

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ ПО БАЗЕ ФИЛЬТРА, ЧАСТЬ I

ПОТЕПУН А.В.

CONTENTS

1. Предисловие.	1
2. Метрические пространства.	2
3. Определения и общие свойства предела.	5
4. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.	21
5. Асимптотические оценки и асимптотические равенства.	33
6. Свойства предела, связанные с неравенствами.	40
7. Принцип сходимости.	43

1. Предисловие.

Это курс лекций, который я читал на 1 курсе. Теория пределов излагается на основе предела по базе ("базис фильтра" Бурбаки). Практически это то же самое, как излагать пределы на языке окрестностей, но введение с самого начала общего определения позволяет в дальнейшем излагать, например, интеграл Римана, суммируемые семейства на основе этого определения. Как это было сделано — изложено после главы о пределах. Существенно новое: определение функции, возрастающей или убывающей по базе. Например, функция, убывающая в обычном смысле справа от точки a , называется возрастающей по базе промежутков вида $(a, a + \delta)$. На этой основе также определяется длина пути как предел возрастающей обобщённой последовательности длин ломаных. Ещё: определяется верхний и нижний пределы функции по базе, сходимость в себе и общий принцип сходимости Больцано-Коши.

После главы о пределах изложены отдельные куски курса — применение вышеизложенного.

Предполагается, что во вводной главе получены следующие результаты (используются при изложении теории пределов):

1) Множества и операции над ними, в том числе объединения и пересечения семейств.

2) Отображения: инъективные, сюръективные, биективные, композиция отображений, обратное отображение, сужение и продолжение отображений. Обозначения: $\text{dom } f$ (область определения отображения f), $\text{im } f$ (множество значений, принимаемых отображением f). Образ множества: $f(A) = \{y \mid \exists x \in A: y = f(x)\}$ (технически удобно считать, что *не обязательно* $A \subset X = \text{dom } f$). Композиция определяется так: если $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow T$, то $\text{dom } g \circ f = \{x \in X: f(x) \in Z\}$. Таким образом, композиция определена всегда, но бывает пустым отображением. Например, функция $\ln \sin$ — это композиция \sin и \ln (а не сужения \sin).

3) Вещественные числа: аксиома Архимеда, существование квадратного корня, неравенство Коши, \sup , \inf , расширенная прямая.

4) Пространства \mathbb{R}^n , операции в них, скалярное произведение и его свойства. Длина

вектора: $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, следующие свойства длины:

$$|x| \geq 0; |x| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \quad ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq |x| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

2. Метрические пространства.

Определение 2.1 (Метрическое пространство). Пусть X — непустое множество. Функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется метрикой на X , если:

- 1) $\forall x, y \in X \rho(x, y) \geq 0; \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
- 2) $\forall x, y \in X \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметрия).
- 3) $\forall x, y, z \in X \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Множество X с заданной на нём метрикой называется метрическим пространством (обозначение: (X, ρ)).

Примеры.

1) $X = \mathbb{R}^n$ (в частности, $X = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), $\rho(x, y) = |x - y|$. По свойствам длины вектора:

$$\rho(x, y) = |x - y| \geq 0; \quad |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y.$$

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x| = \rho(y, x).$$

$$\rho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

2) $X = \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что функция $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ осуществляет биективное отображение \mathbb{R} на промежуток $(-1; 1)$. Очевидно, $|x| < \sqrt{1+x^2}$, поэтому $|\varphi(x)| < 1$, т.е. $\varphi(x) \in (-1; 1)$.

Проверим, что для любого $y \in (-1; 1)$ существует единственный $x \in \mathbb{R}$, такой, что $y = \varphi(x)$. Для этого решим уравнение:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y \Leftrightarrow x = y\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2 = y^2 + y^2x^2 \Leftrightarrow x^2(1-y^2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}.$$

Поскольку $\sqrt{1+x^2} > 0$, в уравнении $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y$ числа x и y — одного знака. Поэтому

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Итак, для любого $y \in (-1; 1)$ существует единственный корень уравнения $\varphi(x) = y$, т.е. φ — биективно и $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

Продолжим φ на $\overline{\mathbb{R}}$: положим $\varphi(-\infty) = -1$, $\varphi(+\infty) = 1$. Получили биекцию $X = \overline{\mathbb{R}}$ на $[-1; 1]$. Метрику на $\overline{\mathbb{R}}$ определяем так: для $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \rho(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Проверяем свойства:

$$\rho(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq 0; |\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) = y.$$

Остальные свойства — аналогично случаю \mathbb{R}^n (вместо x, y, z — $\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)$).

3) X — произвольное непустое множество,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases} \quad (\text{дискретная метрика}).$$

Проверить свойства метрики в качестве упражнения.

(Комментарий для лектора: в одном из дополнений к главе о пределах определяется метрика в $\overline{\mathbb{C}}$ и доказывается, что шар с центром в ∞ имеет вид $\{z \in \mathbb{C}: |z| > p\} \cup \{\infty\}$).

Определение 2.2 (Шары и окрестности точки в метрическом пространстве). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Множество $B(a, r) = \{x \in X: \rho(x, a) < r\}$ называется открытым шаром с центром в точке a и радиусом r .

Множество $\overline{B}(a, r) = \{x \in X: \rho(x, a) \leq r\}$ называется замкнутым шаром с центром в точке a и радиусом r .

Множество $V \subset X$ называется окрестностью точки a , если $\exists r > 0: B(a, r) \subset V$ (обозначение: $V(a)$).

Замечания. 1) $\rho(a, a) = 0 < r \Rightarrow a \in B(a, r) \subset V(a)$ (т.е. точка a принадлежит любой своей окрестности).

2) Поскольку $B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$, открытые и замкнутые шары являются окрестностями своего центра.

3) Если $0 < r_1 \leq r_2$, то $\rho(x, a) < r_1 \Rightarrow \rho(x, a) < r_2$, т.е. $B(a, r_1) \subset B(a, r_2)$ (аналогично $\overline{B}(a, r_1) \subset \overline{B}(a, r_2)$).

Примеры. 1) Шар в \mathbb{R}^2 — это круг с центром в a (открытый — не содержащий окружности, замкнутый — содержащий окружность).

2) Шар в \mathbb{R}^3 — это то, что в геометрии называется шаром (открытый — не содержащий граничной сферы, замкнутый — содержащий сферу).

Упражнение: описать строение шаров в дискретной метрике.

Теорема 2.1 (Строение шаров в \mathbb{R} и некоторых шаров в $\overline{\mathbb{R}}$).

$$1) \text{ В пространстве } \mathbb{R} \quad B(a, r) = (a - r; a + r), \quad \overline{B}(a, r) = [a - r; a + r].$$

2) Если $0 < r < 2$, то существует $p \in \mathbb{R}$, такое, что в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$

$$B(+\infty, r) = (p; +\infty], \quad \overline{B}(+\infty, r) = [p; +\infty]$$

и любой промежуток вида $(p; +\infty]$ или $[p; +\infty]$ является некоторым шаром с центром в $+\infty$.

