)$$

Приближённое равенство (2) означает, что параметры метода обращения $m, n, A_{kj}, p_{kj}(t)$ желательно подобрать так, чтобы функция (3) была “близка” к дельта-функции в точке $x = t$, или, другими словами, чтобы правая часть (2) представляла собой сингулярный интеграл [34]. Такие ядра назовём дельтообразными.

Для любого конкретного метода обращения написать соответствующее ядро (3) не представляет затруднений, после чего можно изучать его свойства. Безусловный интерес представляет обратная задача — построение наилучшего в некотором смысле ядра.

§ 1. Методы Виддера

1.1. Рассмотрим выражение

$$(-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) = \int_0^\infty \left(x^n e^{-p x} \frac{p^{n+1}}{n!} \right) f(x) dx.$$

При фиксированных n, p функция $x^n e^{-p x}$ неотрицательна на полуоси $x \geq 0$ и принимает наибольшее значение в точке $x_0 = n/p$. Легко проверить, что при любых n, p справедливо равенство

$$\int_0^\infty x^n e^{-p x} \frac{p^{n+1}}{n!} dx = 1.$$

Следовательно, подынтегральная функция может рассматриваться как плотность распределения непрерывной случайной величины x на полуоси $x \geq 0$. Её математическое ожидание равно

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-p x} \frac{p^{n+1}}{n!} dx = \frac{n+1}{p},$$

а дисперсия равна

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{n+1}{p} \right)^2 x^n e^{-p x} \frac{p^{n+1}}{n!} dx = \frac{x_0}{n+1}.$$

Учитывая эти свойства, введём два оператора

$$W_n(f, t) = (-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) \big|_{p=n/t}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$S_n(f, t) = (-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) \big|_{p=(n+1)/t}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Запишем их в виде сингулярных интегралов

$$W_n(f, t) = \int_0^\infty w_n(x) f(tx) dx, \quad w_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-nx} x^n,$$

$$S_n(f, t) = \int_0^\infty s_n(x) f(tx) dx, \quad s_n(x) = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} e^{-(n+1)x} x^n. \quad (4)$$

Ядра $w_n(x), s_n(x)$ удовлетворяют условиям теорем И. П. Романовского и Д. К. Фаддеева [34], откуда сразу следует сходимость, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(f, t) = f(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, t) = f(t),$$

если $f(x)$ интегрируема и непрерывна в точке $x = t$.

Однако нас интересует не только факт сходимости, но и скорость сходимости, т. е. поведение величин

$$\varepsilon_n^W(f, t) = W_n(f, t) - f(t), \quad \varepsilon_n^S(f, t) = S_n(f, t) - f(t)$$

при $n \rightarrow \infty$. Ядро $w_n(x)$ неотрицательно, наибольшего значения достигает в точке $x = 1$, $w_n(1) \approx \sqrt{n/2\pi}$ и при любом n площадь под его графиком равна единице, т. е. $\int_0^\infty w_n(x) dx = 1$.

Графики ядер $w_n(x)$ для $n = 1, 3, 7, 10$ приведены на рис. 2.

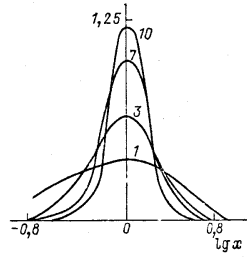


Рис. 2: Ядра Виддера

Приближённые значения оригинала, получаемые по формулам

$$f(t) \approx W_n(f, t), \quad f(t) \approx S_n(f, t), \quad (5)$$

представляют собой усреднение искомого оригинала $f(tx)$ с ядрами $w_n(x), s_n(x)$ по таким окрестностям точки $x = 1$, где ядра существенно отличны от нуля. Значит, если искомый оригинал слабо меняется на отрезках, длины которых сравнимы с “шириной” ядра, то методы будут доставлять неплохие приближения к оригиналу. Для КФНСТ обращения преобразования Лапласа в случае $s = 1$ ядро (3) имеет вид

$$\delta_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k p_k \exp(-p_k x).$$

Напомним, что узлы и коэффициенты КФНСТ комплексно попарно сопряжены, и потому ядро $\delta_n(x)$ вещественно. Его график для $n = 15$ представлен на рис. 3.

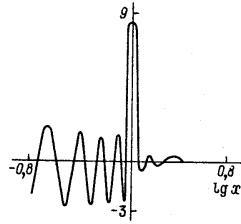


Рис. 3: Ядро КФНСТ

Оно обладает ярко выраженными дельтообразными свойствами (что было ожидаемо в силу высокой точности метода). Однако напомним, что устойчивость КФНСТ характеризуется числами $M_n = \sum_{k=1}^n |A_k|$, быстро растущими при увеличении числа узлов (например, $M_{10} \approx 10^8$), так что при выборе числа узлов n следует проявлять большую осторожность во избежание потери точности.

Не надо думать, что отмеченная особенность присуща лишь КФНСТ. Причина лежит в существовании задачи обращения — восстановлении всех особенностей поведения оригинала по его изображению $F(p)$ — гладкой, любое число раз непрерывно дифференцируемой функцией, к тому же стремящейся к нулю при $p \rightarrow \infty$. Поэтому в любом методе обращения приходится устраивать комбинации значений изображения и его производных с сильно отличающимися по модулю коэффициентами (что увеличивает неустойчивость метода). И чем точнее метод, тем сильнее будет проявляться эта особенность.

1.2. Перейдём к изучению свойств операторов W_n, S_n .

1) Операторы W_n, S_n положительны, т. е. неотрицательные функции переводят в неотрицательные;

2) если функция-оригинал монотонна, то и $W_n(f, t), S_n(f, t)$ также монотонные функции;

3) если функция-оригинал выпукла (вогнута), то и $W_n(f, t), S_n(f, t)$ также выпуклы (вогнуты).

Доказательства этих свойств очевидны.

4) Пусть $a \leq f(x) \leq b$, тогда справедливы неравенства

$$a \leq W_n(f, t) \leq b, \quad a \leq S_n(f, t) \leq b,$$

что следует из неотрицательности функций $f(x) - a, b - f(x)$ и равенств $W_n(1, t) = S_n(1, t) = 1$.

Лемма 1. Пусть $f_j(x) = x^j, j = 0, 1, \dots$ Тогда

$$W_n(f_j, t) = \lambda_{nj} f_j(t), \quad S_n(f_j, t) = \mu_{nj} f_j(t),$$

где

$$\lambda_{nj} = \frac{(n+j)!}{n! n^j}, \quad \mu_{nj} = \frac{(n+j)!}{n! (n+1)^j}.$$

Доказательство вытекает из определения ядер $w_n(x), s_n(x)$ и тождества

$$\int_0^\infty e^{-mx} x^k dx = \frac{k!}{m^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots \square$$

Итак, $f_j(x)$ — собственные функции операторов W_n, S_n , а соответствующие собственные значения равны λ_{nj}, μ_{nj} .

Лемма 2. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема на полуоси $x \geq 0$ и $|f'(x)| \leq M_1$. Тогда

$$|W_n(f, t) - f(t)| \leq M_1 t \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Разность $\varepsilon_n^W(f, t) = W_n(f, t) - f(t)$ запишем в виде

$$\varepsilon_n^W(f, t) = \int_0^\infty w_n(x) [f(tx) - f(t)] dx = \int_0^\infty w_n(x) f'(\xi_t(x)) t(x-1) dx,$$

откуда

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_n^W(f, t)|^2 &\leq M_1^2 t^2 \left(\int_0^\infty w_n(x)(x-1) dx \right)^2 \leq \\
&\leq M_1^2 t^2 \int_0^\infty w_n(x) dx \int_0^\infty w_n(x)(x-1)^2 dx = \\
&= M_1^2 t^2 (\lambda_{n2} - 2\lambda_{n1} + \lambda_{n0}) = M_1^2 t^2 (1/n + 2/n^2),
\end{aligned}$$

что равносильно неравенству (6). \square

Лемма 3. Пусть $f \in C^2(0, \infty)$ и $|f''(x)| \leq M_2$. Тогда

$$|S_n(f, t) - f(t)| \leq M_2 \frac{t^2}{2n+2}, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^S(f, t) &= \int_0^\infty s_n(x) [f(tx) - f(t)] dx = \\
&= \int_0^\infty s_n(x) \left[f'(t)t(x-1) + \frac{f''(\xi_t(x))}{2!} t^2 (x-1)^2 \right] dx.
\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\int_0^\infty s_n(x)(x-1) dx = \mu_{n1} - \mu_{n0} = 0,$$

и поэтому

$$|\varepsilon_n^S(f, t)| \leq \frac{M_2 t^2}{2} (\mu_{n2} - 2\mu_{n1} + \mu_{n0}) = \frac{M_2 t^2}{2} \frac{1}{n+1},$$

что равносильно неравенству (7). \square

1.3. Перейдём к более детальному изучению погрешностей формул (5). Как правило, выводы будем делать лишь для одной из них, ибо для второй всё делается аналогично, и к тому же получающиеся результаты качественно одинаковы.

Пусть $f \in C^\infty(0, \infty)$, тогда

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^W(f, t) &= \int_0^\infty w_n(x) [f(tx) - f(t)] dx = \\
&= \sum_{k=1}^\infty t^k \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \int_0^\infty w_n(x)(x-1)^k dx = \sum_{k=1}^\infty t^k \frac{f^{(k)}(t)}{k!} B_k^{(n)},
\end{aligned}$$

где

$$B_k^{(n)} = \int_0^\infty w_n(x)(x-1)^k dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Эти числа нетрудно выразить через λ_{nj} :

$$B_k^{(n)} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \lambda_{nj},$$

однако эта форма записи не даёт представления о характере зависимости $B_k^{(n)}$ от n . Поступим иначе, исходя из представления

$$B_k^{(n)} = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-nx} x^n (x-1)^k dx.$$

Положим

$$D_k^{(n)} = \int_0^\infty e^{-nx} x^n (x-1)^k dx$$

и рассмотрим величину

$$\begin{aligned} (k+1)D_k^{(n)} + kD_{k-1}^{(n)} &= \\ &= \int_0^\infty x^n e^{-nx} d(x-1)^{k+1} + \int_0^\infty x^n e^{-nx} d(x-1)^k = \\ &= - \int_0^\infty [(x-1)^{k+1} + (x-1)^k] d(x^n e^{-nx}) = \\ &= \int_0^\infty [(x-1)^{k+1} + (x-1)^k] (nx^n e^{-nx} - nx^{n-1} e^{-nx}) dx = nD_{k+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо рекуррентное соотношение

$$B_{k+1}^{(n)} = \frac{1}{n} [(k+1)B_k^{(n)} + kB_{k-1}^{(n)}], \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Из определения чисел $B_k^{(n)}$ находим $B_0^{(n)} = 1$, $B_1^{(n)} = 1/n$. Как видно из (8), $B_k^{(n)}$ есть многочлен от $1/n$ с положительными коэффициентами, и наименьшая степень $1/n$ равна $[(k+1)/2]$ (целая часть числа $(k+1)/2$), т. е.

$$B_k^{(n)} = b_{[\frac{k+1}{2}]}^{(k)} / n^{[\frac{k+1}{2}]} + \dots + b_k^{(k)} / n^k. \quad (9)$$

Аналогично получаем представление

$$S_n(f, t) - f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \frac{f^{(k)}(t)}{k!} E_k^{(n)},$$

где

$$E_k^{(n)} = \int_0^{\infty} s_n(x)(x-1)^k dx, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и рекуррентное соотношение

$$E_{k+1}^{(n)} = \frac{k}{n+1} (E_k^{(n)} + E_{k-1}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Начальные значения равны $E_0^{(n)} = 1$, $E_1^{(n)} = 0$. Следовательно, $E_k^{(n)}$ — многочлен вида (9) по степеням $1/(n+1)$ также с положительными коэффициентами.

Итак, погрешность $\varepsilon_n^W(f, t)$ представима в виде

$$\varepsilon_n^W(f, t) = \frac{1}{n} t f'(t) + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \frac{t^2 f''(t)}{2!} + \left(\frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \frac{t^4 f'''(t)}{3!} + \dots \quad (10)$$

В частности, отсюда при больших n получаем главный член погрешности

$$\varepsilon_n^W(f, t) \approx \frac{1}{n} \frac{(t^2 f'(t))'}{2}.$$

Как видим, метод Виддера быстро насыщаем, а именно: наличие производных оригинала выше второго порядка не улучшает сходимости.

Однако знание характера зависимости ошибки от n позволяет на основе полученных приближений строить методы, быстрее сходящиеся к искомому оригиналу.

§ 2. Ускорение сходимости методов Виддера

Возьмём произвольные рациональные числа d_1, \dots, d_k , $k \geq 1$, такие, что все числа nd_j , $j = 1, 2, \dots, k$, целые, после чего запишем разложения (10), заменив в них n на nd_j . Составим линейную комбинацию

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} \varepsilon_{nd_j}^W(f, t)$$

и потребуем, чтобы её представление по степеням $1/n$ не содержало младших степеней n^{-j} , $j = 1, 2, \dots, k-1$, что равносильно выполнению условий

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k c_{kj} &= 1, \\ \sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-m} &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система однозначно разрешима, так как её определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1/d_1 & \dots & 1/d_k \\ \dots & \dots & \dots \\ 1/d_1^{k-1} & \dots & 1/d_k^{k-1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

отличен от нуля из-за попарной различности чисел d_j .

Лемма 4. *Решение системы (11) имеет вид*

$$c_{kj} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_j}{d_j - d_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Как известно, определитель (12) равен значению

$$\prod_{k \geq l \geq m \geq 1} (1/d_l - 1/d_m).$$

В формуле Крамера для коэффициента c_{kj} в числителе получаем домноженный на $(-1)^{j+1}$ определитель (12) с вычеркнутыми первой строкой и j -м столбцом, т. е. величину

$$(-1)^{j+1} \frac{1}{d_1} \dots \frac{1}{d_{j-1}} \frac{1}{d_{j+1}} \dots \frac{1}{d_k} \prod_{\substack{k \geq l \geq m \geq 1 \\ l, m \neq j}}^n (1/d_l - 1/d_m). \tag{13}$$

Отношение величин (13) и (12) равно

$$c_{kj} = \frac{(-1)^{j+1}}{d_1 \cdots d_{j-1} d_{j+1} \cdots d_k} \left/ \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_j} \right) \cdots \left(\frac{1}{d_{j+1}} - \frac{1}{d_j} \right) \right. \times \\ \times \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j-1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_1} \right) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_j}{d_j - d_i}. \square$$

Итак, разложение величины

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} \varepsilon_{nd_j}^W(f, t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} W_{nd_j}(f, t) - f(t)$$

в ряд по степеням $1/n$ начинается со степени n^{-k} , следовательно, линейная комбинация

$$W_n(k, f, t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} W_{nd_j}(f, t) \quad (14)$$

значительно лучше приближает искомый оригинал, чем все входящие в неё приближения по Виддеру $W_{nd_j}(f, t)$. Оператор (14) допускает интегральное представление

$$W_n(k, f, t) = \int_0^\infty w_n(k, x) f(tx) dx$$

с ядром

$$w_n(k, x) = \sum_{j=1}^k c_{kj} w_{nd_j}(x), \quad (15)$$

которое при любых значениях n, k удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty w_n(k, x) dx = 1.$$

Это ядро не знакопостоянно, в отличие от ядер $w_{nd_j}(x)$. Знаки чисел c_{kj} чередуются, а значение c_{kk} положительно и больше единицы. В точке $x = 1$ имеем

$$w_n(k, 1) \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{j=1}^k c_{kj} \sqrt{d_j}. \quad (16)$$

Положим

$$D_k = \left(\sum_{j=1}^k c_{kj} \sqrt{d_j} \right) / \sqrt{d_k}.$$

Если окажется, что $D_k > 1$, то значение (16) будет больше всех $w_{nd_j}(1)$ (т.е. ядро (16) выше всех остальных), и оно будет уже по сравнению с ними (см. рис. 2).

Лемма 5. Для произвольных чисел d_1, \dots, d_k таких, что $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k$, справедливо неравенство

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} \frac{1}{\sqrt{d_k}} \leq D_k \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}. \quad (17)$$

Доказательство. Положим $\omega(x) = (x - d_1) \cdots (x - d_k)$ и рассмотрим функцию $f(x) = x^{k-0.5}(\bar{x} - x)/\omega(x)$, где \bar{x} — любое фиксированное число такое, что $d_1 < \bar{x} < d_k$ и $\bar{x} \neq d_j$ $j = 1, 2, \dots, k$. Построим интерполяционный многочлен $P_{k-1}(x)$ для $f(x)$, удовлетворяющий условиям

$$P_{k-1}(d_j) = f(d_j), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Погрешность интерполяции в точке \bar{x} равна

$$f(\bar{x}) - P_{k-1}(\bar{x}) = \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!} \omega(\bar{x}), \quad d_1 < \eta < d_k.$$

Но $f(\bar{x}) = 0$,

$$\begin{aligned} P_{k-1}(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^k \frac{\omega(\bar{x})}{(\bar{x} - d_i) \omega'(d_i)} f(d_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{d_i^{k-1} d_i^{0.5} (\bar{x} - d_i)}{(\bar{x} - d_i) \prod_{j \neq i} (d_i - d_j)} = \\ &= \sum_{i=1}^k c_{ki} \sqrt{d_i} = D_k \sqrt{d_k}, \end{aligned}$$

так что

$$D_k \sqrt{d_k} = - \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!} \omega(\bar{x}).$$

Далее,

$$\omega(\bar{x})f^{(k)}(\eta) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\eta}} - (2k+1)\sqrt{\eta} \right),$$

или

$$D_k \sqrt{d_k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left((2k+1)\sqrt{\eta} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{\eta}} \right).$$

Последняя скобка как функция η возрастает на $[1, d_k]$, поэтому

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (2k+1-\bar{x}) \leq D_k \sqrt{d_k} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left[(2k+1)\sqrt{d_k} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{d_k}} \right].$$

Это неравенство справедливо при любом $\bar{x} \in [1, d_k]$. Для получения нижней оценки в (17) положим $\bar{x} = 1$, а для верхней — $\bar{x} = d_k$. \square

Применяя формулу Стирлинга для вычисления факториалов, вместо (17) получим приближённое неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{d_k}} \lesssim D_k \lesssim 2\sqrt{\frac{k}{\pi}}.$$

Следовательно, при $d_k \leq k$ неравенство $D_k > 1$ справедливо (в частности, при $d_j = j$).

З а м е ч а н и е 1. В линейной комбинации (14) используются приближения по Виддеру с номерами nd_1, \dots, nd_k . Указанный смысл величины D_k и сопоставление свойств исходных ядер со свойствами ядра (14) приводят к выводу, что применение формулы (15) даёт результат не хуже, чем обычное приближение по Виддеру с номером, приближённо равным $nd_k D_k^2$ (это число не обязательно целое). Этот вывод подтверждается при проведении вычислений, а также служит оправданием ускорения сходимости в случае $n = 1$, когда приводимая далее теорема 1 формально неприменима.

Перейдём к детальному изучению свойств ядер.