3) Если $0 < r < 2$, то существует $q \in \mathbb{R}$, такое, что в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$

$$B(-\infty, r) = [-\infty; q), \quad \overline{B}(-\infty, r) = [-\infty; q]$$

и любой промежуток вида $[-\infty; q)$ или $[-\infty; q]$ является некоторым шаром с центром в $-\infty$.

Доказательство. 1) В пространстве \mathbb{R} $x \in B(a, r) \Leftrightarrow |x - a| < r$ (абсолютная величина). Если $x - a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a$, то $x - a < r \Leftrightarrow x < a + r$, т.е. $a \leq x < a + r$. Если $x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$, то $-(x - a) < r \Leftrightarrow x - a > -r \Leftrightarrow x > a - r$, т.е. $a - r < x < a$. Объединяя оба случая, получаем $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.

Докажем, что функции φ^{-1} и φ строго возрастают. При $y \in (-1; 1)$ $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$; если $y \in [0; 1)$, то числитель дроби строго возрастает, y^2 строго возрастает, $1 - y^2$

и $\sqrt{1-y^2}$ строго убывают, поэтому φ^{-1} строго возрастает на $[0; 1]$. Поэтому если $0 \leq y_1 < y_2 < 1$, то $\varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2)$. Если $-1 < y_1 < 0 \leq y_2$, то $\varphi^{-1}(y_1) < 0 \leq \varphi^{-1}(y_2)$. Если $-1 < y_1 < y_2 < 0$, то

$$1 > -y_1 > -y_2 > 0 \Rightarrow \varphi^{-1}(-y_1) > \varphi^{-1}(-y_2) \Rightarrow \\ \varphi^{-1}(y_1) = -\varphi^{-1}(-y_1) < -\varphi^{-1}(-y_2) = \varphi^{-1}(y_2).$$

Получаем в итоге для любых $y_1, y_2 \in [-1; 1]$, таких, что $y_1 < y_2$:

$$-\infty = \varphi^{-1}(-1) \leq \varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2) \leq \varphi^{-1}(1) = +\infty.$$

т. е. φ^{-1} строго возрастает на $[-1; 1]$.

Докажем строгое возрастание φ от противного. Пусть $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$, но $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. Тогда в силу возрастания φ^{-1}

$$x_1 = \varphi^{-1}(\varphi(x_1)) \geq \varphi^{-1}(\varphi(x_2)) = x_2 \text{ — противоречие.}$$

2) Поскольку $0 < r < 2$, то $-1 < 1 - r < 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(1 - r) \in \mathbb{R}$.

$$x \in B(+\infty, r) \Leftrightarrow \rho(x, +\infty) = |\varphi(x) - \varphi(+\infty)| = |\varphi(x) - 1| = 1 - \varphi(x) < r, \\ \text{поскольку } \varphi(x) \leq 1. \text{ Поэтому } x \in B(+\infty, r) \Leftrightarrow 1 - \varphi(x) < r \Leftrightarrow \varphi(x) > 1 - r.$$

Поскольку φ^{-1} и φ строго возрастают,

$$\varphi(x) > 1 - r \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) > \varphi^{-1}(1 - r) \Leftrightarrow x \in (p; +\infty], \text{ где } p = \varphi^{-1}(1 - r) \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим произвольное $p \in \mathbb{R}$, тогда $-1 < \varphi(p) < 1$. Обозначим $r = 1 - \varphi(p) \Rightarrow 0 < r < 2$ и $p = \varphi^{-1}(1 - r)$. Выше уже доказано, что $x \in (p; +\infty] \Leftrightarrow x \in B(+\infty, r)$, т. е. $(p; +\infty] = B(+\infty, r)$.

Для замкнутого шара неравенство $1 - \varphi(x) < r$ заменяем на $1 - \varphi(x) \leq r$ и в дальнейшем получаем $x \geq \varphi^{-1}(1 - r) \Leftrightarrow x \in [p; +\infty]$.

3) Поскольку $0 < r < 2$, то $-1 < r - 1 < 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(r - 1) \in \mathbb{R}$.

$$x \in B(-\infty, r) \Leftrightarrow \rho(x, -\infty) = |\varphi(x) - \varphi(-\infty)| = |\varphi(x) - (-1)| = \varphi(x) + 1 < r, \\ \text{поскольку } \varphi(x) \geq -1. \text{ Поэтому } x \in B(-\infty, r) \Leftrightarrow \varphi(x) + 1 < r \Leftrightarrow \varphi(x) < r - 1.$$

Поскольку φ^{-1} и φ строго возрастают,

$$\varphi(x) < r - 1 \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) < \varphi^{-1}(r - 1) \Leftrightarrow x \in [-\infty; q), \text{ где } q = \varphi^{-1}(r - 1) \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим произвольное $q \in \mathbb{R}$, тогда $-1 < \varphi(q) < 1$. Обозначим $r = \varphi(q) + 1 \Rightarrow 0 < r < 2$ и $q = \varphi^{-1}(r - 1)$. Выше уже доказано, что $x \in [-\infty; q) \Leftrightarrow x \in B(-\infty, r)$, т. е. $[-\infty; q) = B(-\infty, r)$.

Для замкнутого шара неравенство $\varphi(x) + 1 < r$ заменяем на $\varphi(x) + 1 \leq r$ и в дальнейшем получаем $x \leq \varphi^{-1}(r - 1) \Leftrightarrow x \in [-\infty; q]$.

Следствие. Если $p < a < q$, то промежуток $\langle p; q \rangle \subset \mathbb{R}$ является окрестностью точки a (в \mathbb{R}).

Доказательство. Пусть $r = \min\{a - p, q - a\}$, тогда $r > 0$.

$$\begin{cases} r \leq a - p \\ r \leq q - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \leq a - r \\ a + r \leq q \end{cases}.$$

Тогда $x \in B(a, r) \Rightarrow p \leq a - r < x < a + r \leq q \Rightarrow x \in \langle p; q \rangle$ т. е. $B(a, r) \subset \langle p; q \rangle$.

Замечание. Промежуток $[p; q] \subset \mathbb{R}$ не является окрестностью своих концов (точек p и q).

3. Определения и общие свойства предела.

Определение 3.1 (Базы множеств). *Непустая система множеств \mathfrak{A} называется базой множеств, если:* 1) $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \neq \emptyset$;

2) $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad \exists C \in \mathfrak{A}: C \subset A \cap B$.

Замечания. 1) Пусть \mathfrak{A} — база множеств, X — некоторое фиксированное множество. Если для $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap X \neq \emptyset$, то $\{A \cap X: A \in \mathfrak{A}\}$ — тоже база.

Доказательство.

Для $\forall A \cap X, B \cap X \quad \exists C \subset A \cap B \Rightarrow C \cap X \subset (A \cap B) \cap X = (A \cap X) \cap (B \cap X)$.

2) Если $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$, то $\exists C \in \mathfrak{A}: C \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$.

Доказательство — **индукцией по n** . $n = 1: C = A_1 \subset A_1$. Предположим, что утверждение верно для n , докажем для $n + 1$.

Пусть $A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathfrak{A}$. Тогда по предположению индукции $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset \bigcap_{k=1}^n A_k \Rightarrow$

(по условию 2 из определения) $\exists C \in \mathfrak{A}: C \subset B \cap A_{n+1} \subset \bigcap_{k=1}^n A_k \cap A_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k$.