Лемма 6. Пусть m — натуральное число и δ — положительное число. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для любого целого $k \geq 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_{|x-1| \geq \delta} w_n(x) |x-1|^k dx = O(n^{-m}).$$

Доказательство. Очевидна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x) dx &\leq \int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x)(x-1)^{2m} \delta^{-2m} dx \leq \\ &\leq \delta^{-2m} \int_0^\infty w_n(x)(x-1)^{2m} dx = \delta^{-2m} B_{2m}^{(n)}, \end{aligned}$$

где числа $B_{2m}^{(n)}$ определяются формулой (8). Из представления (9) следует

$$B_{2m}^{(n)} = O(n^{-m}), \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда следует утверждение леммы при $k = 0$. При $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x) |x-1|^k dx \right)^2 &\leq \int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x) dx \int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x) (x-1)^{2k} dx \leq \\ &\leq \int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x) dx \int_0^\infty w_n(x) (x-1)^{2k} dx = B_{2k}^{(n)} \int_{|x-1|\geq\delta} w_n(x) dx, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. \square

Аналогичные утверждения справедливы и для ядер $s_n(x)$ (см. (4)).

Пусть a, b, a_1, b_1 — произвольные фиксированные числа такие, что $0 < a < a_1 < b_1 < b < \infty$.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — непрерывный ограниченный на полуоси $x \geq 0$ оригинал, имеющий на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка $2k$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in [a_1, b_1]$ справедливо равенство

$$n^k [W_n(k, f, t) - f(t)] = \sum_{m=k}^{2k} M_m t^m f^{(m)}(t) + o(1),$$

где M_m — не зависящие от t и $f(t)$ постоянные.

Доказательство. Исходя из определения (14), имеем

$$n^k [W_n(k, f, t) - f(t)] = n^k \sum_{j=1}^k c_{kj} \int_0^\infty w_{nd_j}(x) [f(tx) - f(t)] dx.$$

Запишем формулу Тейлора для $f(tx)$ в точке $x = 1$:

$$f(tx) - f(t) = \sum_{m=1}^{2k} \frac{f^{(m)}(t)}{m!} t^m (x-1)^m + \varepsilon(x, t)(x-1)^{2k}. \quad (18)$$

Пусть δ — некоторое положительное число и $t \in [a_1, b_1]$. Очевидно, что при достаточно малом δ из неравенства $|x-1| < \delta$ следует, что $|\varepsilon(x, t)| < \varepsilon_0$, где ε_0 — малое положительное число. В случае $|x-1| \geq \delta$ из (18) получаем оценку

$$|\varepsilon(x, t)(x-1)^{2k}| \leq |f(tx)| + |f(t)| + \sum_{m=1}^{2k} t^m \frac{|f^{(m)}(t)|}{m!} |x-1|^m. \quad (19)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty w_n(x) \varepsilon(x, t)(x-1)^{2k} dx = \int_{|x-1| \leq \delta} \dots + \int_{|x-1| \geq \delta} \dots \quad (20)$$

Первый интеграл справа по модулю не превосходит значения

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \int_{|x-1| \leq \delta} w_n(x)(x-1)^{2k} dx &< \varepsilon_0 \int_0^\infty w_n(x)(x-1)^{2k} dx = \\ &= \varepsilon_0 B_{2k}^{(n)} = O(n^{-k}). \end{aligned}$$

Во втором интеграле справа присутствуют интегралы трёх видов, соответствующие трём слагаемым в оценке (19). Первые два из них не превосходят величины

$$\max_{x \geq 0} |f(x)| \int_{|x-1| \geq \delta} w_n(x) dx,$$

сколь угодно быстро стремящейся к нулю по лемме 6. В третьем слагаемом присутствуют интегралы вида

$$\int_{|x-1| \geq \delta} w_n(x) |x-1|^m dx, \quad m = 1, 2, \dots, 2k,$$

но они по той же лемме также сколь угодно быстро стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, весь интеграл (20) стремится к

нулю как $\varepsilon_0 O(n^{-k})$. Далее, с учётом представления (18) и полученных оценок получаем

$$\begin{aligned}
n^k [W_n(k, f, t) - f(t)] &= \\
&= n^k \sum_{j=1}^k c_{kj} \sum_{m=1}^{2k} t^m \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \int_0^\infty w_{nd_j}(x) (x-1)^m dx + o(1) = \\
&= n^k \sum_{j=1}^k c_{kj} \sum_{m=1}^{2k} t^m \frac{f^{(m)}(t)}{m!} B_m^{(nd_j)} + o(1) = \\
&= n^k \sum_{m=1}^{2k} t^m \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \sum_{j=1}^k c_{kj} \left(b_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^{(m)} (nd_j)^{-\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} + \dots + b_m^{(m)} (nd_j)^{-m} \right) + \\
&\quad + o(1).
\end{aligned}$$

Во внутренней сумме все слагаемые, соответствующие значениям $m = 1, 2, \dots, k-1$, равны нулю в силу свойств (11), так что окончательно получим

$$n^k [W_n(k, f, t) - f(t)] = \sum_{m=k}^{2k} M_m t^m f^{(m)}(t) + o(1), \quad (21)$$

где M_m — некоторые постоянные, что и требовалось доказать. \square

В частном случае $k = 1$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k [W_n(f, t) - f(t)] = \frac{1}{2} (t^2 f'(t))',$$

а при $k = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k [W_n(2, f, t) - f(t)] = \frac{1}{3} (t^3 f''(t))' + \frac{1}{8} (t^4 f'''(t))' \sum_{j=1}^2 c_{kj} d_j^{-2}.$$

Итак, формула (21) позволяет оценить главный член погрешности приближения искомого оригинала с помощью линейной комбинации (14) для фиксированного k при возрастании n . Допустим, что нам известны значения $W_n(f, t)$ для нескольких значений n , начиная с $n = 1$. В этом случае мы вынуждены положить $n = 1$, $d_j = j$, $j = 1, 2, \dots, k$. При этом теорема формально неприменима, тем

не менее фактическая погрешность будет уменьшаться в силу ранее отмеченных свойств ядер (15) и чисел D_k и будет давать приближения не хуже, чем обычный метод Виддера с номером $n \approx kD_k^2$.

Пример. Дано изображение $F(p) = 1/(p+1)$ функции $f(t) = \exp(-t)$. Во втором столбце нижеследующей табл. 3 приведены значения $W_1(f, t_0), \dots, W_6(f, t_0)$ в точке $t_0 = 0.5$ (очевидно, они могут быть вычислены точно, исходя из их определения), а в третьем столбце — результаты ускорения сходимости, полученные по формуле (14). Точное значение оригинала равно $\exp(-t_0) = 0.606530\dots$. Как видим, в исходных приближениях по Виддеру даже первая значащая цифра не установилась, а в последнем результате ускорения практически все выписанные знаки верны.

Таблица 3

| n | $W_n(f, 0.5)$ | $W_1(n, f, 0.5)$ |
|-----|---------------|------------------|
| 1 | 0.444444 | 0.444444 |
| 2 | 0.512000 | 0.579556 |
| 3 | 0.539775 | 0.603210 |
| 4 | 0.554929 | 0.606204 |
| 5 | 0.564474 | 0.606503 |
| 6 | 0.571038 | 0.606532 |

Замечание 2. Значения величин $W_n(f, t)$ следует вычислять с возможно большей точностью, ибо в них содержится информация о характере зависимости ошибки $\varepsilon_n^W(f, t)$ от $1/n$, которая используется существенным образом на шаге ускорения сходимости. Отметим, что $W_n(f, t)$ заведомо существуют при достаточно больших n (как только точка n/t попадает в область регулярности изображения).

Замечание 3. Выше поведение операторов Виддера исследовалось в предположении достаточной гладкости оригинала. В следующей главе будет изучено их поведение для разрывных оригиналов. Отметим следующий известный результат: если функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$ при любом $T > 0$ и интеграл Лапласа (1) (гл.1) сходится абсолютно при некотором p , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} x_n^{n+1} F^{(n)}(x_n) = \frac{1}{2} (f(t+0) + f(t-0)),$$

где $x_n = (n + \theta_n)/t$, $0 \leq \theta_n \leq 1$. (см. [72], с. 289). Очевидно, в левой части под знаком предела стоят операторы Виддера W_n, S_n при $\theta_n = 0, 1$, соответственно.

§ 3. Численная реализация методов Виддера

Реализация методов Виддера требует вычисления производных изображения. Но даже в случае аналитического задания $F(p)$ не всегда удаётся точно вычислить производную нужного порядка, тем более это невозможно в случае численного задания изображения. Поэтому на практике приходится применять формулы численного дифференцирования [33]. Для ряда прикладных задач механики, где процессы изменения во времени протекают медленно, даже сами методы Виддера дают приемлемую точность, а возможность уточнения по описанной методике вполне удовлетворяет пользователя. Отметим, что при этом необходимы значения изображения лишь в точках вещественной оси. В общем случае приходится использовать приближения по Виддеру с большими номерами, и известная техника численного дифференцирования становится непригодной.

3.1. Численная реализация методов Виддера при больших n . Введём в рассмотрение функцию

$$G(z, t) = \frac{1}{t} F\left(\frac{1-z}{t}\right), \quad t > 0,$$

считая $F(p)$ регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. При фиксированном $t > 0$ функция $G(z, t)$ регулярная внутри круга $|z| < 1$ и разлагается в ряд

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) z^n. \quad (22)$$

Дифференцируя его n раз и полагая $z = 0$, получим

$$\frac{1}{t} F^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t}\right)^n = n! a_n(t),$$

или

$$a_n(t) = (-1)^n \frac{1}{n! t^{n+1}} F^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Заменим в этом равенстве t на t/n , что даёт

$$a_n \left(\frac{t}{n} \right) = (-1)^n \frac{n^{n+1}}{n! t^{n+1}} F^{(n)} \left(\frac{n}{t} \right).$$

Но правая часть в этой формуле совпадает с $W_n(f, t)$ (см. § 1).

Итак, получили формулу

$$W_n(f, t) = a_n \left(\frac{t}{n} \right). \quad (23)$$

Пусть r — некоторое число, $0 < r < 1$, и m натуральное число, $m > n$. Введём функции

$$e_m(x) = \exp \left(i \frac{2\pi}{m} x \right)$$

и рассмотрим величину

$$W_{nm}(f, t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (re_m(j))^{-n} G \left(re_m(j), \frac{t}{n} \right). \quad (24)$$

Теорема 2. Если исходный оригинал ограничен на полуоси $x \geq 0$ и его изображение регулярно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, то справедливо неравенство

$$|W_{nm}(f, t) - W_n(f, t)| \leq M \frac{r^m}{1 - r^m}$$

при всех $t \geq 0$, где $M = \max_{t \geq 0} |f(t)|$.

Доказательство. Подставим в правую часть (24) разложение (22) :

$$\begin{aligned} W_{nm}(f, t) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (re_m(j))^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{t}{n} \right) (re_m(j))^l = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{tl/n}{l} \right) r^{l-n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \exp \left(\frac{2\pi i j(l-n)}{m} \right). \end{aligned}$$

Перестановка порядков суммирования оправдана равномерной и абсолютной сходимостью ряда (22). Далее, легко проверить справедливость тождества

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \exp \left(\frac{2\pi i j(l-n)}{m} \right) = \begin{cases} 1, & l-n = qm, \\ 0, & l-n \neq qm, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Следовательно, учитывая равенство (23), имеем

$$\begin{aligned} W_{nm}(f, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} a_{n+qm} \left(\frac{t(n+qm)/n}{n+qm} \right) r^{qm} = \\ &= W_n(f, t) + \sum_{q=1}^{\infty} W_{n+qm} \left(f, \frac{t(n+qm)}{n} \right) r^{qm}. \end{aligned}$$

Ранее было показано, что все приближения по Виддеру по модулю не превосходят M , и потому

$$|W_{nm}(f, t) - W_n(f, t)| \leq \sum_{q=1}^{\infty} M r^{qm} = M \frac{r^m}{1 - r^m}. \square$$

Итак, значение $W_n(f, t)$ можно с любой точностью заменить величиной $W_{nm}(f, t)$, если взять достаточно большое значение m , либо достаточно малое r . Расчётную формулу (24) можно записать иначе:

$$W_{nm}(f, t) = \frac{n}{mtr^n} \sum_{j=1}^m e_m(-nj) F \left(\frac{n}{r} (1 - re_m(j)) \right). \quad (25)$$

Для операторов $S_n(f, t)$ (см. (4)) по аналогии вводим величину

$$S_{nm}(f, t) = \frac{n+1}{mtr^n} \sum_{j=1}^m e_m(-nj) F \left(\frac{n+1}{r} (1 - re_m(j)) \right). \quad (26)$$

Она удовлетворяет неравенству

$$|S_{nm}(f, t) - S_n(f, t)| \leq M \frac{r^m}{1 - r^m}.$$

С вычислительной точки зрения правые части формул (25), (26) удобнее выразить через значения функции $\varphi(p) = pF(p)$ (как правило, именно она находится из уравнения в изображениях, и к тому же она, в отличие от $F(p)$, не стремится к нулю с ростом $|p|$):

$$\begin{aligned} W_{nm} &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [re_m(j)]^{-n} \frac{1}{1 - re_m(j)} \varphi \left[\frac{n}{t} (1 - re_m(j)) \right], \\ S_{nm} &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [re_m(j)]^{-n} \frac{1}{1 - re_m(j)} \varphi \left[\frac{n+1}{t} (1 - re_m(j)) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Теорема 3. Если значения функции $\varphi(p) = pF(p)$ вычисляются с погрешностью, по модулю не превосходящей числа ε , и оригинал ограничен, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |W_{nm}(f, t) - W_n(f, t)| &\leq \Delta, \\ |S_{nm}(f, t) - S_n(f, t)| &\leq \Delta, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{Mr^m}{1-r^m} + \frac{\varepsilon}{(1-r)r^n}. \quad (28)$$

Доказательство очевидным образом вытекает из утверждения теоремы 2 и представлений (27). \square

Например, пусть $\varepsilon = 10^{-16}$, $M = 1$, $n = 200$, $r = 0.95$. Тогда при $m = 500$ имеем $\Delta \approx 6 \cdot 10^{-11}$. Дальнейшее увеличение m не уменьшает значения Δ , но значительно увеличивает объём вычислений.

В общем случае, когда некоторые из входящих в формулу (28) величин M, r, m, n, ε известны, остальные следует выбирать из условия минимума величины Δ . Практически алгоритм выбора параметров таков: по известным характеристикам: n — номеру искомого $W_n(f, t)$ и ε — точности задания (вычисления) изображения выбираем параметр r так, чтобы второе слагаемое в сумме (28) имело желаемый порядок малости, после чего находим наименьшее значение параметра m , при котором первое слагаемое в (28) примерно такое же, как и второе. Дальнейшее увеличение m ведет к росту объёма вычислений для нахождения $W_n(f, t)$, не увеличивая его точности.

Итак, формулы (27) позволяют находить приближения по Виддери с гарантированной оценкой погрешности сверху, равной Δ . Заметим, что при этом требуются значения изображения в точках некоторой окружности на комплексной плоскости.

3.2. Численная реализация методов Виддера для многомерного преобразования Лапласа. Описанная техника реализации методов Виддера переносится и на случай многомерного преобразования Лапласа. Для простоты будем говорить о двумерном преобразовании.

Пусть функции-оригиналу $f(x, t)$ соответствует изображение

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qt} f(x, t) dx dt,$$

регулярное при $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$. Введём оператор

$$W_{ij}(f, x, t) = (-1)^{i+j} \frac{(i/x)^{i+1}}{i!} \frac{(j/t)^{j+1}}{j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial p^i \partial q^j} F\left(\frac{i}{x}, \frac{j}{t}\right), i, j = 1, 2, \dots \quad (29)$$

и функцию

$$G(z_1, z_2, x, t) = \frac{1}{xt} F\left(\frac{1-z_1}{x}, \frac{1-z_2}{t}\right).$$

При $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, как и в одномерном случае, имеем разложение

$$G(z_1, z_2, x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(x, t) z_1^i z_2^j,$$

коэффициенты которого и оператор (29) связаны тождеством

$$a_{ij}(x/i, t/j) = W_{ij}(f, x, t).$$

Для приближённого вычисления W_{ij} выбираем натуральные числа m, n такие, что $m > i$, $n > j$, и малые положительные числа r_1, r_2 , $0 < r_1 < 1$, $0 < r_2 < 1$, а затем вводим величины

$$W_{ijmn}(f, x, t) = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (r_1 e_m(k))^{-i} (r_2 e_n(l))^{-j} \times \\ \times G(r_1 e_m(k), r_2 e_n(l), x/i, t/j). \quad (30)$$

Как и ранее, получаем оценку

$$|W_{ijmn}(f, x, t) - W_{ij}(f, x, t)| \leq M \frac{r_1^m + r_2^n - r_1^m r_2^n}{(1 - r_1^m)(1 - r_2^n)},$$

если $|f(x, t)| \leq M$, $x, t \geq 0$.

Аналогичным образом можно учесть и влияние ошибок задания изображения, а также ввести оператор S_{ijmn} .

$$\varepsilon_{ij}^W(f, x, t) = W_{ij}(f, x, t) - f(x, t).$$

В предположении бесконечной гладкости оригинала она представляема в виде ряда по степеням $1/i$, $1/j$:

$$\varepsilon_{ij}^W(f, x, t) = \frac{A_1}{i} + \frac{B_1}{j} + \frac{A_2}{i^2} + \frac{B_2}{j^2} + \frac{C_2}{ij} + \frac{A_3}{i^3} + \frac{B_3}{j^3} + \frac{C_3}{i^2 j} + \frac{D_3}{ij^2} + \dots$$

Отсюда вытекает и алгоритм ускорения сходимости — построение таких линейных комбинаций приближений (30), в которых исчезают младшие степени $1/i$, $1/j$. Следовательно, наиболее эффективное ускорение сходимости достигается на "диагональных" приближениях, т.е. при $i = j$, что к тому же упрощает и расчётные формулы (30). Заметим, что время проведения необходимых вычислений резко возрастает по сравнению с одномерным случаем.

§ 4. Оптимальные методы ускорения сходимости приближений Виддера

В § 2 был построен линейный метод ускорения сходимости в виде комбинаций значений операторов $W_{nd_j}(f, t)$ с произвольными номерами nd_1, \dots, nd_k , обеспечивающий сходимость к искомому оригиналу со скоростью n^{-k} . Вид главного члена погрешности такого приближения указан в теореме 1.

Несомненный интерес представляют следующие задачи:

1) при фиксированном числе слагаемых k в формуле (14) выбрать такие номера приближений по Виддеру из заданного диапазона их возможных значений от n_1 до n_k , чтобы главный член погрешности формулы (14) был минимален;

2) при фиксированных значениях k, n_1, n_k выбрать d_1, \dots, d_k так, чтобы сумма модулей коэффициентов c_{kj} была минимальной.

Теорема 4. Для минимизации модуля главного члена погрешности формулы (14) следует использовать значения $W_n(f, t)$ операторов Виддера с номерами $n_k, n_k - 1, \dots, n_k - k + 1$.