Пример 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X$. Тогда $\{B(a, r)\}$ (множество всех шаров с центром в фиксированной точке a) является базой.

Доказательство. По замечанию 1 к определению шаров, для $\forall r > 0 \quad a \in B(a, r) \Rightarrow B(a, r) \neq \emptyset$.

Для любых $B(a, r_1), B(a, r_2)$ положим $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$.

$r \leq r_1, r_2 \Rightarrow B(a, r) \subset B(a, r_1)$ и $B(a, r) \subset B(a, r_2)$ (по замечанию 3 к определению шаров),

т. е. $B(a, r) \subset B(a, r_1) \cap B(a, r_2)$.

Пример 2. $\{\bar{B}(a, r): a \text{ — фиксирована}\}$ — база (доказательство аналогично).

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $r > 0$, $P(a, r) = \prod_{k=1}^n (a_k - r; a_k + r)$.

$P(a, r)$ — открытый n -мерный куб с центром в a . $x \in P(a, r) \Leftrightarrow$

$\forall k = 1, \dots, n \quad a - r_k < x_k < a + r_k \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad |x_k - a_k| < r \Leftrightarrow \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k - a_k|\} < r$.

Тогда $\{P(a, r): r > 0, a \text{ — фиксировано}\}$ — база.

Доказательство. Если $r_1, r_2 > 0$, $r = \min\{r_1, r_2\}$, то

$(a_k - r; a_k + r) \subset (a_k - r_1; a_k + r_1) \cap (a_k - r_2; a_k + r_2)$ (пример 1 — база одномерных шаров).

По определению декартова произведения множеств, отсюда следует, что $P(a, r) \subset P(a, r_1) \cap P(a, r_2)$ и, кроме того, $a \in P(a, r) \Rightarrow P(a, r) \neq \emptyset$.

Пример 4. $\mathfrak{A} = \{V(a)\}$ — множество всех окрестностей точки a в метрическом пространстве.

1. По определению 1.2 (шары и окрестности) и замечанию к нему,

$$\exists B(a, r): a \in B(a, r) \subset V(a) \Rightarrow V(a) \neq \emptyset.$$

$$2. \begin{cases} V_1(a) \supset B(a, r_1) \\ V_2(a) \supset B(a, r_2) \end{cases} \Rightarrow V_1(a) \cap V_2(a) \supset B(a, r_1) \cap B(a, r_2) \supset B(a, r),$$

т. е. $V_1(a) \cap V_2(a)$ — тоже окрестность.

Пример 5. $\mathfrak{A} = \{A_N: N \in \mathbb{R}\}$, где $A_N = \{n \in \mathbb{N}: n > N, N \in \mathbb{R}, N — фиксировано\}$.

1. По аксиоме Архимеда, для $\forall N \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow A_N \neq \emptyset$. При $N < 1$ все $n \in \mathbb{N}$ входят в A_N , т. е. $A_N = \{1, 2, \dots\}$, при $N \geq 1$ обозначим $n_0 = [N + 1]$ (целая часть числа $N + 1$). Тогда $n_0 \leq N + 1 < n_0 + 1 \Rightarrow n_0 > N$, $n_0 - 1 \leq N$, т. е. n_0 — наименьший элемент множества $A_N \Rightarrow A_N = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$. Таким образом, множества A_N представляют собой "хвосты" натурального ряда.

$$2. \text{ Если } N = \max\{N_1, N_2\}, \text{ то } n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 \\ n > N_2 \end{cases} \Rightarrow n \in A_{N_1} \cap A_{N_2},$$

т. е. $A_N \subset A_{N_1} \cap A_{N_2}$.

Определение 3.2 (Предел отображения со значениями в метрическом пространстве). Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $f: X \rightarrow Y$ — отображение, \mathfrak{A} — база множеств. Точка $l \in Y$ называется пределом отображения f по базе \mathfrak{A} , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon.$$

Комментарий для лектора: для любого $x \in A$ $f(x)$ определено, поэтому по умолчанию предполагается, что $A \subset X = \text{dom } f$, но *не предполагается*, что все $A \in \mathfrak{A}$ — это подмножества множества X . Это даёт в дальнейшем некоторые технические преимущества в изложении. Например, в теоремах о пределе суммы, произведения и частного можно не предполагать, что функции имеют общую область определения.

Обозначения: $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$, $l = \lim_{\mathfrak{A}} f(x)$, $f(x) \xrightarrow{\mathfrak{A}} l$.

Пример 1. Предел постоянного отображения.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ такое, что для $\forall x \in X \quad f(x) = l$ (const.), \mathfrak{A} — база множеств, такая, что $\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset X$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) = \rho(l, l) = 0 < \varepsilon$, т. е. $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по любой такой базе.

Пример 2. Предел последовательности в метрическом пространстве.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ называется последовательностью в метрическом пространстве (X, ρ) . Если $n \in \mathbb{N}$, то $f(n) = x_n$ (обозначение). Вся последовательность обозначается: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ или $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пределом последовательности в метрическом пространстве называется предел отображения f по базе $\mathfrak{A} = \{A_N: N \in \mathbb{R}\}$, где $A_N = \{n \in \mathbb{N}: n > N\}$. По определению 2.2

$$l = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_N \in \mathfrak{A}: \forall n \in A_N \quad \rho(x_n, l) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R}: \forall n > N \quad \rho(x_n, l) < \varepsilon.$$

Важный частный случай: $X = \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$.

$$l = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R}: \forall n > N \quad |x_n - l| < \varepsilon$$

(конечный предел числовой последовательности).

Комментарий: технически удобнее (в том числе для практических занятий) в определении предела последовательности не требовать, чтобы N было натуральным числом.

Теорема 3.1 (Эквивалентные определения предела). *Утверждение $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ эквивалентно каждому из утверждений:*

- 1) $\forall B(l, \varepsilon) \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \in B(l, \varepsilon)$.
- 2) $\forall B(l, \varepsilon) \exists A \in \mathfrak{A}: f(A) \subset B(l, \varepsilon)$.
- 3) Если $g(x) = \rho(f(x), l)$ (т. е. $g: X \rightarrow \mathbb{R}$), то $\lim_{\mathfrak{A}} g = 0$, т. е. $\rho(f(x), l) \xrightarrow{\mathfrak{A}} 0$.
- 4) Нестрогое неравенство: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) \leq \varepsilon$.
- 5) Для малых ε : $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon$.
- 6) Определение с окрестностями: $\forall V(l) \exists A \in \mathfrak{A}: f(A) \subset V(l)$.

Доказательство. 1) По определению шара (1.2) $f(x) \in B(l, \varepsilon) \Leftrightarrow \rho(f(x), l) < \varepsilon$.

2) По определению образа множества, $f(A) = \{y \in Y: y = f(x), x \in A\}$, т. е.

$$f(A) \subset B(l, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall x \in A \quad y = f(x) \in B(l, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon.$$

3) $l = \lim_{\mathfrak{A}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |g(x) - 0| = g(x) = \rho(f(x), l) < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |g(x) - 0| = \rho(g(x), 0) < \varepsilon \text{ по метрике в } \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} g = 0.$$

4) а) Если $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon$, то для тех же $x \in A$ выполнено $\rho(f(x), l) \leq \varepsilon$, т. е. нестрогое неравенство.

б) Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. По утверждению с нестрогим неравенством, для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad \rho(f(x), l) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon \Rightarrow l = \lim_{\mathfrak{A}} f.$$

5) а) Если утверждение $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon$ выполнено для любого $\varepsilon > 0$, то оно выполнено для $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

б) Для $\forall \varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, тогда $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$.

по утверждению (5), для $\varepsilon_1 \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$

$$\text{т. е. } \forall \varepsilon > 0 \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad \rho(f(x), l) < \varepsilon \Rightarrow l = \lim_{\mathfrak{A}} f.$$

6) а) Если выполнено условие: $\forall V(l) \exists A \in \mathfrak{A}: f(A) \subset V(l)$, то, поскольку любой шар $B(l, \varepsilon)$ является окрестностью, выполнено утверждение (2), т. е. по уже доказанному, $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$.

б) Пусть $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$, тогда выполнено утверждение (2). По определению окрестностей (1.2), для $\forall V(l) \exists \varepsilon > 0: B(l, \varepsilon) \subset V(l)$. По утверждению (2), для этого $B(l, \varepsilon) \exists A \in \mathfrak{A}: f(A) \subset B(l, \varepsilon) \subset V(l)$. Получили: $\forall V(l) \exists A \in \mathfrak{A}: f(A) \subset V(l)$.

Теорема 3.2 (Единственность предела). *Если $l_1 = \lim_{\mathfrak{A}} f$, $l_2 = \lim_{\mathfrak{A}} f$, то $l_1 = l_2$.*

Доказательство (от противного). Предположим, что $l_1 \neq l_2$. Тогда по определению метрики (1.1) $\rho(l_1, l_2) > 0$. Обозначим $\varepsilon = \frac{\rho(l_1, l_2)}{2} > 0$. По определению предела,

для этого ε

$$\begin{cases} \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad \rho(f(x), l_1) < \varepsilon \\ \exists A_2 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_2 \quad \rho(f(x), l_2) < \varepsilon. \end{cases}$$

По определению базы (2.1), $\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset A_1 \cap A_2, \quad A \neq \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists x \in A \subset A_1 \cap A_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in A_1 \Rightarrow \rho(f(x), l_1) < \varepsilon \\ x \in A_2 \Rightarrow \rho(f(x), l_2) < \varepsilon \end{cases} \\ 2\varepsilon = \rho(l_1, l_2) \leq \rho(l_1, f(x)) + \rho(f(x), l_2) = \rho(f(x), l_1) + \rho(f(x), l_2) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

(по свойствам метрики — неравенство треугольника и симметрия), т. е. $2\varepsilon < 2\varepsilon$ — противоречие. Получили: $l_1 = l_2$.

Определение 3.3 (Конечный и бесконечный предел).

1) Пусть $f: X \rightarrow Y$, где $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или \mathbb{R}^n , $l \in Y$, \mathfrak{A} — база множеств. По общему определению предела 2.2 и определению метрики в пространстве Y

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho_Y(f(x), l) = |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2) Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $l = +\infty$, \mathfrak{A} — база множеств. По общему определению предела

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}(f(x), +\infty) < \varepsilon.$$

По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела), п. 5 в этом определении достаточно рассматривать $\varepsilon: 0 < \varepsilon < 2$. $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(f(x), +\infty) < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in B(+\infty, \varepsilon)$. По теореме 1.1 (строение шаров) при $0 < \varepsilon < 2$ $B(+\infty, \varepsilon) = (p; +\infty]$, где $p \in \mathbb{R}$ и для любого $p \in \mathbb{R}$ множество $(p; +\infty]$ является таким шаром. Поэтому

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p.$$

3) Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $l = -\infty$, \mathfrak{A} — база множеств. Аналогично п. 2, в общем определении предела достаточно рассматривать $\varepsilon: 0 < \varepsilon < 2$ и при таких ε шар $B(-\infty, \varepsilon) = [-\infty; q)$, поэтому

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) < q.$$

Поскольку $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, в \mathbb{R} определены две метрики: для $x, y \in \mathbb{R}$ $\rho_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ и индуцированная из $\overline{\mathbb{R}}$: $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Таким образом, для сходимости к конечному пределу возникает два определения: предел по метрике $\rho_{\mathbb{R}}$ и предел по метрике $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}$. Оказывается, что эти определения равносильны:

Теорема 3.3 (Сходимость к конечному пределу в метриках \mathbb{R} и $\overline{\mathbb{R}}$).

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathfrak{A} — база множеств, $l \in \mathbb{R}$. Тогда

$$l = \lim_{\mathfrak{A}} f \text{ по метрике } \mathbb{R} \Leftrightarrow l = \lim_{\mathfrak{A}} f \text{ по метрике } \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство.

а) Пусть $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\overline{\mathbb{R}}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ $l - \varepsilon < l < l + \varepsilon$. Поскольку функция φ строго возрастает (доказано в теореме 1.1 о строении шаров), $\varphi(l - \varepsilon) < \varphi(l) < \varphi(l + \varepsilon)$. По следствию из теоремы 1.1,

$$\exists \varepsilon_1 > 0: \varphi(l - \varepsilon) \leq \varphi(l) - \varepsilon_1 < \varphi(l) + \varepsilon_1 \leq \varphi(l + \varepsilon). \quad (1)$$

Поскольку $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\overline{\mathbb{R}}$, для этого ε_1

$$\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}(f(x), l) = |\varphi(f(x)) - \varphi(l)| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow \varphi(l) - \varepsilon_1 < \varphi(f(x)) < \varphi(l) + \varepsilon_1.$$

Тогда по неравенству (1)

$$\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \varphi(l - \varepsilon) < \varphi(f(x)) < \varphi(l + \varepsilon).$$

Поскольку φ^{-1} тоже строго возрастает (в теореме 1.1), из последнего неравенства следует:

$$\forall x \in A \quad \varphi^{-1}(\varphi(l - \varepsilon)) < \varphi^{-1}(\varphi(f(x))) < \varphi^{-1}(\varphi(l + \varepsilon)) \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow l = \lim_{\mathfrak{A}} f \text{ по метрике } \mathbb{R}$$

(по ε находим ε_1 в неравенстве (1), затем по ε_1 находим множество A).

б) Пусть $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике \mathbb{R} . В примере 2 после определения метрического пространства доказано, что функция φ отображает \mathbb{R} на $(-1; 1)$. Поскольку $l \in \mathbb{R}$, $\varphi(l) \in (-1; 1)$. Определим $\varepsilon_0 = \min\{1 - \varphi(l), \varphi(l) + 1\}$, тогда

$$\varepsilon_0 \leq 1 - \varphi(l) \Rightarrow \varphi(l) + \varepsilon_0 \leq 1; \quad \varepsilon_0 \leq \varphi(l) + 1 \Rightarrow -1 \leq \varphi(l) - \varepsilon_0. \quad (2)$$

Рассмотрим $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, тогда по неравенствам (2)

$$-1 \leq \varphi(l) - \varepsilon_0 < \varphi(l) - \varepsilon < \varphi(l) < \varphi(l) + \varepsilon < \varphi(l) + \varepsilon_0 \leq 1.$$

$$\varphi(l) - \varepsilon, \varphi(l) + \varepsilon \in (-1; 1) \Rightarrow \text{определены } \varphi^{-1}(\varphi(l) - \varepsilon), \varphi^{-1}(\varphi(l) + \varepsilon) \in \mathbb{R}.$$

Поскольку φ^{-1} строго возрастает, из последних неравенств следует

$$\varphi^{-1}(\varphi(l) - \varepsilon) < \varphi^{-1}(\varphi(l)) = l < \varphi^{-1}(\varphi(l) + \varepsilon).$$

По следствию из теоремы 1.1 (строение шаров):

$$\exists \varepsilon_1 > 0: \varphi^{-1}(\varphi(l) - \varepsilon) \leq l - \varepsilon_1 < l < l + \varepsilon_1 \leq \varphi^{-1}(\varphi(l) + \varepsilon). \quad (3)$$

Поскольку $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике \mathbb{R} ,

$$\text{для } \varepsilon_1 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x) - l| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow l - \varepsilon_1 < f(x) < l + \varepsilon_1$$

Отсюда по неравенствам (3)

$$\varphi^{-1}(\varphi(l) - \varepsilon) \leq l - \varepsilon_1 < f(x) < l + \varepsilon_1 \leq \varphi^{-1}(\varphi(l) + \varepsilon).$$

Функция φ строго возрастает, поэтому из последних неравенств получаем

$$\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(l) - \varepsilon)) < \varphi(f(x)) < \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(l) + \varepsilon)) \Rightarrow \varphi(l) - \varepsilon < \varphi(f(x)) < \varphi(l) + \varepsilon \Rightarrow \\ |\varphi(f(x)) - \varphi(l)| = \rho_{\mathbb{R}}(f(x), l) < \varepsilon,$$

$$\text{т. е. } \forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho_{\mathbb{R}}(f(x), l) < \varepsilon.$$

(по ε находим ε_1 в неравенстве (3), затем по ε_1 находим множество A). По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела, п. 5), из последнего утверждения следует $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\overline{\mathbb{R}}$.

В дальнейшем, если в формулировке теорем участвуют только конечные пределы, по умолчанию используем метрику \mathbb{R} , а если конечные и бесконечные пределы — то метрику $\overline{\mathbb{R}}$.

Комментарий: Можно сейчас сформулировать эту теорему без доказательства и доказать её в главе о непрерывных функциях, используя непрерывность φ и φ^{-1} . Доказательство там получается проще и быстрее (см. в дополнениях к главе "Непрерывные функции").

Определение 3.4 (Предельная точка множества).

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$, $a \in X$. Обозначим $\dot{B}(a, r) = B(a, r) \setminus \{a\}$ ("проколотый шар"). Точка a называется предельной точкой множества E , если для $\forall B(a, r) \quad \dot{B}(a, r) \cap E \neq \emptyset$.

Замечания. 1) Если $E = \emptyset$, то $\dot{B}(a, r) \cap E = \emptyset$, т. е. пустое множество не имеет предельных точек.

2) Если a — предельная точка E , $E_1 \supset E$, то a — предельная точка и для E_1 : $\forall B(a, r) \quad \dot{B}(a, r) \cap E_1 \supset \dot{B}(a, r) \cap E \neq \emptyset$.

3) Если a — предельная точка E , то для $\forall V(a) \quad \dot{V}(a) \cap E \neq \emptyset$ (поскольку, по определению окрестности, $\exists B(a, r) \subset V(a)$, $\dot{V}(a) \cap E \supset \dot{B}(a, r) \cap E \neq \emptyset$).

Задача на экзамене для отличников: доказать, что конечное множество не имеет предельных точек (конечное множество: существует биекция на $\{1, 2, \dots, n\}$).

Лемма 3.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в X . Если для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, a) < \frac{1}{n}$, то $x_n \rightarrow a$.

Доказательство. Для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon} > 0, N \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall n > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon, \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R}: \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow a.$$

Теорема 3.4 (Характеристика предельных точек с помощью последовательностей). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X$, $E \subset X$.

$$(a \text{ — предельная точка } E) \Leftrightarrow (\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, x_n \neq a, x_n \rightarrow a).$$

Доказательство. а) "⇒":

По определению предельной точки, для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap E \neq \emptyset$, т. е.

$$\exists x' \in E: x' \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \Rightarrow \begin{cases} \rho(x', a) < \frac{1}{n} \\ x' \neq a \end{cases}.$$

Зафиксируем некоторое x' с этими свойствами и обозначим его x_n . Получили $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, x_n \neq a, \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow (\text{по лемме}) x_n \rightarrow a.$$

б) "⇐":

Пусть $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$. По определению $\lim x_n$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R}: \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon, x_n \neq a, x_n \in E \Rightarrow$$

$$x_n \in \dot{B}(a, \varepsilon) \cap E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \dot{B}(a, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset,$$

т. е. a — предельная точка E .

Примеры предельных точек.

Пример 1. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$. Если $\sup E \notin E$ (т. е. в E нет наибольшего элемента), то $\sup E$ — предельная точка E . Аналогично, если $\inf E \notin E$ (т. е. в E нет наименьшего элемента), то $\inf E$ — предельная точка E .

Доказательство. 1) Пусть $\sup E = -\infty$. $\forall x \in E \quad x \leq -\infty$, $E \neq \emptyset \Rightarrow x = -\infty$, т. е. $E = \{-\infty\}$, $\sup E \in E$ — противоречие с условием, т. е. этот случай невозможен.

2) Пусть $\sup E = M \in \mathbb{R}$. Поскольку M — наименьшая верхняя граница E , для любого $n \in \mathbb{N}$ число $M - \frac{1}{n}$ не является верхней границей, т. е.

$$\exists x \in E: M - \frac{1}{n} < x \leq M < M + \frac{1}{n} \Rightarrow |x - M| < \frac{1}{n}. \text{ Обозначим одно из таких } x \text{ через } x_n.$$

При этом $x_n \in E$, $M = \sup E \notin E \Rightarrow x_n \neq M$. Получили последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, x_n \neq M, |x_n - M| < \frac{1}{n}.$$

По лемме 2.1 тогда $x_n \rightarrow M$ по метрике в \mathbb{R} , следовательно (по теореме 2.3 о сходимости к конечному пределу в \mathbb{R} и $\overline{\mathbb{R}}$), и по метрике в $\overline{\mathbb{R}}$. Получили:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \quad x_n \neq M, \quad x_n \rightarrow M \text{ по метрике в } \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда по теореме 2.4 $M = \sup E$ — предельная точка E .