Доказательство. В случае достаточно гладкого оригинала при $n \rightarrow \infty$ справедлива формула (10):

$$W_n(f, t) = f(t) + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots,$$

где a_j — не зависящие от n величины. Выберем k различных натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ и положим $d_j = n_j/n_1$, $j = 1, 2, \dots, k$ (впрочем, в знаменателе можно написать любое натуральное число), после чего образуем числа

$$c_{kj} = \prod_{i \neq j} \frac{d_j}{d_j - d_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

и составим линейную комбинацию

$$W_{n_1}(k, f, t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} W_{n_1 d_j}(f, t).$$

Числа c_{kj} выбираются из условий

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-m} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m = 1, 2, \dots, k-1. \end{cases}$$

Следовательно, справедливо разложение

$$W_{n_1}(k, f, t) - f(t) = \frac{a_k}{n_1^k} \sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-k} + \dots \quad (31)$$

Коэффициент a_k не зависит от фиксированного числа n_1 и чисел d_1, \dots, d_k , поэтому для минимизации главного члена разложения (31) необходимо, чтобы величина

$$B = \left| \sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-k} \right|$$

была минимальна. Исходя из определения чисел c_{kj} , получаем тождество

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-k} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{d_j \prod_{i \neq j} (d_j - d_i)}. \quad (32)$$

Положим $\omega(x) = (x - d_1) \cdots (x - d_k)$. Как известно,

$$\sum_{j=1}^k \frac{\omega(x)}{(x - d_j) \omega'(d_j)} = 1,$$

откуда находим

$$\frac{1}{\omega(0)} = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{d_j \omega'(d_j)}. \quad (33)$$

Правые части (32) и (33) отличаются лишь знаком, и $|\omega(0)| = d_1 \cdots d_k$, так что $B = 1/(d_1 \cdots d_k)$. Значит, для достижения $\min B$

числа $d_1 \dots d_k$ должны быть максимально большими, т.е. следует использовать приближения W_n с наибольшими номерами $n_k, n_k - 1, \dots, n_k - k + 1$. \square

Полученный результат естествен в том смысле, что приближения с большими номерами точнее приближают оригинал. С другой стороны, такой выбор номеров приближений приводит к наибольшим по модулю значениям коэффициентов c_{kj} с чередующимися знаками, что ведёт к потере точности при вычислениях.

Перейдём ко второй задаче.

Дано число k , $k \geq 2$, и границы изменения номеров n от n_1 до n_k . Введём новую переменную $x = 1/n$ и точки $x_j = 1/(n_1 d_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$. Положим $\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k)$. Запишем интерполяционный многочлен по узлам x_1, \dots, x_k для некоторой непрерывной функции $f(x)$:

$$P_{k-1}(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)} f(x_j). \quad (34)$$

При $x = 0$ получаем

$$P_{k-1}(0) = \sum_{j=1}^k \frac{\omega(0)}{-x_j \omega'(x_j)} f(x_j).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что коэффициенты при $f(x_j)$ в этой записи совпадают с c_{kj} :

$$c_{kj} = -\frac{\omega(0)}{x_j \omega'(x_j)}.$$

Итак,

$$P_{k-1}(0) = \sum_{j=1}^k c_{kj} f(x_j). \quad (35)$$

Далее нам потребуется несколько изменённый вариант утверждения из работы [17], приводимый далее без доказательства.

Теорема 5. Пусть узлы в интерполяционном многочлене (34) принадлежат отрезку $[a, b]$, $0 < a < b$. Для того чтобы сумма модулей коэффициентов c_{kj} в представлении (35) была минимальна, следует в качестве узлов интерполирования выбрать корни многочленов Чебышёва второго рода $\tilde{U}_{k-2}(x)$, смещённых на отрезок

$[a, b]$, а также концы этого отрезка. При этом минимальное значение будет равно

$$\sum_{j=1}^k |c_{kj}| = (-1)^{k-1} \tilde{T}_{k-1}(0),$$

где $\tilde{T}_{k-1}(x)$ — смещённые на $[a, b]$ многочлены Чебышёва первого рода.

Напомним связь многочленов Чебышева первого и второго родов: $T'_{n-1}(x) = (n-1)U_{n-2}(x)$. Следовательно, оптимальные узлы, о которых идёт речь в теореме 4, суть точки максимума модуля многочлена $\tilde{T}_{k-1}(x)$.

На отрезке $[1/n_k, 1/n_1]$ рассмотрим смещённый многочлен Чебышева первого рода

$$\tilde{T}_{k-1}(x) = T_{k-1}\left(\frac{2x - 1/n_1 - 1/n_k}{1/n_1 - 1/n_k}\right).$$

Возьмём точки

$$x_{j+1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_k} \right) \cos \frac{j\pi}{k-1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_k} \right], \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad (36)$$

в которых $|\tilde{T}_{k-1}(x_{j+1})| = 1$ и положим $m_j = 1/x_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, а затем по числам $\bar{d}_j = m_j/m_1$ построим числа \bar{c}_{kj} , как и ранее. По теореме 4

$$\sum_{j=1}^k |\bar{c}_{kj}| = (-1)^{k-1} \tilde{T}_{k-1}(0),$$

и это значение минимально.

Числа m_j , вообще говоря, не целые, и поэтому в качестве искомым номеров приближений $W_n(f, t)$ по Виддеру следует взять ближайшие целые к ним:

$$n_j = \text{entier} \left(m_j + \frac{1}{2} \right), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Такие номера будем называть чебышёвскими. Используя тот факт, что

$$\prod_{j=1}^k x_j = 2^{2-2k} (n_1 n_k)^{1/2-k} \left[(\sqrt{n_k} + \sqrt{n_1})^{2k-2} - (\sqrt{n_k} - \sqrt{n_1})^{2k-2} \right],$$

нетрудно получить явную приближённую формулу для вычисления величины

$$\bar{B} = \left| \sum_{j=1}^k \bar{c}_{kj} \bar{d}_j^{-k} \right|$$

в случае чебышевских номеров (она приближённа, так как чебышевские номера получались округлением до целых чисел). Естественно, значение \bar{B} больше величины B , соответствующей оптимальным узлам, решающим первую задачу — минимизацию главного члена погрешности, однако превышение не обязательно значительное: так, в случае $n_k/n_1 = 2$ отношение \bar{B}/B при $k = 3$ равно трём, а при $k = 6$ равно 9.3.

В то же время величины $\sum_{j=1}^k |\bar{c}_{kj}|$ и $\sum_{j=1}^k |c_{kj}|$, характеризующие устойчивость, резко отличаются друг от друга: так, при $n_1 = 1500$, $n_k = 2000$ и $k = 9$ для чебышёвских номеров имеем $\sum_{j=1}^k |\bar{c}_{kj}| \approx 10^8$, для наилучших номеров 2000, 1999, ..., 1992 получаем $\sum_{j=1}^k |c_{kj}| \approx 1.6 \cdot 10^{24}$, а для равноотстоящих номеров 2000, 1970, ..., 1760 получаем $\sum_{j=1}^k |c_{kj}| \approx 10^{12}$.

§ 5. Применение многочленов Чебышёва к построению дельтообразных ядер

Пусть p_1, \dots, p_n — произвольные узлы, лежащие в полуплоскости $\text{Re } p > 0$, параметр s равен единице и дана КФ обращения преобразования Лапласа вида

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_1(p_k/t), \quad \varphi_1(p) = pF(p). \quad (37)$$

С учетом определения $F(p)$ запишем ее иначе:

$$f(t) \approx \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n A_k p_k e^{-p_k x} \right) f(tx) dx.$$

Следовательно, КФ будет давать хорошее приближение, если функция

$$\delta_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k p_k e^{-p_k x}$$

дельтообразна в точке $x = 1$. Положим

$$\Delta_n(x) = \int \delta_n(x) dx = C - \sum_{k=1}^n A_k e^{-p_k x}.$$

Узлы p_k и коэффициенты A_k надо выбирать так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ выполнялись условия

$$\Delta_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1, \quad \Delta_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Первое из них справедливо при любых p_k, A_k , если положить $C = 1$, а второе условие означает, что

$$\sum_{k=1}^n A_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Положим $y = e^{-x}$. В силу сказанного выше функция

$$g_n(y) = \sum_{k=1}^n A_k y^{p_k}$$

должна приближать функцию

$$g(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq e^{-1}, \\ 1, & e^{-1} < y \leq 1. \end{cases}$$

Продолжим $g(y)$ на $[-1, 0]$ нечётным образом, после чего будем искать приближение к ней на $[-1, 1]$ в виде разложения по нечётным многочленам Чебышёва первого рода, т. е.

$$g(y) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} T_{2k+1}(y). \quad (38)$$

Очевидно,

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(y) T_{2k+1}(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{4}{\pi} \frac{\sin((2k+1) \arccos e^{-1})}{2k+1}.$$

Далее считаем $p_k = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Разложим правую часть в (38) по степеням y :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} T_{2k+1}(y) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{2j+1} y^{2j+1}.$$

Следовательно, коэффициенты КФ (37) с узлами $p_k = 2k - 1$ равны

$$A_{j+1} = b_{2j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Но

$$b_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)!} \sum_{k=j}^{n-1} a_{2k+1} T_{2k+1}^{(2j+1)}(0). \quad (39)$$

Нетрудно показать (см., например, [35]), что

$$T_{2k+1}^{(2j+1)}(0) = (-1)^{k-j} (2k+1) \prod_{i=1}^{2j} (2(k-j+i)).$$

В итоге, используя (39), получаем явную формулу для коэффициентов КФ:

$$A_{j+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{\sin((2k+1) \arccos e^{-1})}{2k+1} (-1)^{k-j} \prod_{i=1}^{2j} \left(2 \frac{k-j+i}{i} \right).$$

Для изучения ядра $\delta_n(x)$ с целью выяснения априорной точности формулы (37) целесообразно сначала представить его в виде

$$\delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} (2k+1) (e^{-x})^{2k+1},$$

а затем рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} \delta_n^*(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} (2k+1) x^{2k+1} = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} x^{2k+1} \right)' = \\ &= x \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} T_{2j+1}(x) \right)'. \end{aligned}$$

Используя свойства многочленов Чебышёва (см. [35]), получаем

$$\begin{aligned} x T'_{2j+1}(x) &= 2(2j+1) \sum_{k=0}^{n-1} T_{2k+1}(x) + (2j+1) T_{2j+1}(x) = \\ &= (2j+1) (U_{2j-1}(x) + T_{2j+1}(x)) = \\ &= (2j+1) \left(\frac{\sin(2j \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(2j+1) \arccos x \right). \end{aligned}$$

В итоге получаем представление ядра, не требующее предварительного вычисления коэффициентов A_k :

$$\delta_n^*(x) = \frac{4}{\pi} \left(x \sqrt{1 - e^{-2}} + \sum_{j=1}^{n-1} \sin(2j+1) \arccos e^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\sin 2j \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(2j+1) \arccos x \right\} \right).$$

График ядра $\delta_{15}(x)$ приведён на рис. 4.

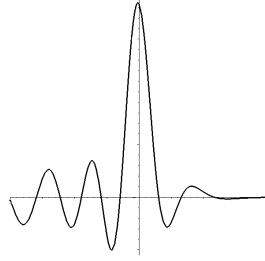


Рис. 4: Ядро $\delta_{15}(x)$

С ростом n эти ядра ведут себя так же, как и ядра КФНСТ (см. рис. 1). При возрастании n сумма коэффициентов КФ (37) стремится к единице, и в то же время сами коэффициенты растут по модулю. Сумма модулей коэффициентов любой КФ обращения, как мы видели, характеризует устойчивость КФ по отношению к ошибкам в функции $\varphi_s(p)$. Скорость роста коэффициентов КФНСТ была установлена в гл. 3. В табл. 4 для некоторых n приведены значения $\max_k |A_k|$ для КФНСТ (при $s = 1$) и КФ (37) с узлами $p_k = 2k - 1$.

Таблица 4

| n | Значения $\max_k A_k $ | |
|-----|-------------------------|---------------------|
| | КФНСТ | формула (37) |
| 11 | $5.7 \cdot 10^4$ | $1.1 \cdot 10^5$ |
| 15 | $8.4 \cdot 10^6$ | $1.6 \cdot 10^8$ |
| 20 | $4.6 \cdot 10^9$ | $2.8 \cdot 10^{12}$ |
| 26 | $1.0 \cdot 10^{13}$ | $8.0 \cdot 10^{16}$ |

Как видим, построенные КФ уступают КФНСТ в смысле устойчивости, но их узлы и коэффициенты вещественны. Этот пример

лишний раз показывает, что необходимо согласовывать выбор числа узлов КФ с точностью исходной информации.

З а м е ч а н и е 4. Аналогичным образом можно построить КФ вида (37) с узлами $p_k = (2k - 1)a$ для произвольного положительного значения a .

Результаты этого параграфа изложены в статье [47].

§ 6. Дельта-метод обращения преобразования Лапласа высокого порядка точности

1⁰. До сих пор мы исходили из заданного способа обращения преобразования Лапласа, затем строили соответствующее ему дельтообразное ядро, изучали его свойства, на основе которых устанавливалась скорость сходимости метода, а затем с учетом асимптотического разложения погрешности метода строились алгоритмы ускорения сходимости, теоретически позволяющие добиться любой желаемой точности определения оригинала. В данном параграфе решается обратная задача: построение ядра с хорошими дельтообразными свойствами, устанавливаемыми до построения фактического способа обращения, а затем определения параметров этого метода.

Идея построения дельта-ядер применительно к задаче вычисления значений функции по её моментам с помощью ортогональных многочленов и установления характеристик дельтообразных ядер содержится в работе [73]. Некоторые её результаты приведены ниже. В то же время в [73] высказано сомнение о возможности получения явных выражений коэффициентов порождаемых такими ядрами методом вычисления искомых величин, не говоря уже об удобных формах реализации такого подхода к задаче обращения. Цель данного параграфа состоит в построении методов обращения на основе идеологии работы [73], установлении скорости их сходимости, а также в указании наиболее рациональной формы их реализации в зависимости от способа задания исходной информации. Изложение дальнейшего материала следует работе [42].

2⁰. Пусть a, α, β — положительные числа и $A_s(x, t)$ — некоторый

многочлен по t степени не выше s , $s \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned}\mu(a, \alpha, \beta) &= \int_0^\infty e^{-(\alpha+1)az} (1 - e^{-az})^\beta f(z) dz, \\ f_s(y) &= a \int_0^\infty e^{-(\alpha+1)az} (1 - e^{-az})^\beta A_s(1 - e^{-ay}, 1 - e^{-az}) f(z) dz.\end{aligned}\tag{40}$$

Значения $\mu(a, \alpha, \beta)$ выражаются через значения изображения в ряде равноотстоящих точек по формуле

$$\mu(a, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)_k}{k!} F(a(k + \alpha + 1)),\tag{41}$$

где $(-\beta)_0 = 1$, $(-\beta)_k = (-\beta) \cdots (-\beta + k - 1)$, $k \geq 1$. Пусть разложение $A_s(x, t)$ по степеням t имеет вид

$$A_s(x, t) = \sum_{j=0}^s A_j^s(x) t^j,$$

тогда

$$f_s(y) = a \sum_{j=0}^s A_j^s(1 - e^{-ay}) \mu(a, \alpha, \beta + j).\tag{42}$$

Поставим следующую задачу: для фиксированных значений $s \geq 0$, $a > 0$, $y > 0$ выбрать $A_s(x, t)$ так, чтобы при согласованном росте параметров α, β сомножитель при $f(z)$ под знаком интеграла в (40) стремился к дельта-функции в точке y .

3⁰. После замены переменных $t = 1 - \exp(-az)$, $x = 1 - \exp(-ay)$ и введения функций $g(t) = f(-\ln(1-t)/a)$, $g_s(t) = f_s(-\ln(1-t)/a)$ формула (40) примет вид

$$g_s(x) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha\beta} A_s(x, t) g(t) dt.\tag{43}$$

Потребуем, чтобы для $\alpha, \beta > 0$ и любом $x \in [0, 1]$ выполнялось равенство $g_s(x) = g(x)$, если $g(x)$ — многочлен степени не выше s . Этим условием ядро $A_s(x, t)$ определяется однозначно [53, 73], а именно

$$\begin{aligned}A_s(x, t) &= \sum_{k=0}^s h_k p_k^{(\alpha, \beta)}(x) p_k^{(\alpha, \beta)}(t) = \\ &= \lambda_s \left(p_s^{(\alpha, \beta)}(x) p_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(t) - p_s^{(\alpha, \beta)}(t) p_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \right) / (t - x),\end{aligned}\tag{44}$$

где

$$\gamma = \alpha + \beta + 1, \quad h_k = (2k + \gamma)\Gamma(k + \gamma)k! / (\Gamma(k + \alpha + 1)\Gamma(k + \beta + 1)),$$

$$\lambda_s = (s + 1)!\Gamma(\gamma + s + 1) / ((\gamma + 2s + 1)\Gamma(\alpha + s + 1)\Gamma(\beta + s + 1)),$$

$p_k^{(\alpha, \beta)}(x) = P_s^{(\alpha, \beta)}(2x - 1)$ — смещенные на $[0, 1]$ многочлены Якоби. Для любой достаточно гладкой функции $g(t)$, отличной от многочлена степени не выше s , приближение к ней в точке $t = x$, $0 < x < 1$, определяется по формуле (43), но теперь уже α, β не произвольны, а определенным способом связаны с точкой x , за счет чего можно будет, как показано ниже, повысить точность приближения.

Итак, приближение к $g(x)$ есть отрезок ряда по многочленам Якоби, число членов которого одно и то же и равно $s + 1$, в то время как параметры α, β веса Якоби $(1 - t)^{\alpha}t^{\beta}$ будут возрастать и определенным образом связаны с точкой x . Перейдем к изучению свойств ядра (44) и приближений (43).

Лемма 7. Коэффициенты $A_j^s(x)$ ядра $A_s(x, t)$ вычисляются по формулам

$$A_j^s(x) = \sum_{k=j}^s (-1)^{k-j} p_k^{(\alpha, \beta)}(x) (2k + \alpha + \beta + 1) \binom{k}{j} \binom{k + \alpha + \beta + j}{\beta + j},$$

$$j = 0, 1, \dots, s. \quad (45)$$

Доказательство. Очевидно,

$$A_j^s(x) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j A_s(x, 0)}{\partial t^j} = \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^s h_k p_k^{(\alpha, \beta)}(x) \frac{d^j}{dt^j} p_k^{(\alpha, \beta)}(t) \Big|_{t=0}.$$

Производные под знаком суммы вычисляются с помощью формул дифференцирования многочленов Якоби [9]

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-m} \frac{\Gamma(n + m + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} P_{n-m}^{(\alpha+m, \beta+m)}(x).$$

После несложных выкладок получим формулу (45). Если β не целое, то в формуле (45) следует использовать формулу

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a - b + 1)\Gamma(b + 1)}.$$

Замечание 5. Условие на коэффициенты $A_j^s(x)$, состоящее в переводе многочленов степени не выше s в себя по формуле (43), равносильно системе уравнений

$$\sum_{j=0}^s A_j^s(x) \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+j+m+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+j+m+2)} = x^m, \quad m = 0, 1, \dots, s.$$

Это же условие равносильно тому, что правая часть формулы (42) переводит в себя функции $(1 - e^{-ay})^m$, $m = 0, 1, \dots, s$ или, что то же самое, функции e^{-amy} , $m = 0, 1, \dots, s$ для выбранного фиксированного a .

На отрезке $[0, 1]$ функция $(1 - t)^{\alpha}t^{\beta}$ при $\alpha, \beta > 0$ достигает наибольшего значения в точке $t_0 = \beta/(\alpha + \beta)$, $0 < t_0 < 1$. Естественно ожидать, что и функция $(1 - t)^{\alpha}t^{\beta}A_s(x, t)$ будет максимальна по модулю в той же точке, если параметры α, β стремятся к бесконечности таким образом, что выполняется условие $\beta/(\alpha + \beta) = t_0$. Положим $\beta = n, \alpha = n(1/x - 1)$, считая $0 < x < 1$, тогда при любом натуральном n имеем $t_0 = x$.

Лемма 8 ([73]). Пусть $\alpha = n(1/x - 1)$, $\beta = n, x \in [0, 1]$ и функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на $[0, 1]$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для любого положительного числа δ такого, что $0 < x - \delta < x + \delta < 1$, имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{x-\delta} (1-t)^{\alpha}t^{\beta}A_s(x, t)g(t)dt &\sim C_1 n^{s+1/2} q_1^n, \\ \int_{x+\delta}^1 (1-t)^{\alpha}t^{\beta}A_s(x, t)g(t)dt &\sim C_2 n^{s+1/2} q_2^n, \\ p_s^{(\alpha, \beta)}(x) &\sim C_3 n^{[s/2]}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, q_1, q_2 — не зависящие от n постоянные, причем $0 < q_1, q_2 < 1$.

4⁰. Перейдем к оценке разности $g_s(x) - g(x)$ в предположении достаточной гладкости функции $g(x)$.

В силу выбора ядра имеем

$$g_s(x) - g(x) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha}t^{\beta}A_s(x, t)(g(t) - g(x))dt.$$

При подстановке в эту ряда Тейлора

$$g(t) - g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g^{(j)}(x)}{j!} (t-x)^j$$

можно отбросить первые s членов, учитывая свойства ядра. Далее, используя представление (44) и введя функцию

$$G_x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(s+j+1)}(x)}{(s+j+1)!} (t-x)^{j+s},$$

придем к равенству

$$g_s(x) - g(x) = \lambda_s \left(p_s^{(\alpha, \beta)}(x) \int_0^1 (1-t)^{\alpha} t^{\beta} p_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(t) G_x(t) dt - \right. \\ \left. - p_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \int_0^1 (1-t)^{\alpha} t^{\beta} p_s^{(\alpha, \beta)}(t) G_x(t) dt \right).$$

Применяя интегрирование по частям $s+1$ раз для первого интеграла и s раз для второго интеграла в правой части этого равенства и используя соотношение

$$\frac{d}{dt} \left((1-t)^{\alpha+1} t^{\beta+1} p_{k-1}^{(\alpha, \beta)}(t) \right) = -\frac{k}{4} (1-t)^{\alpha} t^{\beta} p_k^{(\alpha, \beta)}(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

получим представление

$$g_s(x) - g(x) = (-1)^{s+1} \lambda_s s! 4^{-s-1} \left((s+1) p_s^{(\alpha, \beta)}(x) \times \right. \\ \times \int_0^1 (1-t)^{\alpha+s+1} t^{\beta+s+1} G_x^{(s+1)}(t) dt + \\ \left. + 4 p_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \int_0^1 (1-t)^{\alpha+s} t^{\beta+s} G_x^{(s)}(t) dt \right). \quad (46)$$

Теорема 6. Пусть $\alpha = n(1/x-1)$, $\beta = n$, $x \in (0, 1)$ и $g(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$g_s(x) - g(x) \sim n^{-1-[s/2]} \sum_{j=0}^{\infty} c_j n^{-j/2},$$

где c_j — некоторые не зависящие от n величины.

Доказательство. Из определения $G_x(t)$ имеем

$$G_x^{(s)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(s+j+1)}(x)}{j!(s+j+1)}(t-x)^j,$$

$$G_x^{(s+1)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(s+j+2)}(x)}{j!(s+j+2)}(t-x)^j.$$

Методом Лапласа [58] при фиксированном b получаем асимптотические разложения

$$\lambda_s \int_0^1 (1-t)^{\alpha+b} t^{\beta+b} (t-x)^j dt \sim C n^{-s-1-j/2}. \quad (47)$$

Тем самым найдены разложения входящих в (46) интегралов, умноженных на λ_s . Далее, по лемме 8

$$p_{s+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \sim C_1 n^{[(n+1)/2]},$$

в силу чего главный член погрешности (46) содержит n в степени $[(s+1)/2] - s - 1 = -1 - [s/2]$. Дальнейшие преобразования очевидны. \square

Следствие 1. Если функция $g(t)$ имеет непрерывную производную порядка $s+2$, то при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$g_s(x) - g(x) = O(n^{1-[s/2]}).$$

Итак, теоретически мы можем построить метод обращения со сколь угодно высокой скоростью сходимости. Разумеется, для практической реализации это потребовало бы неограниченной точности проведения вычислений.

5⁰. Остановимся на выборе значения параметра a в формуле (42) приближенного обращения преобразования Лапласа.

Как правило, искомый оригинал $f(y)$ нужно определить для всех $y > 0$. Если взять параметр a фиксированным и не зависящим от y , то, во-первых, входящие в (42) моменты $\mu(a, \alpha, \beta)$ выражаются через значения $F(p)$ в точках, не зависящих от y , что неестественно, и, во-вторых, значение величины $x = 1 - \exp(-ay)$ будет сколь угодно мало при малых y и близко к единице при больших y , а это ухудшает фильтрующие свойства ядра (числа q_1, q_2 будут близки к

единице, см. лемму 8). К тому же с изменением x придется заново вычислять коэффициенты $A_j^s(x)$.

Учитывая сказанное, поступим так: по заданному y вычисляем $f_s(y)$, положив $a = d/y$, где d — некоторое положительное число. В этом случае x остается одним и тем же, и коэффициенты $A_j^s(x)$ не меняются с изменением y . Зависимость от y теперь целиком содержится в значениях изображения и имеет более естественный характер, как и в других методах обращения (см. другие главы).

Замечание 6. В частном случае $s = \alpha = \beta = 0$ приходим к приближенной формуле

$$f(y) \approx pF(p)|_{p=d/y},$$

содержащей в себе при $d = 1$ популярную у механиков формулу Тер-Хаара [65].

Положим $d = \ln 2$, тогда $x = 0.5$ и $\alpha = \beta = n$. Пусть n чётно. Так как $p_{s+1}^{(n,n)}(0.5) = 0$, то $A_{s+1}^{s+1}(0.5) = 0$ и $A_j^s(0.5) = A_j^{s+1}(0.5)$, $j \leq s$, т. е. при нечётном значении $s+1$ получается предыдущая формула. Итак, s следует брать чётным. Но в таком случае второе слагаемое в скобках в формуле (46) равно нулю. Интегралы вида (47) при $x = 0.5$ для чётных j удастся выразить точно через значения гамма-функции, а при нечётных j они равны нулю. Окончательный результат для этого важного частного случая, аналогичный теореме 6, таков.

Теорема 7. Пусть $x = 0.5$, $\alpha = \beta = n$, s чётно и функция $g(t)$ на $[0, 1]$ бесконечно дифференцируема. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} g_s(0.5) - g(0.5) &= \lambda_s p_s^{(n,n)}(0.5) 2^{-2(n+s+1)-1} \Gamma(n+s+2) \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^{(s+2m)}(0.5)}{(s+2m)(2m-2)!} \frac{\Gamma(m-0.5)}{\Gamma(n+s+2+m-0.5)} \approx (-1)^{s/2} \frac{(s+1)!}{(s/2)!} \times \\ &\times n^{-s/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^{(s+2m)}(0.5)}{(s+2m)(2m-2)!} \frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(m)} 2^{-2m-2s-1} n^{-m}. \end{aligned}$$

Следствие 2. Если функция-оригинал $f(y)$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $y > 0$, то при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$f_0(y) - f(y) = \frac{1}{n} \left(\frac{4y^2}{\ln^2 2} f''(y) + \frac{4y}{\ln 2} f'(y) \right) + O(n^{-2}).$$

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 7, если взять $s = 0, m = 1, a = \ln 2/y$ и выразить производные функции $g(x)$ через $f(y)$.

Замечание 6. Второе слагаемое в правой части (46) убывает медленнее первого, вообще говоря. Поэтому при данном s (не обязательно чётном) в случае $x \neq 0.5$ параметр d следует выбирать так, чтобы выполнялось равенство $p_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$. Очевидно, что при увеличении s на единицу и в этом случае приближенная формула не изменится.

6⁰. Мы видели, что наиболее удобным и в вычислительном отношении, и с точки зрения хорошей дельтообразности ядра является выбор $a = \ln 2/y$. Так как при этом $\beta = n$, то ряд (41) обрывается, что существенно упрощает вычисление $\mu(a, \alpha, j)$. Легко проверить, что имеет место формула

$$\mu(a, \alpha, m) = (-1)^m \Delta^m F(a(\alpha + 1)), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (48)$$

где $\Delta^m F(p)$ означает конечную разность порядка m изображения в точке p . Далее всюду считаем $a = \ln 2/y$, так что $x = 0.5, \alpha = \beta = n$. Введем для сокращения записи обозначения

$$A_{jn}^s = A_j^s(0.5), \quad j = 0, 1, \dots, s.$$

Приближенному методу обращения (42) соответствуют ядра

$$\delta_n(z) = \ln 2 \cdot 2^{-(n+1)z} (1 - 2^{-z}) \sum_{j=0}^s A_{jn}^s (1 - 2^{-z})^j.$$

График этого ядра при $n = 5, s = 6$ приведен на рис. 5.

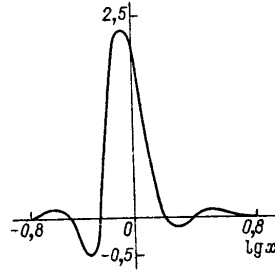


Рис. 5: Ядро $\delta_5(x)$

Правая часть формулы (42) может быть выражена либо через значения самого изображения, либо его конечные разности вида (48), и в итоге мы получаем такие приближения к оригиналу:

$$f_{sn}(y) = a \sum_{j=0}^s A_{jn}^s \sum_{k=0}^{n+j} (-1)^k \binom{n+j}{k} F(a(k+n+1)),$$

$$f_{sn}(y) = a \sum_{j=0}^s (-1)^{n+j} A_{jn}^s \Delta^{n+j} F(a(n+1)).$$

Иногда удобнее записать приближения в терминах функции $\varphi(p) = pF(p)$. Опуская очевидные преобразования этих форм, приведем окончательный вид расчетных формул в этом случае:

$$f_{sn}(y) = \sum_{k=0}^{n+s} B_k^{sn} \varphi(a(k+n+1)),$$

$$f_{sn}(y) = \sum_{k=0}^{n+s} D_k^{sn} \Delta^k \varphi(a(n+1)). \quad (49)$$

Коэффициенты B_k^{sn}, D_k^{sn} однозначно выражаются через A_{jn}^s . Заметим, что коэффициенты D_k^{sn} вычисляются в порядке убывания номеров k от $n+s$ до 0.

Разумеется, с ростом значений параметров s, n качества ядер во всех четырех случаях улучшается, но с вычислительной точки зрения они все портятся — коэффициенты в них растут, хотя и с разной скоростью. По сути они все являются квадратурными формулами обращения, устойчивость которых определяется суммой модулей коэффициентов. Ясно, что при составлении таблиц коэффициентов $A_{jn}^s, B_k^{sn}, D_k^{sn}$ необходимо следить не только за величиной суммы их модулей, но и обеспечивать малую относительную погрешность вычисления каждого коэффициента.

Укажем один из критериев качества вычисления этих коэффициентов. Напомним, что метод точен для функций $\exp(-aty)$, $m = 0, 1, \dots, s$. В частности, он точен для $f(y) = 1$, что соответствует функции $\varphi(p) = 1$. Все конечные разности $\varphi(p)$ равны нулю, и из второй формулы (49) сразу вытекает, что $D_0^{sn} = 1$. Коэффициенты A_{jn}^s входят в выражения D_k^{sn} со знакопередающимися биномиальными коэффициентами, и если точность вычисления A_{jn}^s была

недостаточной, то вычисляемый последним D_0^{sn} будет отличен от единицы. Таблицы коэффициентов $A_{jn}^s, B_k^{sn}, D_k^{sn}$ приведены в работе [43].

В табл. 5 приведены значения некоторых коэффициентов D_k^{sn} для $s = 4$, заимствованные из [43].

Таблица 5

| n | Значения D_k^{sn} |
|-----|--|
| 1 | 1, -2, -10.125, -144, -371.25, -247.5 |
| 2 | 1, -3, 6, 68.75, 763.125, 1876.875, 1251.25 |
| 3 | 1, -4, 10, -20, -398.125, -3867.5, -9213.75, -6142.5 |
| 4 | 1, -5, 15, -35, 70, 2126.25, 18978.75, 44178.75, 29452.5 |

ОБРАЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ РАЗРЫВНЫХ ОРИГИНАЛОВ

§ 1. Точность вычисления значений оригинала и его скачков методом Виддера

1⁰. В предыдущей главе были введены методы Виддера и исследованы их ошибки в предположении достаточной гладкости оригинала. Однако оригинал может быть даже разрывным, в отличие от изображения.

Покажем, что величина скачка оригинала в точке разрыва первого рода, равная $f(t+0) - f(t-0)$, может быть выражена через приближения по Виддеру $W_n(f, t)$, $S_n(f, t)$.

Для этого нам потребуется

Теорема 1 ([72], с. 298). Если интеграл

$$A(p) = \int_0^\infty e^{-pt} d\alpha(t)$$

сходится при некотором p , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{e}{t}\right)^n A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = \alpha(t+0) - \alpha(t-0).$$

Теорема 2. Пусть оригинал $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$ при любом $T > 0$, его изображение равно $F(p)$ и производная $f'(t)$ также является функцией-оригиналом. Тогда при $t > 0$ справедлива формула

$$\sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t)) = f(t+0) - f(t-0),$$

где $W_n(f, t)$, $S_n(f, t)$ — операторы Виддера (см. формулу (4) гл. 5).

Доказательство. Из условий теоремы вытекает существование интеграла $\int_0^\infty e^{-pt} df(t)$ и его равенство величине $A(p) = pF(p) - f(0)$. По теореме 1 скачок оригинала в точке t равен

$$f(t+0) - f(t-0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{e}{t}\right)^n A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right). \quad (1)$$

По формуле Лейбница находим

$$A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = \frac{n}{t}F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) + nF^{(n-1)}\left(\frac{n}{t}\right).$$

С другой стороны, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости тождества

$$A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = (-1)^n \frac{n! t^n}{n^n} (W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t)).$$

Подставляя эту величину в (1) и заменяя факториал по формуле Стирлинга, приходим к утверждению теоремы. \square

Итак, с помощью приближений $W_n(f, t), S_n(f, t)$ мы получаем представление не только о значении оригинала в некоторой точке, но и о наличии разрыва в ней. Для приближенного вычисления $W_n(f, t), S_{n-1}(f, t)$ в главе 5 были получены формулы (27) и найдены оценки сверху величин $|W_{nm} - W_n| \leq \Delta, |S_{nm} - S_n| \leq \Delta$ значением

$$\Delta = \frac{Mr^m}{1-r^m} + \frac{\varepsilon}{(1-r)r^n}.$$

Там же шла речь о способах выбора входящих сюда параметров m, r, ε .

Следствие 1. Если при $n \rightarrow \infty$ параметры m, r, ε в зависимости от n выбираются так, что $\Delta\sqrt{n} \rightarrow 0$, то величина скачка оригинала может быть найдена по формуле

$$f(t+0) - f(t-0) = \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (W_{nm}(f, t) - S_{n-1m}(f, t)). \quad (2)$$

Замечание 1. Для вычисления выражения справа в (2) целесообразно воспользоваться легко проверяемым тождеством

$$W_{nm}(f, t) - S_{n-1m}(f, t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi\left(\frac{n}{t}(1 - re_m(j))\right) (re_m(j))^{-n},$$

$$\varphi(p) = pF(p). \quad (2')$$

Очевидно, при наличии разрыва разность $W_{nm}(f, t) - S_{n-1m}(f, t)$ убывает, вообще говоря, как $1/\sqrt{n}$. Значит, вычисление скачка с удовлетворительной точностью по формуле (2) может потребовать проведения вычислений для очень больших n , что вызовет большие

затруднения при фактической реализации методов Виддера. Поэтому необходим детальный анализ алгоритма вычисления скачков, скорости его сходимости и приемы её увеличения.

2⁰. Возьмем число $\delta \in (0, 1)$ и разобьём область интегрирования в формуле

$$W_n(f, t) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-nx} f(tx) dx \quad (3)$$

на четыре участка $[0, 1-\delta]$, $[1-\delta, 1]$, $[1, 1+\delta]$, $[1+\delta, \infty)$. Рассмотрим интеграл по первому из них:

$$I_1 = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{1-\delta} (xe^{-x})^n f(tx) dx.$$

Функция xe^{-x} неотрицательна, возрастает на $(0, 1)$ и убывает на $(1, \infty)$, принимая наибольшее значение e^{-1} в точке $x = 1$. Следовательно,

$$|I_1| \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \left((1-\delta)e^{-(1-\delta)} \right)^n \int_0^{1-\delta} |f(tx)| dx.$$

интеграл справа конечен и число $q_1 = (1-\delta)e^{-\delta}$ меньше единицы. Используя формулу Стирлинга, приходим к оценке

$$|I_1| \leq C_1 \sqrt{n} q_1^n,$$

где C_1 не зависит от n .

Теперь рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{1+\delta}^\infty \left(e^{-n(x-\ln x)} \right)^n f(tx) dx = \\ &= \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{1+\delta}^\infty e^{-n_0 x} x^{n_0} f(tx) (xe^{-x})^{n-n_0} dx, \quad n, n_0 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

При достаточно больших n_0 будет справедлива оценка

$$|I_4| \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \left((1+\delta)e^{-(1+\delta)} \right)^{n-n_0} \int_{1+\delta}^\infty x^{n_0} e^{-n_0 x} |f(tx)| dx,$$

откуда, как и выше, при $n \rightarrow \infty$ получаем оценку

$$|I_4| \leq C_2 \sqrt{n} q_2^n, \quad 0 < q_2 < 1.$$

Итак, I_1, I_4 достаточно быстро стремятся к нулю. Для оценки двух других интегралов по существу используется метод Лапласа, однако наряду с первым членом асимптотики нас интересуют и последующие.

Остановимся подробнее на интеграле

$$I_3 = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_1^{1+\delta} e^{-n(x-\ln x)} f(tx) dx.$$

Воспользуемся разложениями

$$x - \ln x = 1 + (x-1)^2/2 - \dots, \quad f(tx) = f(t+0) + tf'(t+0)(x-1) + \dots,$$

считая существующими все входящие в них производные. После замены переменной $y = (x-1)^2/2$ получим представление

$$I_3 = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^{\delta^2/2} \frac{e^{-ny}}{\sqrt{2y}} \left(1 + n \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} y^{3/2} - y^2 + \dots \right) + \dots \right) \times \\ \times \left(f(t+0) + tf'(t+0)\sqrt{2y} + \dots \right) dy.$$

Отсюда при фиксированном δ и $n \rightarrow \infty$ с учетом равенства

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{a-1} dx = \Gamma(a) n^{-a}$$

получаем

$$I_3 = \frac{1}{2} f(t+0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(t+0) + tf'(t+0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Совершенно аналогично получаем представление

$$I_2 = \frac{1}{2} f(t-0) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(t-0) + tf'(t-0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Итак, величина (3) имеет асимптотическое разложение

$$W_n(f, t) = \frac{1}{2} (f(t+0) + f(t-0)) + \\ + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t+0) - f(t-0)) + \frac{t}{\sqrt{2\pi}} (f'(t+0) - f'(t-0)) \right) + \\ + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, в точке разрыва оригинала значения $W_n(f, t)$ сходятся к $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$ со скоростью $1/\sqrt{n}$. В точке непрерывности сходимость такая же, если первая производная оригинала в этой точке разрывна, а в случае её непрерывности процесс сходится как $1/n$. Дальнейшее повышение гладкости оригинала не увеличивает скорости сходимости (т. е. методы Виддера быстро насыщаемы), но теперь погрешность представима рядом по степеням $1/n$, а не $1/\sqrt{n}$. Эта априорная информация о характере зависимости погрешности от n и позволяла нам ранее строить методы ускорения сходимости в главе 5.