3) Пусть $\sup E = +\infty$. Для любого $r > 0$ рассмотрим $r_1: 0 < r_1 < \min\{r, 2\}$, тогда $r_1 < r$, $0 < r_1 < 2$. По теореме 1.1 о строении шаров $B_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r_1) = (p; +\infty]$, где $p \in \mathbb{R}$. Поскольку $p < +\infty = \sup E$, p не является верхней границей E , т. е. $\exists x \in E: x > p$. При этом $+\infty \notin E$, $x \in E \Rightarrow x \neq +\infty$, т. е.

$$x \in (p; +\infty) \cap E = \dot{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r_1) \cap E \subset \dot{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r) \cap E \text{ (поскольку } r_1 < r) \Rightarrow \\ \dot{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r) \cap E \neq \emptyset \text{ для любого } r > 0 \Rightarrow +\infty \text{ — предельная точка } E.$$

Для $\inf E$ — аналогично (случай $\inf E = +\infty$ невозможен, в случае $\inf E = m \in \mathbb{R}$ $\exists x \in E: x < m + \frac{1}{n}$, в случае $\inf E = -\infty$ $B_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty, r_1) = [-\infty; q)$, $\exists x \in E: x < q$).

Следствие. Если $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$, то:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \quad x_n \rightarrow \sup E; \quad \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in E, \quad y_n \rightarrow \inf E.$$

Доказательство. Если $\sup E \notin E$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с такими свойствами существует по теореме 2.4 о характеристике предельных точек (поскольку $\sup E$ — предельная точка E), а если $\sup E \in E$, то положим для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = \sup E$ (стационарная последовательность). Тогда $x_n \rightarrow \sup E$ (пример 1 после определения предела отображения). Для \inf — аналогично.

Пример 2. Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $E = \langle a; b \rangle$. Тогда, если $c \in [a; b]$, то c — предельная точка E .

Доказательство. Пусть $c > a$, $c \leq b$, тогда $c = \sup \langle a; c \rangle$ (очевидно, c — наименьшая верхняя граница $\langle a; c \rangle$), при этом $c \notin \langle a; c \rangle \Rightarrow c$ — предельная точка $\langle a; c \rangle$. Поскольку $\langle a; c \rangle \subset \langle a; b \rangle$, по замечанию 2 к определению предельной точки c — предельная точка $\langle a; b \rangle$.

Пусть $c = a = \inf \langle a; b \rangle$, $a \notin \langle a; b \rangle \Rightarrow a$ — предельная точка $\langle a; b \rangle \subset \langle a; b \rangle \Rightarrow a$ — предельная точка $\langle a; b \rangle$.

Пример 3. $E = \mathbb{N}$. Для $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: n > a$ (аксиома Архимеда) $\Rightarrow a$ не является верхней границей для $\mathbb{N} \Rightarrow \sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{N} \Rightarrow +\infty$ — предельная точка \mathbb{N} .

Задачи для отличников на экзамене:

- 1) Доказать, что у \mathbb{N} нет других предельных точек, кроме $+\infty$.
- 2) Найти все предельные точки \mathbb{Z} .

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$, $a \in X$ — предельная точка E . Тогда $\forall \dot{B}(a, r) \cap E \neq \emptyset$.

$$\dot{B}(a, r) \cap E = \{x \in X : x \in B(a, r), \quad x \neq a, \quad x \in E\} = B(a, r) \cap (E \setminus \{a\}).$$

Множество $\{B(a, r) : r > 0\}$ — база (пример 1 после определения базы), все множества $B(a, r) \cap (E \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, тогда по замечанию 1 после определения базы, эти множества $B(a, r) \cap (E \setminus \{a\}) = \dot{B}(a, r) \cap E$ тоже образуют базу, при этом $\dot{B}(a, r) \cap E \subset E$.

Определение 3.5 (Предел отображения в точке).

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, a — предельная точка

$E, f: E \rightarrow Y$. Если $b \in Y$ — предел отображения f по базе $\{\dot{B}(a, r) \cap E: r > 0\}$, то говорят, что b — предел отображения f в точке a .

Обозначения: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ или $b = \lim_a f$.

По общему определению предела 2.2:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{B}(a, \delta) \cap E: \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

$$x \in \dot{B}(a, \delta) \cap E \Leftrightarrow \begin{cases} x \in E \\ x \neq a \\ \rho_X(x, a) < \delta \end{cases}, \text{ поэтому}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in E: x \neq a \text{ и } \rho_X(x, a) < \delta \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

и a — предельная точка E .

Частные случаи.

1) $X = Y = \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (функция одной вещественной переменной, $a, b \in \mathbb{R}$).

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — предельная точка } E \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in E: x \neq a \text{ и } |x - a| < \delta \quad |f(x) - b| < \varepsilon \end{cases}$$

”конечный предел в конечной точке”. Это определение принадлежит Коши.

Точно так же определение предела выглядит для $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ (предел вектор-функции нескольких переменных). При этом $|x - a|$ и $|f(x) - b|$ — длины векторов $x - a$ и $f(x) - b$. Ещё один случай — $X = \mathbb{C}, Y = \mathbb{C}$ (функция комплексной переменной), здесь $|x - a|$ и $|f(x) - b|$ — модули комплексных чисел.

2) $X = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m, Y = \overline{\mathbb{R}}, b = +\infty$. По определению 2.3 для предела, равного $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall p \in \mathbb{R} \exists \delta > 0: \forall x \in E: x \neq a \text{ и } |x - a| < \delta \quad f(x) > p. \end{cases}$$

Аналогично для предела, равного $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall q \in \mathbb{R} \exists \delta > 0: \forall x \in E: x \neq a \text{ и } |x - a| < \delta \quad f(x) < q. \end{cases}$$

(используем то, что по теореме 1.1 при $0 < \varepsilon < 2 \quad B(-\infty, \varepsilon) = [-\infty; q)$).

3) $X = \overline{\mathbb{R}}, Y = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, a = +\infty, b \in Y$ (конечно).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} +\infty \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{B}(+\infty, \delta) \cap E: \forall x \in \dot{B}(+\infty, \delta) \cap E \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases}$$

Если $0 < \delta_1 < \min\{\delta, 2\}$, то $\dot{B}(+\infty, \delta_1) \subset \dot{B}(+\infty, \delta)$ (по замечанию 3 к определению шаров, поскольку $\delta_1 < \delta$), поэтому и для любого $x \in \dot{B}(+\infty, \delta_1) \cap E \quad |f(x) - b| < \varepsilon$.
Получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} +\infty \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1: 0 < \delta_1 < 2 \text{ и } \forall x \in \dot{B}(+\infty, \delta_1) \cap E \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases}$$

По теореме 1.1 $B(+\infty, \delta_1) = (p; +\infty]$, где $p \in \mathbb{R}$. В итоге:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} +\infty \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{R}: \forall x \in E: x \neq +\infty \text{ и } x > p \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases}$$

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{R}: \forall x \in E: x \neq -\infty \text{ и } x < q \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases}$$

(поскольку $B(-\infty, \delta_1) = [-\infty; q)$).

Случай $a = \pm\infty$, $b = \pm\infty$ (одновременно) — самостоятельно.

Теорема 3.5 (Связь предела отображения и пределов его сужений).

Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $f: X \rightarrow Y$, $b \in Y$, \mathfrak{A} — база множества.