3⁰. Перейдем к вопросу о точности вычисления скачков оригинала. Положим

$$\Phi_n(t) = \left(-\frac{e}{t}\right)^n A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right), \quad A(p) = pF(p).$$

Используя определение $F(p)$, придем к сингулярному интегралу

$$\Phi_n(t) = ne^n \int_0^\infty e^{-nx} x^{n-1} (x-1) f(tx) dx. \quad (4)$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, придем к асимптотической формуле

$$\Phi_n(t) = f(t+0) - f(t-0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} t (f'(t+0) + f'(t-0)) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

Следовательно, в общем случае скорость сходимости невелика. Она увеличивается, если в точке t выполняется условие $f'(t+0) + f'(t-0) = 0$ (в частности, при $f'(t+0) = f'(t-0) = 0$).

Приведем простые примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пример 1. Возьмем $f(t) = t(t-1)(t-2)$ с изображением $F(p) = 6/p^4 - 6/p^3 + 2/p^2$, тогда функция (4) равна

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= \frac{e^n}{t^n} \frac{n!}{p^{n+1}} \left(\frac{3(n+1)(n+2)}{p^2} - \frac{6(n+1)}{p} + 2 \right) \Big|_{p=n/t} \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{n}} \left((3t^2 - 6t + 2) + \frac{1}{n} (9t^2 - 6t) + \frac{6t^2}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Если $3t^2 - 6t + 2 \neq 0$, т. е. $t \neq 1 \pm 1/\sqrt{3}$, то $\Phi_n(t)$ стремится к нулю как $1/\sqrt{n}$, иначе $\Phi_n(t)$ убывает как $n^{-3/2}$. В точках $t = 1 \pm 1/\sqrt{3}$ оригинал имеет нулевую производную, чем и объясняется ускорение

сходимости (заметим, что оригинал непрерывен, т. е. скачок равен нулю, к которому и стремится $\Phi_n(t)$, но с разной скоростью).

Пример 2. Пусть

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

тогда $F(p) = (1 - e^{-p})/p$ и

$$\Phi_n(t) = (-e/t)^n (pF(p))^{(n)} \Big|_{p=n/t} = - \left(\frac{1}{t} e^{1-1/t} \right)^n.$$

Пусть $x = 1/t$, тогда $\Phi_n(t) = -(xe^{1-x})^n$. При $x = t = 1$ для всех n имеем $\Phi_n(1) = -1$, т. е. получено точное значение скачка, поскольку существуют односторонние пределы всех производных оригинала в точке $t = 1$ и они равны нулю, поэтому в правой части формулы (5) остаётся лишь величина скачка. При $t \neq 1$ имеем $\Phi_n(t) = -q^n$, где q положительно, зависит от t , но заведомо меньше единицы.

4⁰. Знание априорной информации о поведении $\Phi_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ приводит к следующему алгоритму ускорения сходимости: пусть известно, что

$$\Phi_n(t) = b_0 + b_1 n^{-a} + b_2 n^{-2a} + \dots,$$

где b_j не зависят от n и a — известное число (в нашем случае $a = 0.5$). Возьмем числа d_1, \dots, d_k такие, что $1 \leq d_1 < \dots < d_k$ и все числа $n_j = nd_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, целые. Вычислим $\Phi_{n_1}(t), \dots, \Phi_{n_k}(t)$ и образуем их линейную комбинацию

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} \Phi_{n_j}(t) = b_0 \sum_{j=1}^k c_{kj} + \frac{b_1}{n_1^a} \sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-a} + \frac{b_2}{n_1^{2a}} \sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-2a} \dots$$

Потребуем, чтобы числа c_{kj} удовлетворяли условиям

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} = 1, \quad \sum_{j=1}^k c_{kj} d_j^{-ma} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, k-1.$$

Эта система имеет единственное решение

$$c_{kj} = \prod_{i=1, i \neq j}^k \frac{d_j^a}{d_j^a - d_i^a}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

При таком выборе коэффициентов c_{kj} имеем

$$\sum_{j=1}^k c_{kj} \Phi_{n_j}(t) = b_0 + O(n_1^{-ka}).$$

Заметим, что для справедливости этого утверждения достаточно включения $f \in C^{2k}$ на $(0, t)$ и (t, ∞) .

Следовательно, за счет выбора n_0 и k линейная комбинация позволяет определить значение $b_0 = f(t+0) - f(t-0)$ с требуемой степенью точности.

Метод ускорения сходимости построен. Для приближенного вычисления $\Phi_n(t)$ можно воспользоваться теоремой 2, т. е. положить

$$\Phi_n(t) \approx \sqrt{2\pi n} (W_{nm}(f, t) - S_{n-1m}(f, t)). \quad (6)$$

Замечание 2. При $a = 1$ получаем ранее описанный способ ускорения сходимости методов Виддера.

Для наибольшей устойчивости по отношению к ошибкам вычисления функции $\Phi_n(t)$ желательно выбрать k номеров таких, чтобы сумма модулей коэффициентов c_{kj} была наименьшей.

Пусть нам известен диапазон $[n_0, n_{\text{кон}}]$ изменения номеров приближений. Будем считать, что $n_0 = m_0^2$, $n_{\text{кон}} = m_{\text{кон}}^2$, где числа m_0 , $m_{\text{кон}}$ натуральны.

Вычисляем величины

$$x_j = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_{\text{кон}}} \right) \cos \frac{\pi(j-1)}{k-1} + \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_{\text{кон}}} \right),$$

затем полагаем $y_j = 1/x_j$ и в качестве оптимальных номеров берем числа

$$n_j = \lfloor y_j^2 + 0.5 \rfloor, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Скобки означают целую часть числа. Эти узлы назовем чебышевскими.

Точка скачка t может быть найдена следующим образом. Пусть, например, известны значения величины (6), вычисленные по формуле (2') для некоторых для n_1, m_1 и n_2, m_2 . Запишем вытекающее из приближенного равенства (6) уравнение

$$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} (W_{n_1 m_1}(f, t) - S_{n_1-1 m_1}(f, t)) - (W_{n_2 m_2}(f, t) - S_{n_2-1 m_2}(f, t)) = 0. \quad (7)$$

Точка скачка оригинала близка к решению этого уравнения. Если таковых несколько, то построим аналогичное уравнение для других пар чисел n_1, m_1 и n_2, m_2 и определим точку скачка как общий корень этих уравнений.

Пример 3. Дан разрывный оригинал

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t \leq 1, \\ \cos t, & t > 1, \end{cases}.$$

Его изображение для простоты не выписываем.

Для определения точки скачка оригинала возьмем два набора чебышевских номеров на отрезках $[100, 400]$ и $[81, 256]$, положим $k = 6, m_j = 2n_j + 1$ и построим график функции, стоящей в левой части уравнения (7).

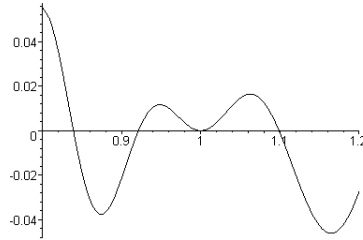


Рис. 6: График левой части уравнения (7)

Очевидно, что точка $t = 1$ — точка скачка оригинала, ибо в ней правые части равенств (6) достигают максимума и приближенно равны друг другу, в то время как в других точках, где график пересекает ось абсцисс, а не касается ее, как в точке максимума, просто случайно совпадают меньшие значения двух функций.

По изображению были вычислены значения $\Phi_n(t)$ по формуле (6) для $n = 1000, 1500, 2000$: $\Phi_{1000}(1) = -0.418103$, $\Phi_{1500}(1) = -0.425097$, $\Phi_{2000}(1) = -0.42901$. Затем по значениям $n = 1000, d_1 = 1, d_2 = 1.5, d_3 = 2$ были найдены c_{kj} и вычислена линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^3 c_{kj} \Phi_{n_j}(1) = -0.459506.$$

Точное значение скачка оригинала равно $\cos 1 - 1 = -0.459697$. Как видим, способ ускорения весьма эффективен.

Предположим, что мы определили точку a , в которой оригинал имеет скачок первого рода, равный $f(a+0) - f(a-0)$, и нам известны значения $f(a+0), f(a-0)$. Допустим, что $f'(t)$ также является функцией-оригиналом, у которой в точке $t = a$ существуют односторонние пределы наряду со всеми производными.

Поставим задачу определения значений $f'(a+0), f'(a-0)$.

Изображение по Лапласу производной $f'(t)$ равно

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \int_0^\infty \exp(-pt) f'(t) dt = \left(\int_0^a + \int_a^\infty \right) \exp(-pt) f'(t) dt = \\ &= \exp(-pt) f(t) \Big|_0^a + \exp(-pt) f(t) \Big|_a^\infty + p \int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt = \\ &= pF(p) - f(+0) - \exp(-ap) (f(a+0) - f(a-0)). \end{aligned}$$

Очевидно, поставленная задача решается применением описанных выше методов применительно к изображению $F_1(p)$.

Аналогичным образом ставится и решается задача определения скачков последующих производных, на чем мы останавливаться не будем.

5⁰. Укажем другой способ построения разложений $W_n(f, t)$, аналогичный предложенному в работе [48] при исследовании квадратурных формул наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа и приводящий к похожим результатам.

Пусть функция $f(x)$ имеет единственный конечный разрыв в точке t и пусть существуют односторонние пределы $f_+^{(j)}(t) = f^{(j)}(t+0)$, $f_-^{(j)}(t) = f^{(j)}(t-0)$, $j = 0, 1, \dots$. Предположим, что оригинал $f(tx)$ в интервалах $(0, t)$ и $(t, +\infty)$ допускает представления в виде сходящихся рядов

$$\begin{aligned} f(tx) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_-^{(j)}(t)}{j!} t^j (x-1)^j, \quad 0 < x < 1, \\ f(tx) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_+^{(j)}(t)}{j!} t^j (x-1)^j, \quad x > 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Оператор Виддера $W_n(f, t)$ имеет вид

$$W_n(f, t) = \int_0^\infty w_n(x) f(tx) dx \tag{9}$$

с ядром

$$w_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx}.$$

Представим промежуток интегрирования в (9) в виде объединения двух промежутков $(0, 1) \cup (1, \infty)$ и рассмотрим отдельно интеграл по каждому из них, используя при этом соответствующие разложения (8):

$$J_1 = \int_1^\infty w_n(x) f(tx) dx = \sum_{i=0}^\infty \frac{t^i f_+^{(i)}(t)}{i!} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_1^\infty x^n (x-1)^i e^{-nx} dx.$$

Замена переменной $x-1 = y$ приводит последний интеграл к виду

$$\begin{aligned} e^{-n} \int_0^\infty y^i (y+1)^n e^{-ny} dy &= e^{-n} \int_0^\infty \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} y^{n-m+i} e^{-ny} dy = \\ &= e^{-n} \sum_{m=0}^n \frac{n! (n-m+i)!}{m! (n-m)! n^{n-m+i+1}}. \end{aligned}$$

В результате получаем представление

$$J_1 = \sum_{i=0}^\infty t^i f_+^{(i)}(t) \nu_{n,i}, \quad \nu_{n,i} = \frac{e^{-n}}{i!} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m+i)!}{m! (n-m)!} n^{m-i}.$$

Далее,

$$J_2 = \int_0^1 w_n(x) f(tx) dx = \sum_{i=0}^\infty \frac{t^i f_-^{(i)}(t)}{i!} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 x^n (x-1)^i e^{-nx} dx.$$

Записывая последний интеграл в виде

$$\int_0^1 x^n (x-1)^i e^{-nx} dx = \left(\int_0^\infty - \int_1^\infty \right) x^n (x-1)^i e^{-nx} dx,$$

и используя предыдущие рассуждения и им подобные, получим

$$J_2 = \sum_{i=0}^\infty t^i f_-^{(i)}(t) (\eta_{n,i} - \nu_{n,i}), \quad \eta_{n,i} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^i (-1)^{i-m} \frac{(n+m)!}{m! (i-m)!} n^{-m}.$$

В итоге приходим к разложению

$$\begin{aligned} W_n(f, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} t^i f_+^{(i)}(t) \nu_{n,i} + \sum_{i=0}^{\infty} t^i f_-^{(i)}(t) (\eta_{n,i} - \nu_{n,i}) = \\ &= f_-(t) + \sum_{i=0}^{\infty} t^i (f_+^{(i)}(t) - f_-^{(i)}(t)) \nu_{n,i} + \sum_{i=1}^{\infty} t^i f_-^{(i)}(t) \eta_{n,i}. \quad (10) \end{aligned}$$

Изучим поведение первых коэффициентов $\nu_{n,i}, \eta_{n,i}$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно,

$$\nu_{n,0} = e^{-n} \sum_{m=0}^n \frac{n^m}{m!}.$$

Запишем разложение функции e^x в точке $x = n$ в ряд по степеням x с остаточным членом в интегральной форме:

$$e^n = \sum_{m=0}^n \frac{n^m}{m!} + R_n, \quad R_n = \frac{1}{n!} \int_0^n e^t (n-t)^n dt.$$

Замена переменной $t = nx$ приводит к представлению

$$R_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 \exp(nS(x)) dx,$$

где $S(x) = x + \ln(1-x)$. Функция $S(x)$ на отрезке $(0, 1)$ убывает, причем $S(0) = S'(0) = 0$, и при малых x имеем $S(x) \approx -x^2/2$. Применим к этому интегралу метод Лапласа при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(nS(x)) dx &\approx \int_0^1 \exp(-nx^2/2) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-y^2/2) dy \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nu_{n,0} = 1 - R_n e^{-n} \approx 1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} e^{-n} \approx \frac{1}{2}.$$

Заметим, что в силу формулы Стирлинга для факториала величина $\nu_{n,0} - 1/2$ представима рядом по степеням $1/\sqrt{n}$.

Далее,

$$\begin{aligned}\nu_{n,1} &= e^{-n} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m+1)!}{m!(n-m)!} n^{m-1} = \\ &= e^{-n} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \frac{n^m}{m!} + \frac{n^n}{n!} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Из определения чисел $\eta_{n,i}$ находим $\eta_{n,0} = 1$ и $\eta_{n,1} = 1/n$. В итоге приходим к приближенному равенству

$$\begin{aligned}W_n(f, t) &\approx f_+(t)\nu_{n,0} + tf'_+(t)\nu_{n,1} + f_-(t)(\eta_{n,0} - \nu_{n,0}) + \\ &+ tf'_-(t)(\eta_{n,1} - \nu_{n,1}) \approx \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) + \\ &+ tf'_+(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{1}{2n} \right) + tf'_-(t) \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).\end{aligned}$$

Следовательно, применим ранее описанный способ ускорения сходимости с помощью построения линейной комбинации нескольких приближений, найденных методом Виддера.

Возможен и другой способ определения характеристик оригинала в точке разрыва на основе разложения (10).

Пусть вычислены $W_{n_j}(f, t)$ для $n_j = n_0 d_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Запишем для них k разложений вида (10) и поставим задачу определения из них величины $f_-(t)$. С этой целью найдем числа c_{kj} , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k c_{kj} &= 1, & \sum_{j=1}^k c_{kj} \nu_{n_j,0} &= 0, & \sum_{j=1}^k c_{kj} \eta_{n_j,1} &= 0, \\ \sum_{j=1}^k c_{kj} \nu_{n_j,1} &= 0, & \sum_{j=1}^k c_{kj} \eta_{n_j,2} &= 0, & \sum_{j=1}^k c_{kj} \nu_{n_j,2} &= 0\end{aligned} \tag{11}$$

и так далее до тех пор, пока не запишем ровно k уравнений. Затем, как и ранее, составляем линейную комбинацию $\sum_{j=1}^k c_{kj} W_{n_j}(f, t)$, которая с высокой точностью приближает искомую величину $f_-(t)$.

Для вычисления величины скачка $f_+(t) - f_-(t)$ числа c_{kj} находятся из системы уравнений (1), все правые части которой равны нулю, за исключением единицы во втором уравнении.

Если поставить единицу лишь в правой части третьего уравнения, то определим величину $t(f'_+(t) - f'_-(t))$ и так далее.

§ 2. Вычисление скачков оригинала с помощью КФНСТ

Будем считать что оригинал $f(t)$ ограничен на полуоси $t \geq 0$ и его изображение $F(p)$ вместе с функцией $\varphi(p) = pF(p)$ регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Для приближенного обращения преобразования Лапласа применим квадратурную формулу наивысшей степени точности (КФНСТ)

$$f(t) \approx f_n(t) \equiv \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k/t), \quad t > 0. \quad (12)$$

Узлы и коэффициенты КФНСТ для $n \leq 15$ можно найти в [24] (или вычислить для любого n , см. гл. 2).

Напомним, что формула (12) точна для всех многочленов от t степени не выше $2n - 1$, что равносильно системе

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-j} = 1/j!, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (13)$$

Предположим, что оригинал имеет в точке t конечный разрыв и удовлетворяет условиям (8). Преобразуем правую часть (12):

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{A_k p_k}{t} \exp\left(-\frac{p_k}{t}x\right) f(x) dx = \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^n A_k p_k e^{-p_k x} f(tx) dx = \int_0^\infty \delta_n(x) f(tx) dx, \quad (14) \\ \delta_n(x) &= \sum_{k=1}^n A_k p_k \exp(-p_k x). \end{aligned}$$

Ядро $\delta_n(x)$ дельтаобразно и вещественно. Очевидно,

$$\int_0^\infty \delta_n(x) x^m dx = m! \sum_{k=1}^n A_k p_k, \quad m = 0, 1, \dots \quad (15)$$

При $m \leq 2n - 1$ величины (14) равны единицы в силу равенств (13). С другой стороны, при $1 \leq j \leq 2n - 1$ имеем

$$\int_0^\infty \delta_n(x) (x - 1)^j dx = \sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} \binom{j}{m} \int_0^\infty \delta_n(x) x^m dx = 0. \quad (16)$$

Условия (15), (16) означают, что основная информация о $\delta_n(x)$ сосредоточена в некоторой окрестности точки $x = 1$. Представим промежуток интегрирования в (14) в виде объединения $[0, 1] \cup [1, \infty)$ и рассмотрим отдельно интегралы по ним:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \delta_n(x) f(tx) dx &= \sum_{j=0}^\infty \frac{t^j f_+^{(j)}(t)}{j!} \sum_{k=1}^n A_k p_k \int_1^\infty e^{-p_k x} (x-1)^j dx = \\ &= \sum_{j=0}^\infty t^j f_+^{(j)}(t) \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-j} e^{-p_k}. \end{aligned}$$

Положим

$$\mu_{nj} = \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-j} \exp(-p_k), \quad j = 0, 1, \dots$$

Далее, имеем

$$\int_0^1 \delta_n(x) f(tx) dx = \sum_{j=0}^\infty \frac{t^j f_-^{(j)}(t)}{j!} \sum_{k=1}^n A_k p_k \int_0^1 e^{-p_k x} (x-1)^j dx. \quad (17)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-p_k x} (x-1)^j dx &= \int_0^\infty e^{-p_k x} \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (-1)^{j-m} x^m dx - \\ &- \int_1^\infty e^{-p_k x} (x-1)^j dx = \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (-1)^{j-m} \frac{m!}{p_k^{m+1}} - e^{-p_k} \frac{j!}{p_k^{j+1}} = \\ &= \frac{j!}{p_k} \left[\sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} \frac{p_k^{-m}}{(j-m)!} - p_k^{-j} e^{-p_k} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим величину в квадратных скобках a_{kj} . Очевидно,

$$a_{k0} = 1 - e^{-p_k}, \quad \sum_{k=1}^n A_k a_{k0} = 1 - \mu_{n0}.$$

Теперь правую часть формулы (16) можно представить как

$$(1 - \mu_{n_0 0}) f_-(t) + \sum_{j=1}^\infty t^j f_-^{(j)}(t) \sum_{k=1}^n A_k a_{kj}.$$

При $j \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n A_k a_{kj} &= \sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} \frac{1}{(j-m)!} \sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} - \mu_{nj} = \\ &= \sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} \left[\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} - \frac{1}{m!} \right] - \mu_{nj}.\end{aligned}$$

Числа в квадратных скобках при $m \leq 2n-1$ в силу (13) равны нулю, и потому при $1 \leq j \leq 2n-1$ получаем $\sum_{k=1}^n A_k a_{kj} = -\mu_{nj}$. В результате величина (17) представляется в виде

$$\begin{aligned}\int_0^1 \delta_n(x) f(tx) dx &= f_-(t) - \sum_{j=0}^{\infty} t^j f_-^{(j)}(t) \mu_{nj} + \\ &+ \sum_{j=2n}^{\infty} t^j f_-^{(j)}(t) \sum_{m=2n}^j (-1)^{j-m} \frac{1}{(j-m)!} \left(\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} - \frac{1}{m!} \right),\end{aligned}$$

и окончательно приближенное решение можно представить рядом

$$\begin{aligned}f_n(t) &= f_-(t) + \sum_{j=0}^{\infty} t^j (f_+^{(j)}(t) - f_-^{(j)}(t)) \mu_{nj} + \\ &+ \sum_{j=2n}^{\infty} t^j f_-^{(j)}(t) \sum_{m=2n}^j (-1)^{j-m} \frac{1}{(j-m)!} \left(\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-m} - \frac{1}{m!} \right). \quad (18)\end{aligned}$$

Числа μ_{nj} для достаточно больших значений n с ростом j быстро убывают (см. гл. 3), как и последний сомножитель во второй сумме разложения (18), что означает ослабление влияния скачков оригинала и его производных на величину приближенного решения.

Рассмотрим функцию $\Delta_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^n A_k \exp(-p_k x)$. Очевидно, $\Delta'_n(x) = \delta_n(x)$, $\Delta_n(+0) = 0$, $\Delta_n(1) = 1 - \mu_{n0}$. Эта функция приближает функцию Хевисайда, равную нулю на $0 < t < 1$ и единице при $t > 1$, т.е. имеющей скачок в точке $t = 1$. Изображение функции Хевисайда равно $F(p) = e^{-p}/p$, а приближение, построенное по нему по формуле (13), равно $f_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(-p_k/t)$. Функция $f_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ будет стремиться к оригиналу (функции Хевисайда) во всех точках непрерывности, т.е. при любом $t \neq 1$. Вычисления показывают, что при $t = 1$ значения $f_n(1)$ с ростом n

приближаются к 0.5, т.е. $\mu_{n0} \rightarrow 0.5$. Связь функций $\Delta_n(t)$ и $f_n(t)$ очевидна.

Высказанные соображения приводят к следующему алгоритму приближенного нахождения величин скачков оригинала и его производных: пусть нам известны значения $f_n(t)$ для нескольких номеров n , например, для n_1, n_2, n_3, n_4 . Отбрасывая последнее слагаемое в (18), запишем и решим систему уравнений

$$f_-(t) + (f_+(t) - f_-(t))\mu_{n_j0} + (f'_+(t) - f'_-(t))t\mu_{n_j1} + \\ + (f''_+(t) - f''_-(t))t^2\mu_{n_j2} = f_{n_j}(t), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

относительно неизвестных $f_-(t)$, $f_+(t) - f_-(t)$, $f'_+(t) - f'_-(t)$, $f''_+(t) - f''_-(t)$.

Остановимся на способе нахождения точки скачка оригинала. Пусть, например, известны значения $f_n(t)$ для номеров n_1, n_2, n_3 . По аналогии с предыдущим запишем систему

$$f_-(t) + (f_+(t) - f_-(t))\mu_{n_j0} = f_{n_j}(t), \quad j = 1, 2, 3,$$

из которой получаем уравнение для нахождения точки t скачка оригинала:

$$\frac{f_{n_3}(t) - f_{n_1}(t)}{\mu_{n_30} - \mu_{n_10}} = \frac{f_{n_2}(t) - f_{n_1}(t)}{\mu_{n_20} - \mu_{n_10}}. \quad (19)$$

Легко проверить, что в это уравнение не входят значения оригинала и его производных. Как и в случае метода Виддера, у этого уравнения могут быть посторонние корни. С целью их устранения запишем другие уравнения вида (19), построенное для других троек номеров, и выберем их близкие общие решения.

Замечание 3. В работах Т. А. Матвеевой изучалась возможность определения скачков оригинала в случае двух точек разрыва.

§ 3. Формула обращения, основанная на одной теореме Виддера

1⁰. Известна следующая

Теорема 3 ([72], с. 385). Пусть $f(t) \in L(0, \infty)$ и ее преобразование Лапласа равно

$$F(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt.$$

Тогда для почти всех положительных значений t имеет место формула обращения

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!(n-2)!} \int_0^\infty e^{-pt} p^{2n-1} F^{(n)}(p) dp. \quad (20)$$

Наша цель состоит в построении приближенного метода обращения преобразования Лапласа на основе этой теоремы.

Положим

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!(n-2)!} \int_0^\infty e^{-pt} p^{2n-1} F^{(n)}(p) dp. \quad (21)$$

Дифференцируя n раз изображение и подставляя результат под знак интеграла в (21), приходим к представлению

$$f_n(t) = \int_0^\infty \delta_n(x) f(tx) dx, \quad (22)$$

где

$$\delta_n(x) = \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!} \frac{x^n}{(1+x)^{2n}}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\int_0^\infty \delta_n(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Изучим свойства ядра $\delta_n(x)$ и характер сходимости $f_n(t)$ к оригиналу.

2⁰. Пусть $f(x) = x^m$, $m = 0, 1, \dots$. Из (22), используя формулу

$$\int_0^\infty x^r / (1+x)^s dx = \Gamma(r) \Gamma(s-r) / \Gamma(s),$$

получим $f_n(x) = \lambda_{nm} x^m$, где $\lambda_{nm} = (n+m)!(n-m-2)! / (n!(n-2)!)$. Для фиксированного значения m при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула $\lambda_{nm} = 1 + O(1/n)$. Отсюда вытекает, что в общем случае $f_n(t)$ сходится к $f(t)$ не быстрее, чем $1/n$. Если существуют значения $f(+0)$, $f(+\infty)$, то при $n \rightarrow \infty$ $f_n(+0)$, $f_n(+\infty)$ сходятся к ним, что вытекает из свойств ядра и представления (22).

Пусть $f(t) \in C^1(0, \infty)$ и производная $f'(t)$ равномерно ограничена на полуоси: $|f'(t)| \leq M_1$. В таком случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= \left| \int_0^\infty \delta_n(x) |f(tx) - f(t)| dx \right| \leq \\ &\leq M_1 t \int_0^\infty \delta_n(x) |x - 1| dx \leq M_1 t \left(\int_0^\infty \delta_n(x) (x - 1)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= M_1 t |\lambda_{n2} - 2\lambda_{n1} + 1|^{1/2} = M_1 t ((2n + 14)/((n - 3)(n - 2)))^{1/2}. \end{aligned}$$

Если $f(t) \in C^2(0, \infty)$, $|f^{(i)}(t)| \leq M_i$, $i = 1, 2$, то

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= \left| \int_0^\infty \delta_n(x) \left(t f'(t)(x - 1) + \frac{t^2}{2} f''(\xi)(x - 1)^2 \right) dx \right| \leq \\ &\leq M_1 t |\lambda_{n1} - 1| + \frac{M_2}{2} t^2 |\lambda_{n2} - 2\lambda_{n1}| = O(1/n). \end{aligned}$$

Дальнейшее увеличение гладкости оригинала не увеличивает, вообще говоря, скорости убывания погрешности.

3⁰. Перейдем к изучению свойств ядра $\delta_n(x)$. Оно проводится совершенно аналогично исследованию метода Виддера в § 1 п. 2⁰, куда мы и отправляем читателя за некоторыми подробностями: возьмем малое положительное число δ , разобьем область интегрирования в (22) на четыре участка $[0, 1 - \delta]$, $[1 - \delta, 1]$, $[1, 1 + \delta]$, $[1 + \delta, \infty)$ и будем оценивать интегралы на каждом из них. Как и выше, получаем оценки

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^{1-\delta} \delta_n(x) f(tx) dx \right| \leq C_1 \sqrt{n} q_1^n, \\ |I_4| &= \left| \int_{1+\delta}^\infty \delta_n(x) f(tx) dx \right| \leq C_1 \sqrt{n} q_2^n, \quad C_1, C_2 > 0, \quad 0 < q_1, q_2 < 1. \end{aligned}$$

Для оценки двух оставшихся интегралов рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{x^n}{(1+x)^{2n}} = \left(\exp \left(\ln \frac{x}{(1+x)^2} \right) \right)^n,$$

затем напишем разложение в ряд функции $\ln(x/(1+x)^2)$ в точке $x = 1$ и подставим его под знак экспоненты и т. д., и в итоге придем

к асимптотическому разложению

$$f_n(t) \sim \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n\pi}} + \frac{b}{n} + \dots \right) f_+(t) + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n\pi}} + \frac{b}{n} + \dots \right) f_-(t) + \dots \right].$$

Следовательно, в общем случае $f_n(t)$ стремится к $(f_+(t) + f_-(t))/2$ со скоростью $1/\sqrt{n}$. В случае непрерывности оригинала в точке t скорость возрастает до $1/n$ (ряд для $f_n(t)$ содержит степени $1/n$). Эта информация позволяет, как и ранее, строить линейные методы ускорения сходимости, на чем мы не будем останавливаться.

4⁰. Рассмотрим функцию

$$g_n(t) = f_n(t) \frac{n!(n-2)!}{(2n-1)!} 4^n \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Её асимптотика такова:

$$g_n(t) \sim f_+(t) + f_-(t) + \frac{2}{\sqrt{n\pi}}(f_+(t) - f_-(t)) + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n\sqrt{n}} + \dots,$$

где b_i — не зависящие от n величины. Пусть известны значения $g_{n_1}(t), \dots, g_{n_m}(t)$. Положим $d_j = n_j/n_1$ и составим линейную комбинацию

$$\sum_{j=1}^m c_j g_{n_j}(t) = (f_+(t) + f_-(t)) \sum_{j=1}^m c_j + \frac{2}{\sqrt{n_1\pi}}(f_+(t) - f_-(t)) \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\sqrt{d_j}} + \dots$$

Коэффициенты c_j определим из системы

$$\begin{aligned} c_1 + \dots + c_m &= 0, & c_1/\sqrt{d_1} + \dots + c_m/\sqrt{d_m} &= \frac{\sqrt{n_1\pi}}{2}, \\ c_1/d_1 + \dots + c_m/d_m &= 0, \dots, & c_1/d_1^{(m-1)/2} + \dots + c_m/d_m^{(m-1)/2} &= 0. \end{aligned}$$

Она разрешима, если числа d_j попарно различны, и будет справедливо утверждение

$$\sum_{j=1}^m c_j g_{n_j}(t) - (f_+(t) + f_-(t)) = O(n_1^{-m/2}).$$

5⁰. Вхождение в формулу (21) производной изображения ограничивает возможности ее применения. Однако интегрированием по частям она может быть представлена иначе:

$$f_n(t) = \int_0^\infty e^{-pt} P_{2n-1}(pt) F(p) dp,$$

где

$$P_{2n-1}(p) = \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)!}{n!(n-2)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-p)^{2n-j-1}}{(2n-j-1)!}.$$

Нетрудно проверить, что этот многочлен выражается через многочлены Лагерра общего вида

$$L_n(x; \alpha) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!} \quad (23)$$

простой формулой:

$$P_{2n-1}(p) = \frac{p^{n-1}}{(n-2)!} L_n(p; n-1).$$

В результате этих преобразований утверждение теоремы запишется в виде $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$,

$$f_n(t) = \frac{1}{t(n-2)!} \int_0^\infty e^{-p} p^{n-1} L_n(p; n-1) F(p/t) dp.$$

Для приближенного вычисления последнего интеграла применим квадратурную формулу типа Гаусса с весом e^{-p} вида

$$\int_0^\infty e^{-p} \psi(p) dp \approx \sum_{k=1}^m A_k \psi(p_k), \quad (24)$$

точную для всех многочленов степени не выше $2m-1$.

Такой метод обращения преобразования Лапласа, пригодный и для определения величин скачков оригинала в точках разрыва первого рода, был предложен и исследован в работе [46]. Скорость его сходимости невелика, однако ее можно увеличить, построив линейные комбинации $f_n(t)$, вычисленные для различных n [46]. Однако для этого могут потребоваться формулы (24) с большим числом

узлов m (например, несколько сотен). Покажем, как их можно эффективно построить.

Узлы формулы (24) совпадают с корнями многочленов Лагерра (23) при $\alpha = 0$ ($L_m(x) = L_m(x; 0)$), т. е.

$$L_m(p_k) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Будем находить корни уравнения (25) методом Ньютона:

$$p_k^{j+1} = p_k^j - L_m(p_k^j)/L'_m(p_k^j), \quad j = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Начальные приближения ко всем корням многочленов $L_m(x)$, для которых метод (26) сходится, берем из приближенных равенств [69] (нам нужен лишь случай $\alpha = 0$)

$$\begin{aligned} p_1 &\approx \frac{(1 + \alpha)(3 + 0.92\alpha)}{1 + 2.4m + 1.8\alpha}, \\ p_2 - p_1 &\approx \frac{15 + 6.25\alpha}{1 + 0.9\alpha + 2.5m}, \\ \frac{p_{k+2} - p_{k+1}}{p_{k+1} - p_k} &\approx \frac{1}{1 + 0.3\alpha} \left(\frac{1 + 2.55k}{1.9k} + \frac{1.26k\alpha}{1 + 3.5k} \right), \quad k = \overline{1, m-2}. \end{aligned}$$

После нахождения с требуемой точностью всех узлов вычисляем коэффициенты формулы (13):

$$A_k = \frac{p_k}{(L'_m(p_k))^2}, \quad k = \overline{1, m}.$$

При вычислениях многочленов Лагерра следует использовать рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n+1}(x; \alpha) &= (\alpha + 2n + 1 - x)L_n(x; \alpha) - (\alpha + n)L_{n-1}(x; \alpha), \\ n &= 1, 2, \dots, \quad L_0(x; \alpha) = 1, \quad L_1(x; \alpha) = 1 + \alpha - x, \end{aligned}$$

а значения их производных исключать с помощью соотношения

$$xL'_n(x; \alpha) = nL_n(x; \alpha) - (\alpha + n)L_{n-1}(x; \alpha).$$

Пример 4. Дано изображение $F(p) = 168/(p+2)^5 - 8640/(p+3)^7$.

Были вычислены значения $f_n(t)$ для значений $n = 27, 30, 33, 36$ по формуле (24) при $m = 40$ и построена их стандартная линейная комбинация в целях ускорения сходимости. В табл. 6 представлены:

в первом столбце значения $f_{36}(t)$, во втором — результат ускорения, в третьем — точные значения оригинала.

Таблица 6

| t | I | II | III |
|-----|--------|--------|--------|
| 0.5 | 0.1472 | 0.1187 | 0.1191 |
| 1.0 | 0.3109 | 0.3515 | 0.3499 |
| 1.5 | 0.2356 | 0.2430 | 0.2459 |
| 2.0 | 0.2101 | 0.1480 | 0.1477 |
| 2.5 | 0.2506 | 0.2264 | 0.2220 |
| 3.0 | 0.2792 | 0.3262 | 0.3259 |
| 4.0 | 0.2290 | 0.2964 | 0.2991 |
| 5.0 | 0.1328 | 0.1431 | 0.1412 |

Пример 5. Для восстановления скачка функции Хевисайда были вычислены значения $f_{200}(1)$, $f_{300}(1)$, $f_{400}(1)$, а затем построена их линейная комбинация, описанная в п. 4⁰, доставившая результат $f_+(1) - f_-(1) \approx 1.0002$.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЛИНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ

1⁰. В этой главе исследуется метод вычисления интеграла Римана—Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} F(z) dz, \quad c > 0, \quad (1)$$

задающего обращение преобразования Лапласа, с помощью замены линии интегрирования и последующего применения квадратурной формулы трапеций, а также получены априорные оценки погрешности такого метода в зависимости от выбора контура интегрирования и области регулярности изображения. Для простоты будем считать, что все особые точки изображения расположены в левой полуплоскости, чего можно добиться умножением оригинала на соответствующую экспоненту.

Напомним, что интеграл (1) понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t .

Положим в формуле обращения (1) $z = c + i\tau$, тогда $\exp(zt) = \exp(ct) \exp(i\tau t)$. При фиксированном t первый сомножитель постоянен, а второй пробегает единичную окружность на комплексной плоскости бесконечное число раз. С ростом t первый сомножитель и скорость пробегания окружности вторым сомножителем неограниченно возрастают, так что попытка приблизить интеграл в (1) римановыми суммами вряд ли приведет к цели.

С целью уменьшения осцилляций сомножителя $\exp(i\tau t)$ и ограничения скорости роста сомножителя $\exp(ct)$ заменим линию интегрирования в (1) эквивалентным контуром L , начинающимся и заканчивающимся в левой полуплоскости так, что $\operatorname{Re}(z) \rightarrow -\infty$ на обоих его концах. Такая замена возможна, если выполнены два условия:

- 1) внутри контура L содержатся все особенности изображения $F(z)$;
- 2) $|F(z)| \rightarrow 0$ равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) \leq \gamma_0$ при $|z| \rightarrow \infty$ (γ_0 — абсцисса сходимости интеграла (1)).

Эти условия заведомо выполнены, если изображение удовлетворяет следующей лемме.

Лемма Жордана ([25]). *Если на некоторой последовательности дуг окружностей C_{R_n} :*

$$|z| = R_n, \quad \operatorname{Re} z < a \quad (R_n \rightarrow \infty, \quad a \text{ фиксировано}),$$

функция $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$, то для любого положительного t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} F(z) e^{zt} dz = 0.$$

Далее всюду предполагается, что эти условия выполняются.

В работе [70] был предложен контур

$$L = \left\{ z \mid z = \frac{2\pi ui}{1 - \exp(-2\pi ui)}, \quad u \in [-1, 1] \right\}.$$

Он состоит из двух симметричных относительно вещественной оси плоскости z ветвей, исходящих из точки $z(0) = 1$ налево и при $u \rightarrow \pm 1$ стремящихся к асимптотам $z = \pm \pi i$.

Так как кривая L содержит внутри себя особые точки изображения и выполнены условия леммы Жордана [25], то

$$f(t) = \int_{-1}^1 \exp(z(u)t) F(z(u)) z'(u) du.$$

Для приближенного вычисления этого интеграла в статье [70] применяется формула трапеций. Заметим, что при малых u с ростом t сомножитель $\exp(z(u)t)$ неограниченно растет. Однако это затруднение легко преодолевается предварительной заменой переменной вида $z_1 = zt$ в интеграле (1), в результате чего экспоненциальный сомножитель становится ограниченным и при $u \rightarrow \pm 1$ быстро стремится к нулю.

В статье [49] предлагается в представлении

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_L e^z F(z/t) dz, \quad t > 0, \quad (2)$$

использовать контур

$$L = \{z \mid z = l(u), u \in (-\infty, +\infty)\}, \quad l(u) = 2 - \operatorname{ch}(u) + i\mu \operatorname{th}(u).$$

Этот контур состоит из двух симметричных относительно вещественной оси плоскости z ветвей, исходящих из точки $z(0) = 1$ направо и при $u \rightarrow \pm\infty$ стремящихся к асимптотам $z = \pm i\mu$ (μ — параметр контура).