1) Пусть $X_0 \subset X$, $f_0 = f|_{X_0}$ (сужение f на множество X_0).

Если для $\forall A \in \mathfrak{A}$ $A \cap X_0 \neq \emptyset$ и $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$, то $\lim f_0 = b$ по базе $\{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\}$.

2) Пусть $X_1 \cup X_2 = X$, $f_1 = f|_{X_1}$, $f_2 = f|_{X_2}$.

Если $\lim f_1 = b$ по базе $\{A \cap X_1: A \in \mathfrak{A}\}$, $\lim f_2 = b$ по базе $\{A \cap X_2: A \in \mathfrak{A}\}$,
то $\lim f = b$ по базе $\{A \cap X: A \in \mathfrak{A}\}$.

В частности, если в условиях п. 2 $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: A_0 \subset X$, то $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$.

3) Пусть $X_0 \subset X$, $f_0 = f|_{X_0}$. Если $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: A_0 \subset X_0$, то

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Leftrightarrow \lim f_0 = b \text{ по базе } \{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\}.$$

Доказательство. 1) $\forall A \in \mathfrak{A}$ $A \cap X_0 \neq \emptyset \Rightarrow \{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\}$ — тоже база (по замечанию 1 к определению базы). Очевидно, эта база состоит из подмножеств множества X_0 . По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела), п. 2

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \forall B(b, \varepsilon) \quad \exists A \in \mathfrak{A}: f(A) \subset B(b, \varepsilon).$$

Поскольку $A \cap X_0 \subset X_0$, по определению сужения

$$\text{для } \forall x \in A \cap X_0 \quad f_0(x) = f(x) \Rightarrow f_0(A \cap X_0) = f(A \cap X_0) \subset f(A) \subset B(b, \varepsilon).$$

Получили:

$$\forall B(b, \varepsilon) \quad \exists A \cap X_0: \forall x \in A \cap X_0 \quad f(A \cap X_0) \subset B(b, \varepsilon) \Rightarrow \lim f_0 = b \text{ по базе } \{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\}$$

(снова по п. 2 теоремы 2.1).

2) $\lim f_1 = b$ по базе $\{A \cap X_1: A \in \mathfrak{A}\} \Rightarrow$

$$\forall B(b, \varepsilon) \quad \exists A_1 \cap X_1: \forall x \in A_1 \cap X_1 \quad f(x) = f_1(x) \in B(b, \varepsilon)$$

$\lim f_2 = b$ по базе $\{A \cap X_2: A \in \mathfrak{A}\} \Rightarrow$

$$\forall B(b, \varepsilon) \quad \exists A_2 \cap X_2: \forall x \in A_2 \cap X_2 \quad f(x) = f_2(x) \in B(b, \varepsilon)$$

По определению базы \mathfrak{A} , $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A_1 \cap A_2$. Рассмотрим $\forall x \in B \cap X = B \cap (X_1 \cup X_2) = (B \cap X_1) \cup (B \cap X_2)$, тогда $x \in B \cap X_1$ или $x \in B \cap X_2$.

Если $x \in B \cap X_1$, то $x \in A_1 \cap X_1 \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon)$;

если $x \in B \cap X_2$, то $x \in A_2 \cap X_2 \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon)$.

Получили:

$\forall B(b, \varepsilon) \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \cap X \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) \Rightarrow \lim f = b$ по базе $\{A \cap X: A \in \mathfrak{A}\}$.

Если в условиях п. 2 теоремы $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: A_0 \subset X$, то, по замечанию 2 к определению базы (2.1), $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A_1 \cap A_2 \cap A_0$. Тогда, поскольку $A_0 \subset X = X_1 \cup X_2$,

$$B \subset A_1 \cap A_2 \cap (X_1 \cup X_2) = (A_1 \cap A_2 \cap X_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap X_2) \subset (A_1 \cap X_1) \cup (A_2 \cap X_2).$$

Поэтому для любого $x \in B$ есть две возможности: $x \in A_1 \cap X_1$ или $x \in A_2 \cap X_2$, в обоих случаях $f(x) \in B(b, \varepsilon)$. В итоге:

$$\forall B(b, \varepsilon) \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

3) " \Rightarrow ": По определению базы, $\forall A \in \mathfrak{A} \exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A \cap A_0 \subset A \cap X_0$, $B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap X_0 \neq \emptyset$. Тогда по п. 1 теоремы $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f_0 = b$ по базе $\{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\}$.

" \Leftarrow ":

$\lim f_0 = b$ по базе $\{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \cap X_0 \quad \rho(f_0(x), b) < \varepsilon$.

По определению базы, $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A \cap A_0 \subset A \cap X_0$. Тогда для $\forall x \in B$ получим:

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cap X_0 \Rightarrow f_0(x) = f(x) \text{ и } \rho(f(x), b) = \rho(f_0(x), b) < \varepsilon.$$

в итоге:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad \rho(f(x), b) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

Следствия. 1) Локальность предела в точке.

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $f: E \rightarrow Y$, $a \in X$, $V(a)$ — окрестность точки a , $f_0 = f|_{\dot{V}(a) \cap E}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_0(x) = b$ (существование и величина предела зависят от поведения функции в сколь угодно малой окрестности точки a).

2) Предел "хвоста" последовательности.

$$\lim x_n = b \Leftrightarrow \lim_{n \geq n_0} x_n = b \quad (\{x_n\}_{n \geq n_0} \text{ — сужение } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ на } \{n_0, n_0 + 1, \dots\} \in \mathfrak{A}).$$

3) Подпоследовательности с чётными и нечётными номерами.

$$\lim x_n = b \Leftrightarrow (\lim x_{2k} = b \text{ и } \lim x_{2k-1} = b)$$

$$(\text{сужения } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ на } X_1 = \{2, 4, \dots, 2k, \dots\} \text{ и } X_2 = \{1, 3, \dots, 2k-1, \dots\})$$

Комментарий: эти следствия бывает удобно использовать для практических занятий.

Определение 3.6 (Односторонние предельные точки).

Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $X_{a+} = X \cap [a, +\infty) = \{x \in X: x \geq a\}$, $X_{a-} = X \cap [-\infty, a] = \{x \in X: x \leq a\}$. Точка a называется правосторонней предельной точкой множества X , если a — предельная точка для X_{a+} . Точка a называется левосторонней

предельной точкой множества X , если a — предельная точка для X_{a-} . Если a — одновременно правосторонняя и левосторонняя предельная точка X , то a называется двусторонней предельной точкой.

Примеры. 1) Если $X \neq \emptyset$ и $\sup X \notin X$, то $\sup X$ — левосторонняя, но не правосторонняя предельная точка X (если $a = \sup X$, то для $\forall x \in X \quad x \leq a \Rightarrow X_{a-} = X$, а так как a — верхняя граница и $a \notin X$, то $X_{a+} = \emptyset$). Аналогично, если $X \neq \emptyset$ и $\inf X \notin X$, то $\inf X$ — правосторонняя, но не левосторонняя предельная точка X (в этом случае $X_{a+} = X$, $X_{a-} = \emptyset$).