В результате формула (2) принимает вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(u) du, \quad (3)$$

где

$$G_t(u) = \frac{1}{2\pi it} \exp(l(u)) l'(u) F(l(u)/t). \quad (4)$$

Функция (4) не имеет особенностей как на линии интегрирования, так и в некоторой “полосе”, содержащей внутри себя линию интегрирования. Как показано в работе [52], формула трапеций для вычислений интеграла (3) может давать хорошую точность, при этом скорость сходимости зависит от ширины полосы и шага численного интегрирования [52]. К сожалению, приведенные выше две линии интегрирования оказываются неудачными — для них полоса имеет переменную ширину регулярности интегрируемой функции и даже стремится к нулю при неограниченном возрастании модуля переменной интегрирования.

Пусть $w = u + iv$, $u, v \in R$, функция $g(w)$ регулярна в полосе $-d \leq v \leq c$ для некоторых $c > 0$, $d > 0$, и при $|w| \rightarrow \infty$ равномерно в этой полосе $g(w) \rightarrow 0$ с такой скоростью, что существуют интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u + ir)| du, \quad r \in [-d, c].$$

Для вычисления интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du$$

применим формулу трапеций как с бесконечным числом узлов:

$$T_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh),$$

так и с конечным числом $2N + 1$ узлов:

$$T_{h,N} = h \sum_{k=-N}^N g(kh).$$

Положим $DE = |I - T_h|$, $TE = |T_h - T_{h,N}|$.

Теорема. Пусть для некоторых положительных чисел M_+ , M_- справедливы неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u+ir)| du \leq M_-, \quad r \in [-d, 0], \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(u+is)| du \leq M_+, \quad s \in [0, c].$$

Тогда

$$|I - T_h| \leq DE_+ + DE_-,$$

где

$$DE_+ = \frac{M_+}{\exp(2\pi c/h) - 1}, \quad DE_- = \frac{M_-}{\exp(2\pi d/h) - 1}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy$ и функция $g(z)$ регулярна в полосе $-d \leq y \leq c$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{ci-\infty}^{ci+\infty} g(z) dz = \frac{1}{2} \int_C \rho(z) g(z) dz,$$

где C — контур, состоящий из прямых $(-ci - \infty, -ci + \infty)$, $(ci + \infty, ci - \infty)$ и $\rho(z) = -\text{sign } y$. По формуле Коши

$$g(kh) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z - nh} dz,$$

так что

$$T_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h}{z - kh} dz.$$

Известно, что

$$\begin{aligned} \text{ctg } z &= \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2 \pi^2} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1/(2z)}{z - k\pi} + \frac{1/(2z)}{z + k\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - k\pi}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi z/h - k\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h}{z - kh},$$

и поэтому

$$T_h = \frac{1}{2i} \int_C g(z) \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} dz,$$

а погрешность формулы трапеций равна

$$R_h = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx - T_h = \frac{1}{2} \int_C \left(\rho(z) + i \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} g(z) \right) dz.$$

Следовательно,

$$|R_h| \leq M(g) \max_C \left| \rho(z) + i \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} \right|,$$

где

$$M(g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|g(x+ic)| + |g(x-id)|) dx \leq \frac{1}{2} (M_+ + M_-),$$

$$M_+ = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+is)| dx, \quad s \in [0, c], \quad M_- = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+ir)| dx, \quad r \in [-d, 0].$$

На верхней границе контура $y = c$, $\rho(z) = -1$ и

$$\left| \rho(z) + i \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} \right| = \left| -1 + i \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} \right| = \left| \frac{\exp(\pi iz/h)}{\sin(\pi z/h)} \right|.$$

Но

$$\left| \sin \frac{\pi z}{h} \right| = \frac{|\exp(i\pi z/h) - \exp(-i\pi z/h)|}{2} \geq \frac{|\exp(-\pi c/h) - \exp(\pi c/h)|}{2},$$

и поэтому

$$\left| \rho(z) + i \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} \right| \leq \frac{2 \exp(-\pi c/h)}{\exp(\pi c/h) - \exp(-\pi c/h)} = \frac{2}{\exp(2\pi c/h) - 1}.$$

Аналогично получаем оценку на нижней прямой контура:

$$\left| \rho(z) + i \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{h} \right| \leq \frac{2}{\exp(2\pi d/h) - 1}. \quad \square$$

Замечание 1. Эта теорема без доказательства приведена в работе [71]. В случае $c = d$ доказательство приведено в статье [52].

Константы M_+ и M_- , входящие в оценки (5), не зависят от шага h численного интегрирования и значения N , и потому в дальнейшем ограничимся их качественным поведением с помощью соотношений

$$DE_+ = O(\exp(-2\pi c/h)), \quad DE_- = O(\exp(-2\pi d/h)), \quad h \rightarrow 0. \quad (6)$$

Для погрешности TE замены бесконечной суммы T_h метода трапеций суммой $T_{h,N}$, как и в работе [71], при постоянном h полагаем

$$TE = O(|g(hN)|), \quad N \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Далее для избранного контура интегрирования естественно исходить из равенства характеристик (6), (7) величин DE_+ , DE_- , TE , что приведет к некоторому способу выбора параметров контура и шага интегрирования в зависимости от N и возможности получения полной погрешности метода.

2⁰. Параболический контур. Рассмотрим кривую

$$z = \mu(iw + 1)^2, \quad w = u + iv, \quad \mu > 0. \quad (8)$$

При $v = 0$ получаем параболу

$$z(u) = \mu(1 - u^2) + 2i\mu u. \quad (9)$$

Возьмем ее в качестве линии интегрирования, тогда формула обращения (интеграл Римана—Меллина) примет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(z(u)t) F(z(u)) z'(u) du. \quad (10)$$

Прямые $w = u - id$, $d > 0$, и $w = u + ic$, $0 < c < 1$, при отображении (8) переходят, соответственно, в параболы

$$z(u) = \mu((1+d)^2 - u^2) + 2i\mu u(1+d), \quad z(u) = \mu((1-c)^2 - u^2) + 2i\mu u(1-c),$$

первая из которых расположена правее линии интегрирования (9), а вторая — левее (и при $c = 1$ она вырождается в отрицательную полуось $u \leq 0$).

На рис. 7 изображены образы прямых $w = u + iv$ при отображении (8) для $v = 0.5$ — левая парабола, $v = 0$ — средняя парабола и $v = -0.3$ — правая парабола ($\mu = 1$). Следовательно, для того чтобы подынтегральная функция в (10) была регулярна в полосе $-0.3 \leq v \leq 0.5$, необходима регулярность изображения $F(z)$ в области, расположенной между крайними параболой.

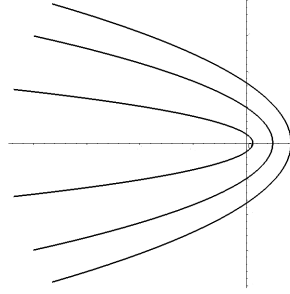


Рис. 7: Параболические контуры

Предположим, что все особые точки изображения расположены в конечной части полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, и не все они вещественны. Очевидно, при некотором μ все они попадут внутрь параболы (9), и тем более внутрь параболы $z(u) = \mu((1+d)^2 - u^2) + 2i\mu u(1+d)$ при любом $d > 0$. С ростом d знаменатель дроби в формуле (6) для DE_- растёт, но и числитель M_- тоже возрастает. В работе [71] показано, что существует оптимальное значение параметра d , при котором достигается наилучшая оценка

$$DE_- = O(\exp(-\pi^2/(\mu th)^2 + 2\pi/h)), \quad h \rightarrow 0.$$

Там же рассмотрен случай, когда все особые точки изображения расположены на полуоси $u \leq 0$. Следовательно, наилучшее значение параметра c , при котором полоса регулярности подынтегральной функции в (10) будет самой широкой, равно единице. В нашем предположении ветви параболы не смыкаются, и наибольшее допустимое значение c удовлетворяет неравенству $0 < c < 1$.

Потребуем совпадения характеристик величин DE_+ , DE_- , TE :

$$O(|\exp(z(u_N)t)|) = O(\exp(\mu t(1 - u_N^2))) = O(\exp(\mu t(1 - (hN)^2))), \\ N \rightarrow \infty.$$

Приравнивание показателей величин DE_- , DE_+ , TE приводит к соотношению

$$-\frac{2\pi}{h}c = -\frac{\pi^2}{\mu th^2} + \frac{2\pi}{h} = \mu t(1 - (hN)^2),$$

из которого находим

$$h = \frac{\sqrt{(1 + 4c(c + 1))}}{N}, \quad \mu = \frac{\pi}{2(c + 1)th} = \frac{\pi}{2(c + 1)\sqrt{1 + 4c(c + 1)}} \frac{N}{t}. \quad (11)$$

Напомним, что число c здесь не произвольно. Например, в случае $f(t) = \sin(\omega t)$ изображение $F(z) = \omega/(z^2 + \omega^2)$ имеет особые точки $\pm i\omega$, которые должны лежать между точками пересечения параболы $z(u) = \mu((1 - c)^2 - u^2) + 2i\mu u(1 - c)$ с мнимой осью, т. е. должно выполняться неравенство $2\mu(1 - c)^2 > |\omega|$ или равносильное ему неравенство

$$N > \frac{|\omega|t(c + 1)\sqrt{1 + 4c(c + 1)}}{\pi(1 - c)^2}. \quad (12)$$

Погрешность метода в таком случае есть величина

$$O\left(\exp\left(-\frac{2\pi}{h}c\right)\right) = O\left(\exp\left(-\frac{2\pi c}{\sqrt{1 + 4c(c + 1)}}N\right)\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Замечание 2. Из оценки (13) при $c = 1$ получается результат статьи [71].

Замечание 3. Зависимость подынтегральной функции от t в формуле (10) в соответствии с выражением для μ в (11) целиком сосредоточена в изображении $F(z)$, и фактически означает указанную выше замену переменной вида $z_1 = zt$, приводящую интеграл (10) к форме (2). Напомним, что экспоненциальный сомножитель в (10) начинает убывать, как только мы попадаем на участки линии интегрирования (9), расположенные в левой полуплоскости, что значительно снижает осцилляции подынтегральной функции в (10). В то же время следует помнить, что на оставшейся части контура он может быть достаточно велик, что потребует обеспечения соответствующей точности проведения вычислений.

Замечание 4. Разумеется, в оценке (12) можно устремить c к единице в надежде получить более точный результат, но при этом

резко возрастет допустимая нижняя граница числа N в соответствии с неравенством (12), что приведет как к возрастанию объема вычислений, так и к необходимости увеличения точности вычислений.

Замечание 5. В работе [61] для обращения преобразования Лапласа с особенностями на отрицательной полуоси (в частности, при наличии в начале координат точки ветвления) по существу предлагается замена вертикальной линии интегрирования на предельную параболу $z(u) = \mu((1-c)^2 - u^2) + 2i\mu u(1-c)$ при $c = 1$, что соответствует наихудшему выбору “ширины” полосы регулярности интегрируемой функции. Правда, в [61] в результате исходный комплексный интеграл сводится к интегралу по вещественной полуоси от вещественной функции, о приближенном вычислении которого речи вовсе не идет.

3⁰. Гиперболический контур. Рассмотрим кривую

$$z = \mu(1 + \sin(iw - \alpha)), \quad w = u + iv, \quad (14)$$

определяемую вещественными параметрами μ, α ($\mu > 0$, $0 < \alpha < \pi/2$).

Прямые $w = u + ic$ при отображении (14) переходят в гиперболы

$$\left(\frac{x - \mu}{\sin(\alpha + c)} \right)^2 - \left(\frac{y}{\cos(\alpha + c)} \right)^2 = \mu^2, \quad z = x + iy. \quad (15)$$

В качестве линии интегрирования возьмем левую ветвь гиперболы, получающейся из (15) при $c = 0$. При возрастании c ветви гиперболы сближаются, и при $c = \pi/2 - \alpha$ она переходит в отрицательную полуось. При убывании c гипербола расширяется и при $c = -\alpha$ она переходит в вертикальную прямую. В работе [71], как и для параболы, рассмотрен случай принадлежности всех особых точек изображения отрицательной полуоси. В такой ситуации наибольшая ширина полосы регулярности подынтегральной функции в (10) достигается, если границам этой полосы соответствуют крайние гиперболы при $c = \pi/2 - \alpha$ (отрицательная полуось) и $c = -\alpha$ (вертикальная прямая) (см. [71]).

При наличии не вещественных особых точек границам полосы аналитичности соответствуют две гиперболы: одна при некотором $c \in (0, \pi/2 - \alpha)$ и другая при $c = -\alpha$ (вертикальная прямая). Повторяя рассуждения работы [71], в этом случае придем к следующим

асимптотическим выражениям ошибок:

$$DE_+ = O(\exp(-2\pi c/h)), \quad DE_- = O(\exp(\mu t - 2\pi\alpha/h)), \quad h \rightarrow 0.$$

$$TE = O(\exp(\mu t(1 - \sin(\alpha) \operatorname{ch}(hN)))), \quad N \rightarrow \infty.$$

Приравняем порядки этих величин:

$$-2\pi c/h = \mu t - 2\pi\alpha/h = \mu t(1 - \sin(\alpha) \operatorname{ch}(hN)).$$

Отсюда получаем

$$h = \frac{A(\alpha)}{N}, \quad \mu = \frac{N}{t} \frac{2\pi(\alpha - c)}{A(\alpha)}, \quad A(\alpha) = \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\alpha}{(\alpha - c) \sin(\alpha)} \right). \quad (16)$$

Для существования $A(\alpha)$ и положительности μ необходимо и достаточно выполнения неравенства $c < \alpha$. Параметры α и c должны удовлетворять неравенству $0 < c < \min\{\alpha, \pi/2 - \alpha\}$. В частности, при $\alpha = \pi/4$ оно заведомо выполняется, так как при $c = \pi/4$ соответствующий контур превращается в отрицательную полуось.

Например, в случае $f(t) = \sin(\omega t)$ изображение $F(z) = \omega/(z^2 + \omega^2)$ имеет особые точки $\pm i\omega$, которые должны лежать между точками пересечения левой ветви гиперболы (15) с мнимой осью, т. е. должно выполняться неравенство $\mu \cos^2(\alpha + c)/\sin(\alpha + c) > |\omega|$ или равносильное ему неравенство

$$\frac{N}{t} \frac{2\pi(\alpha - c)}{A(\alpha)} \frac{\cos^2(\alpha + c)}{\sin(\alpha + c)} > |\omega|.$$

Очевидно, для любых допустимых значений α и c оно выполняется для достаточно больших N .

Итоговая погрешность метода характеризуется величиной

$$O(\exp(-2\pi c/h)) = O(\exp(-B(\alpha)N)), \quad B(\alpha) = 2\pi c/A(\alpha).$$

Пример. Дано изображение $F(z) = z/(z^2 + \omega^2)$ оригинала $f(t) = \cos(\omega t)$. Пусть $\omega = 2$, $t = 5$. Возьмем $c = 0.3$. Для параболического контура в соответствии с неравенством (12) получаем $N = 14$, и приближенное значение отличается от точного на $2 \cdot 10^{-7}$. Для гиперболического контура возьмем $c = 0.3$, $\alpha = 1$. Из равенств (16) находим наименьшее допустимое значение $N = 35$, и отличие приближенного значения от точного составляет $4 \cdot 10^{-9}$.

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1⁰. Введение. В § 1 гл. 4 были построены ОКФНСТ, приспособленные для решения задач линейной наследственности (вязкоупругости), для которых характерна длительность процессов деформации и их относительно малая скорость. В настоящее время вязкоупругие материалы применяются в различных отраслях техники. Отметим, что процесс создания элементов конструкций из них неотделим от процесса создания материала, из которого они изготавливаются. Поэтому, прежде всего, в силу дороговизны натурного эксперимента, важную роль играют математические модели названных процессов. Как было отмечено, важную роль играет выбор ядра ползучести или релаксации, ибо ядро должно априорно учитывать специфические особенности процесса деформации, например, искомая функция должна быть непрерывна, но её первая производная уже не принадлежит классу непрерывных функций, но обладает некоторой производной дробного порядка (например, таковой является интеграл от ядра Работнова). Фактически определяющее соотношение Больцмана—Вольтерра

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \beta \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right)$$

является уравнением с дробными производными [51]. В настоящее время тематика дробных производных заняла прочное место в описании различных прикладных задач, в том числе, и механики деформируемого твердого тела [68].

Изображения по Лапласу функции $\mathfrak{D}_\alpha(t)$ и интеграла от нее $\int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(\tau) d\tau$ равны, соответственно,

$$\frac{1}{p^a + 1}, \quad \frac{1}{p(p^a + 1)}, \quad a = 1 + \alpha.$$

Естественным обобщением дробно-экспоненциальных функций и ядер Гаврильяка—Негами [16] являются ядра, изображения которых имеют вид

$$N_{\alpha,\beta,\gamma}(A, p) = C[(p^{\alpha+1} + \beta)^\gamma + A]^{-1}. \quad (1)$$

В частных случаях отсюда получаем целую экспоненту ($\alpha = A = 0$, $\gamma = 1$), ядро Абеля ($\beta = A = 0$, $\gamma = 1$), ядро Работнова ($A = 0$, $\gamma = 1$), ядро Гаврильяка—Негами ($A = 0$).

Применение многопараметрических функций $N_{\alpha,\beta,\gamma}(A,p)$ позволяет существенно расширить область применения соответствующих им наследственных слабо сингулярных ядер за счет более точного описания с их помощью экспериментальных данных. Поскольку составление таблиц таких ядер, аналогичных таблицам дробно-экспоненциальных функций, нецелесообразно ввиду большого количества входных параметров, практическое использование этих ядер для аппроксимации экспериментальных данных и при решении краевых задач вязкоупругости возможно лишь при разработке достаточно точных и эффективных методов вычисления этих функций и определяемых ими искомых решений. Мы исходим из того, что ядра задаются их преобразованиями по Лапласу (это делается сравнительно просто, как показывают приведенные выше примеры), и что нам известны образы искомых оригиналов. На следующем шаге возникает задача обращения — определения искомого оригинала по его изображению. В данной главе рассматриваются методы обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ искомой функции-оригинала фактически зависит от p^a , где a — произвольное положительное число из интервала $(0,1)$ (в частности, изображение может иметь вид (1)). В случае $a = 1$ получаются известные методы [25], в противном случае получаем новые формулы, обладающие большей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение. Разумеется, для решения задачи обращения оригиналов рассматриваемого вида можно применять все ранее описанные методы, на чем подробнее мы останавливаться не будем.

2⁰. Деформация контура интегрирования. Изображение Лапласа функции $\mathcal{E}_\alpha(t)$ имеет точку ветвления при $p = 0$, а изображение интеграла от нее еще и простой полюс в той же точке [38]. Для устранения многозначности достаточно выбрать одну из ветвей, что делается стандартным образом: приведенные выше преобразования Лапласа функции $\mathcal{E}_\alpha(t)$ и интеграла от нее не имеют особенностей на комплексной плоскости $C \setminus R_-$ с разрезом вдоль полупрямой

$$R_- = \{p \in C : \operatorname{Im}(p) = 0, \operatorname{Re}(p) \leq 0\}.$$

Наши изображения $F(p)$ фактически зависят от p^a , т.е. $F(p) = \Phi_1(p^a)$.

Введем в рассмотрение функции

$$F^\pm(t) = \Phi_1(t^a \exp(\pm ia\pi)), \quad t > 0.$$

Очевидно, $F^+(t) = \overline{F^-(t)}$ в силу вещественности оригинала. Воспользуемся полученным в работе [61] следующим результатом:

Лемма. Пусть выполнены условия

(А) $F(p) = o(1)$ при $|p| \rightarrow \infty$, $F(p) = o(|p|^{-1})$ при $|p| \rightarrow 0$ равномерно в любом секторе $|\arg p| < \pi - \eta$, $\pi > \eta > 0$;

(Б) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого φ , удовлетворяющего неравенству $\pi - \varepsilon < \varphi \leq \pi$, справедливы соотношения

$$\frac{F(r \exp(\pm i\varphi))}{1+r} \in L_1(R_+), \quad |F(r \exp(\pm i\varphi))| \leq \alpha(r),$$

где $\alpha(r)$ не зависит от φ и $\alpha(r) \exp(-\delta r) \in L_1(R_+)$ для любого $\delta > 0$. Тогда

$$f(x) = L^{-1}(F)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \operatorname{Im} F^-(t) dt. \quad (2)$$

Замечание 1. Утверждение леммы получается в результате замены линии интегрирования в формуле обращения контуром, состоящим из нижнего и верхнего разрезов, соединенных окружностью сколь угодно малого радиуса с центром в точке $p = 0$.

Пусть $F(p) = 1/(p^a + 1)$, тогда

$$F^-(t) = \operatorname{Im} \frac{1}{t^a \exp(-i\pi a) + 1} = \frac{t^a \sin \pi a}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}},$$

так что выполнены все условия леммы и формула (2) дает

$$\begin{aligned} \Theta_\alpha(x) &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{t^a dt}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}} = \\ &= x^{a-1} \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^a e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \end{aligned} \quad (3)$$

При $x \rightarrow 0$ последний интеграл в представлении (3) стремится к величине $\Gamma(1-a)$, и с учетом формулы $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi/\sin \pi a$ при

$x \rightarrow 0$ из представления (3) получаем $\Theta_\alpha(x) \approx x^{a-1}/\Gamma(a)$, что совпадает с первым членом ряда для дробно-экспоненциальной функции (формула (3) гл. 4).

Положим

$$g_a(x) = \int_0^x \Theta_\alpha(t) dt.$$

Изображение этой функции равно

$$G_a(p) = \frac{1}{p(p^a + 1)}. \quad (4)$$

Для нее не выполняется условие (A) теоремы 2 (при $p \rightarrow 0$ величина $|G_a(p)|$ слишком быстро возрастает).

Представим $G_a(p)$ в виде

$$G_a(p) = \frac{1}{p} - \frac{p^{a-1}}{p^a + 1} \quad (5)$$

и положим

$$Q_a(p) = \frac{p^{a-1}}{p^a + 1}. \quad (6)$$

Обозначим через $q_a(x)$ функцию-оригинал с изображением (6). Формула (7) означает, что $g_a(x) = 1 - q_a(x)$.

Изображение (6) удовлетворяет условиям теоремы 2, для него находим

$$F^-(t) = \operatorname{Im} \frac{t^{a-1} \exp(-i\pi(a-1))}{t^a \exp(-i\pi a) + 1} = \frac{t^{a-1} \sin \pi a}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q_a(x) &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{t^{a-1} dt}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}} = \\ &= x^a \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из определения (4) следует равенство

$$g_a(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p G_a(p) = 0,$$

поэтому необходимо $q_a(0) = 1$. Подставив $x = 0$ в первый интеграл в представлении (7) и сделав замену $t^a = z$, придем к табличному

легко вычисляемому интегралу и таким образом убедимся в справедливости равенства $q_a(0) = 1$ при всех $a > 0$.

Итак, наши задачи обращения преобразования Лапласа свелись к вычислению интегралов

$$\mathfrak{D}_\alpha(x) = x^{a-1} \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^a e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}, \quad (8)$$

$$q_a(x) = x^a \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \quad (9)$$

Для их приближенного вычисления можно применить квадратурные формулы типа Гаусса [33] с весом Лагерра $z^a e^{-z}$ для первого интеграла и с весом $z^{a-1} e^{-z}$ для второго интеграла. Однако с уменьшением a точность формул будет уменьшаться.

Поэтому для приближенного вычисления интегралов (8) и (9) построим обобщенные квадратурные формулы вида

$$\int_0^\infty z^\beta e^{-z} f(z) dz \approx \sum_{k=1}^n A_k f(z_k), \quad \beta > -1, \quad (10)$$

точные для функций $f(z) = z^{am}$, $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

Теорема 1. Для того чтобы формула (10) была точна для функций $f(z) = z^{am}$, $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$, необходимо и достаточно выполнения двух условий:

- 1) формула (10) интерполяционная;
- 2) построенный по узлам формулы (10) многочлен

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k^a) \quad (11)$$

удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty z^\beta e^{-z} \omega_n(z^a) z^{am} dz = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (12)$$

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как в случае классических формул типа Гаусса [33], и мы не будем его здесь повторять.

Покажем, что многочлен (11), удовлетворяющий условиям (12), существует и определяется однозначно.

После замены переменной $z^a = x$ условия (12) принимают вид

$$\int_0^\infty x^{(\beta+1)/a-1} \exp(-x^{1/a}) \omega_n(x) x^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Функция $w(x) = x^{(\beta+1)/a-1} \exp(-x^{1/a})$ обладает свойствами веса на полуоси $(0, \infty)$, поскольку $(\beta+1)/a > 0$, следовательно, исконый многочлен существует и единствен, а его корни, т.е. z_k^a , $k = 1, 2, \dots, n$, попарно различны и положительны. Все коэффициенты формулы положительны. Итак, квадратурная формула типа Гаусса вида (10) существует.

Опишем способ вычисления узлов и коэффициентов формулы (10).

Будем искать многочлен (11) в виде

$$\omega_n(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$$

с неизвестными коэффициентами b_k . Условия (12) приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \Gamma(\beta + (k+n-j)a+1) b_j = -\Gamma(\beta + (k+n)a+1), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ее решение существует и единственно, как показано выше. Далее находим корни уравнения $\omega_n(z) = 0$, т.е. числа z_k^a , $k = 1, 2, \dots, n$. Коэффициенты формулы (10) определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k (z_k^a)^{j-1} = \Gamma(\beta + (j-1)a+1), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Узлы и коэффициенты формулы (10) вещественны.

З а м е ч а н и е 2. Для обращения преобразований вида (1) с успехом можно применять ОКФНСТ, построенные в гл. 4.

3⁰. Метод обращения преобразования Лапласа с помощью разложения оригинала в обобщенные степенные ряды. Для больших значений аргументов целесообразно использовать другой подход к вычислению, который основан на следующей теореме (см. [15]):

Теорема 2. Пусть

$$f(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{pt} F(p) dp,$$

причем функция $F(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, имеет конечное число особых точек и все особые точки являются полюсами или точками ветвления, и в окрестностях особых точек $p = p_0$ с наибольшей вещественной частью функция $F(p)$ разлагается в ряды вида

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(p_0)(p-p_0)^{\lambda_{\nu}}, \quad -\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ и $|p - p_0| < l_0$, здесь c_{ν} и λ_{ν} зависят от p_0 . Тогда функция $f(t)$ разлагается в асимптотический ряд

$$f(t) \approx \sum_{p_0} e^{p_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}(p_0)}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} t^{-\lambda_{\nu}-1},$$

где \sum_{p_0} означает суммирование по всем особым точкам p_0 .

Примечание. Если $\lambda_{\nu} = n$ — целое неотрицательное число, то $1/\Gamma(-\lambda_{\nu}) = 0$.

В случае дробных экспонент изображения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p^a} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{an}, \\ \frac{1}{p(p^a+1)} &= \frac{1}{p} - \frac{p^{a-1}}{p^a+1} = \frac{1}{p} - p^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{an}, \end{aligned}$$

где $a = 1 + \alpha$. Применяя описанную выше теорему, получим формулы для вычисления функций $F_1(x)$, $F_2(x)$:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{t^{\alpha}} \mathfrak{D}_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{-n-1}}{\Gamma(-an)}, \\ F_2(x) &= \frac{1}{t^{\alpha+1}} \int_0^t \mathfrak{D}_{\alpha}(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-a-an)} \frac{1}{x^n}, \end{aligned}$$

где $x = t^a$.

Рассмотрим ядро Гаврильяка—Негами $GN(t, a, b, c, d)$, изображение которого равно

$$\int_0^\infty e^{-pt} GN(t, a, b, c, d) dt = F(p, a, b, c, d) = \frac{1}{(p^a + b)^c + d}.$$

Отсюда, в частности, при $c = 1$ получается ядро Работнова. Для ядра Гаврильяка—Негами получим следующее разложение:

$$\begin{aligned} F(p, a, b, c, d) &= \frac{1}{(p^a + b)^c + d} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k p^{ak} = \frac{1}{b^c + d} - \frac{b^c c}{(b^c + d)^2 b} p^a + \\ &+ \frac{-b^c c(c-1)/2(b^c + d)b^2 + (b^c)^2 c^2 / (b^c + d)^2 b^2}{b^c + d} p^{2a} - \dots, \end{aligned}$$

из которого по теореме 1 получаем асимптотическое разложение при больших t :

$$GN(t, a, b, c, d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\Gamma(-ak) t^{ak+1}}.$$

Для вычисления при больших t функции

$$\int_0^t GN(x, a, b, c, d) dx,$$

имеющей изображение $F(p, a, b, c, d)/p$, аналогично получаем формулу

$$\int_0^t GN(x, a, b, c, d) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\Gamma(1 - ak) t^{ak}}.$$

З а м е ч а н и е 3. Другой подход к задаче обращения интегральных преобразований, основанный на асимптотических методах, содержится в работе [4].

З а м е ч а н и е 4. В книге [1] одна из глав посвящена вычислению сингулярных ядер, в том числе ядра Работнова.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Амербаев В. М.* Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра. Алма-Ата. 1974.
- [2] *Амербаев В. М., Утембаев Н. А.* Численный анализ лагеровского спектра. Алма-Ата. 1982.
- [3] *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. 1986.
- [4] *Белов М. А., Цирулис Т. Т.* Асимптотические методы обращения интегральных преобразований. Рига. 1985.
- [5] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. 1980.
- [6] *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений. М. 1971.
- [7] *Гайер Д.* Лекции по аппроксимации в комплексной плоскости. М. 1986.
- [8] *Гиль М. И., Шаргородская Л. Л.* Об одном приближенном методе обратного преобразования Лапласа для многих переменных // Журн. вычислит. матем. и математ. физ. 1974. Т. 14. № 2. С. 487–489.
- [9] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. 1962.
- [10] *Даугавет В. А.* Минимизация интеграла от модуля линейной функции // Методы вычислений. Вып. 4. Л., 1967. С. 26–35.
- [11] *Даугавет И. К.* Введение в классическую теорию приближения функций. СПб. 2011.
- [12] *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. М. 1971.
- [13] *Джрбабян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. М. 1966.

- [14] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М. 1958.
- [15] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. 1961.
- [16] *Екельчик В. С., Рябов В. М.* Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 393–404.
- [17] *Инькова В. П.* О выборе узлов в сумматорном и интерполяционном методах ускорения сходимости // Методы вычислений. Вып. 12. Л. 1991. С. 182–184.
- [18] *Кабардов М. М.* О применении метода суммирования Эйлера-Кноппа к ряду Лагерра // Методы вычислений. Вып. 22. СПб., 2008. С. 77–81.
- [19] *Кабардов М. М.* О суммировании ряда Лагерра методом Эйлера-Кноппа в задаче обращения преобразования Лапласа // Вестник С.-Петербург. ун-та. 2008. Сер. 1. Вып. 4. С. 84–89.
- [20] *Кабардов М. М., Рябов В. М.* Ускорение сходимости рядов Лагерра в задаче обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 4. С. 601–610.
- [21] *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М. 1969.
- [22] *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М. 1967.
- [23] *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И.* Вычислительные методы высшей математики. Т. 2. Минск. 1975.
- [24] *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск. 1968.
- [25] *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М. 1974.
- [26] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. 2002.

- [27] *Лебедева А. В., Рябов В. М.* Специальные квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа // Журн. вычисл. математ. и математ. физ. Т. 52. № 12. 2012. С. 2133-2139.
- [28] *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.-Л. 1951.
- [29] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* О некоторых свойствах квадратурных формул численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 1. С. 16–23.
- [30] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* О свойствах некоторых квадратурных формул численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 2. С. 17–23.
- [31] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* Обобщенные квадратурные формулы численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 4. С. 27–33.
- [32] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* О характеристиках ядер, порождаемых квадратурными формулами обращения преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 21. СПб. 2005. С. 152–164.
- [33] *Мысовский И. П.* Лекции по методам вычислений. СПб. 1998.
- [34] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. 1974.
- [35] *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М. 1983.
- [36] *Порошина Н. И., Рябов В. М.* О методах обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 55–64.
- [37] *Постников А. Г.* Тауберова теория и её применение. М. 1979.
- [38] *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М. 1977.
- [39] *Рябов В. М.* Обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул // Методы вычислений. Вып. 10. Л. 1976. С. 48–60.

- [40] *Рябов В. М.* О численном обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 11. Л. 1978. С. 48–57.
- [41] *Рябов В. М.* О многочленах, возникающих при численном обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 12. Л. 1981. С. 46–53.
- [42] *Рябов В. М.* Метод обращения преобразования Лапласа, использующий значения изображения на вещественной оси // Вестник Ленингр. ун-та. 1982. Сер. 1. Вып. 1. С. 48–53.
- [43] *Рябов В. М.* О точности некоторых методов обращения преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 14. Л. 1985. С. 59–71.
- [44] *Рябов В. М.* О свойствах квадратурных формул, применяемых для обращения преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 15. Л. 1988. С. 63–73.
- [45] *Рябов В. М.* Свойства квадратурных формул наивысшей степени точности, применяемых для обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. матем. и математ. физ. 1989. Т. 29. № 7. С. 1083–1087.
- [46] *Рябов В. М.* Формула обращения преобразования Лапласа, основанная на теореме Виддера // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. № 22. С. 35–39.
- [47] *Рябов В. М.* О некоторых задачах, возникающих при обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 16. Л. 1991. С. 59–68.
- [48] *Рябов В. М.* Вычисление скачков оригинала по его изображению с помощью квадратурных формул // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 1998. Сер. 1. Вып. 1. С. 36–39.
- [49] *Рябов В. М.* Об одном способе обращения преобразования Лапласа // Кубатурные формулы и их приложения. Материалы X международного семинара-совещания. Улан-Удэ. 2009. С. 130–137.
- [50] *Рябцев И. И.* Приближённое вычисление оригинала по значениям изображения в равноотстоящих точках действительной оси // Изв. вузов. Математика. 1966. № 3. С. 139–143.

- [51] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. Минск. 1987.
- [52] *Самокиш Б. А.* Замечание о вычислении определенных интегралов // Методы вычислений. Вып. 2. Л., 1963. С. 45–49.
- [53] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. 1962.
- [54] *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л. 1980.
- [55] *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л. 1964.
- [56] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М. 1976.
- [57] *Фаддеева В. Н.* Сдвиг для систем с плохо обусловленными матрицами // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 5. С. 907–911.
- [58] *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М. 1987.
- [59] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М. 1976.
- [60] *Шуваев А. К.* Дельта-методы численного обращения преобразования Лапласа и их сходимость // Журн. вычислит. матем. и математ. физ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1389–1398.
- [61] *Bobylev A. V., Cercignani C.* The inverse Laplace transform of some analytic functions with an application to the eternal solutions of the Boltzmann equation // Applied Mathematics Letters. 2002. Vol. 15. P. 807–813.
- [62] *Boutros Y. Z.* Numerical methods for the inversion of Laplace transform. Zurich. 1964.
- [63] *Bruin M. G., Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros of generalised Bessel polynomials. I, II. // Indagat. math. 1981. Vol. 43. № 1. P. 1–25.
- [64] *Cohen A. M.* Numerical methods for Laplace transform inversion. Berlin. 2007.

- [65] *Cost T. L.* Approximate Laplace transform inversion in viscoelastic stress analysis // AIAA J. 1964. Vol. 2. № 2. P. 2157–2166.
- [66] *Gabutti B., Lepora P.* The numerical performance of Tricomi's formula for inverting the Laplace transform // Numer. Math. 1987. Vol. 51. P. 369–380.
- [67] *Luke Y.* The special functions and their approximations. Vol. 2. New York. 1969.
- [68] *Mainardi F.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. Introduction to mathematical models. London. 2010.
- [69] *Stroud A. H., Secrest D.* Gaussian quadrature formulas. N.-Y., 1966.
- [70] *Talbot A.* The accurate numerical inversion of Laplace transform // J. Inst. Maths. Applics. 1979. Vol. 23. P. 97–120.
- [71] *Weideman J. A. C., Trefethen L. N.* Parabolic and hyperbolic contours for computing the Bromwich integral // Math. Comput. 2007. Vol. 76. № 259. P. 1341–1356.
- [72] *Widder D. V.* The Laplace transform. Princeton. 1946.
- [73] *Wimp J.* Computing values of a function on $[0, 1]$ from its moments // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1979. Vol. 82A. P. 273–289.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| Предисловие | 3 |
| Глава 1. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ ЛАГЕРРА | |
| § 1. Постановка задачи. Выбор параметра функций Лагерра | 5 |
| § 2. О сходимости рядов Лагерра | 9 |
| § 3. Интерполяционные методы обращения | 15 |
| § 4. Ряды Лагерра и ускорение сходимости с применением преобразования Эйлера-Кноппа | 22 |
| § 5. Обращение преобразования Лапласа при помощи рядов по обобщённым функциям Лагерра | 29 |
| Глава 2. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ | |
| § 1. Интерполяционные квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа | 37 |
| § 2. Общие свойства ортогональных многочленов, определяющих квадратурные формулы наивысшей степени точности | 43 |
| § 3. Связь квадратурных формул наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа с аппроксимациями Паде ... | 47 |
| Глава 3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА | |
| § 1. Одна формула обращения преобразования Лапласа, связанная с гамма-функцией | 52 |
| § 2. Оценки погрешности квадратурных формул обращения преобразования Лапласа | 55 |
| § 3. Скорость сходимости квадратурных формул наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа | 58 |
| § 4. Квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа с фиксированными узлами, оптимальные на классе гладких функций | 70 |
| § 5. Обращение многомерного преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул | 75 |
| Глава 4. ОБОБЩЁННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НАИВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА | |
| § 1. Постановка задачи | 87 |
| § 2. Обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности | 89 |
| § 3. Расположение узлов обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности | 93 |
| § 4. Сходимость обобщённых квадратурных формул наивысшей | |

| | |
|---|-----|
| степени точности | 96 |
| Глава 5. ДЕЛЬТА-МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА | 100 |
| § 1. Методы Виддера | 101 |
| § 2. Ускорение сходимости методов Виддера | 108 |
| § 3. Численная реализация методов Виддера | 116 |
| § 4. Оптимальные методы ускорения сходимости приближений Виддера | 121 |
| § 5. Применение многочленов Чебышева к построению дельтообразных ядер | 126 |
| § 6. Дельта-метод обращения преобразования Лапласа высокого порядка точности | 130 |
| Глава 6. ОБРАЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ РАЗРЫВНЫХ ОРИГИНАЛОВ | |
| § 1. Точность вычисления значений оригинала и его скачков методом Виддера | 140 |
| § 2. Вычисление скачков оригинала с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности | 152 |
| § 3. Формула обращения, основанная на одной теореме Виддера | 155 |
| Глава 7. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЛИНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ | 162 |
| Глава 8. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ | 172 |
| Литература | 180 |

Н а у ч н о е и з д а н и е

Рябов Виктор Михайлович

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Подписано в печать 00.00.13. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.