2) Если $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, то a — правосторонняя, но не левосторонняя предельная точка промежутка $\langle a; b \rangle$, b — левосторонняя, но не правосторонняя предельная точка промежутка $\langle a; b \rangle$ и любое c такое, что $a < c < b$ — двусторонняя предельная точка $\langle a; b \rangle$.

3) $+\infty$ — левосторонняя предельная точка для \mathbb{N} .

Определение 3.7 (Односторонние пределы).

Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \rightarrow Y$. Если a — правосторонняя предельная точка множества X и существует $\lim_{x \rightarrow a^+} f|_{X_{a+}}$ (предел сужения f на X_{a+}), то он называется правосторонним пределом (или пределом справа) отображения f в точке a .

Обозначения: $\lim_{a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a+0)$

Если a — левосторонняя предельная точка множества X и существует $\lim_{x \rightarrow a^-} f|_{X_{a-}}$ (предел сужения f на X_{a-}), то он называется левосторонним пределом (или пределом слева) отображения f в точке a .

Обозначения: $\lim_{a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a-0)$

Определение односторонних пределов на языке неравенств:

Пусть $a \in \mathbb{R}$ (конечно), a — предельная точка множества X_{a+} , $f: X \rightarrow Y$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X_{a+}: |x - a| < \delta \text{ и } x \neq a \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

$X_{a+} = \{x \in X: x \geq a\}$, поэтому

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in X_{a+} \\ |x - a| < \delta \\ x \neq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in X, x \geq a \\ a - \delta < x < a + \delta \\ x \neq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ a < x < a + \delta \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X: a < x < a + \delta \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

Аналогично для левостороннего предела (a — предельная точка X_{a-}):

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in X_{a-} \\ |x - a| < \delta \\ x \neq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in X, x \leq a \\ a - \delta < x < a + \delta \\ x \neq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ a - \delta < x < a \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X: a - \delta < x < a \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

Теорема 3.6 (Об односторонних пределах).

Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \rightarrow Y$ $b \in Y$.

- 1) Если a — правосторонняя предельная точка X , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$.
 Если a — левосторонняя предельная точка X , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.
- 2) Если a — двусторонняя предельная точка X и $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Следует из общей теоремы 2.5 о пределах сужений:

- 1) — следует из утверждения 1 общей теоремы для сужений на X_{a+} и X_{a-} .
 2) — следует из утверждения 2 общей теоремы, поскольку $X_{a+} \cup X_{a-} = X$.

Определение 3.8 (Бесконечно большие). Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ или \mathbb{C} . Функция f называется бесконечно большой по базе \mathfrak{A} , если $\lim_{\mathfrak{A}} |f| = +\infty$. Соответственно, f — бесконечно большая в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$ (по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap \text{dom } f\}$).

Примеры. 1) Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — бесконечно большая в точке 0: для любого $p \in \mathbb{R}$ положим $\delta = \frac{1}{|p|+1} > 0$. Тогда для $\forall x: |x-0| = |x| < \delta$ и $x \neq 0$ $|\frac{1}{x}| > |p| + 1 > p$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} |\frac{1}{x}| = +\infty$.

2) Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Для $\forall p \in \mathbb{R}$ положим $\delta = \frac{1}{|p|+1} > 0$. Тогда для $\forall x: 0 < x < \delta$ $\frac{1}{x} > |p| + 1 > p$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

3) Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Для $\forall p \in \mathbb{R}$ положим $\delta = \frac{1}{|p|+1} > 0$. Рассмотрим $\forall x: -\delta < x < 0$. Делим это неравенство на $-x > 0$, получим $\frac{\delta}{x} < -1$, делим на $\delta > 0$, получим $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -|p| - 1 < p$. В итоге:

$$\forall p \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \frac{1}{|p|+1} > 0: \forall x: -\delta < x < 0 \quad \frac{1}{x} < p \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Замечание. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x}$, вследствие теоремы об односторонних пределах двусторонний предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$ не существует.

4) Докажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $p = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Тогда, если $x > p > 0$, то $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} = \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{R}: \forall x > p \quad |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

5) Докажем, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $p = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$. Тогда, если $x < p < 0$, то разделим это неравенство на $xp > 0$. Получим: $\frac{1}{p} = -\varepsilon < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{R}: \forall x < p \quad |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Теорема 3.7 (Первая теорема о пределе композиции).

Пусть (Y, ρ_Y) , (Z, ρ_Z) — метрические пространства, $f: X \rightarrow Y$, $E \subset Y$, $g: E \rightarrow Z$, \mathfrak{A} — база множеств. Если:

- 1) $\lim_{\mathfrak{A}} f(x) = b \in Y$;
 - 2) $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$;
 - 3) $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap \text{dom}(g \circ f) \neq \emptyset$;
 - 4) $\forall x \in \text{dom}(g \circ f) \quad f(x) \neq b$
- то $\lim(g \circ f) = c$ по базе $\{A \cap \text{dom}(g \circ f): A \in \mathfrak{A}\}$.

Комментарий: если $f(x) \rightarrow b$, $g(y) \rightarrow c$ при $y \rightarrow b$, то, в противоречии со "здравым смыслом", *не всегда* $g(f(x)) \rightarrow c$, нужны какие-то дополнительные условия. Пример — в задаче 607 из задачника Демидовича.

Доказательство теоремы. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap \text{dom}(g \circ f) \neq \emptyset \Rightarrow \{A \cap \text{dom}(g \circ f) : A \in \mathfrak{A}\}$ — база множеств (по замечанию 1 к определению базы).

По определению 2.4 (предел в точке)

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall y \in E = \text{dom } g: \rho_Y(y, b) < \delta, y \neq b \quad \rho_Z(g(y), c) < \varepsilon. \quad (*)$$

По определению 2.2 (предел по базе)

$$\lim_{\mathfrak{A}} f(x) = b \Rightarrow \text{для } \delta > 0 \text{ из формулы } (*) \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho_Y(f(x), b) < \delta. \quad (**)$$

Рассмотрим $\forall x \in A \cap \text{dom}(g \circ f)$. Поскольку $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in X : f(x) \in E\}$,

$$x \in A \cap \text{dom}(g \circ f) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ f(x) \in E \end{cases} \Rightarrow \text{(по формуле (**))} \begin{cases} \rho_Y(f(x), b) < \delta \\ f(x) \in E \end{cases}$$

По условию 4: $x \in \text{dom}(g \circ f) \Rightarrow f(x) \neq b$. Тогда по формуле (*) для $y = f(x)$

$$\begin{cases} f(x) \in E \\ \rho_Y(f(x), b) < \delta \\ f(x) \neq b \end{cases} \Rightarrow \rho_Z(g(y), c) < \varepsilon.$$

Получили:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists A \cap \text{dom}(g \circ f): \forall x \in A \cap \text{dom}(g \circ f) \quad \rho_Z(g(f(x)), c) < \varepsilon \\ \Rightarrow \lim g \circ f = C \text{ по базе } \{A \cap \text{dom}(g \circ f) : A \in \mathfrak{A}\}. \end{aligned}$$

Замечания. 1) Если отображение g не определено в точке b (т. е. $b \notin E = \text{dom } g$), то условие 4 выполнено автоматически: если $f(x) = b$, то $f(x) \notin E \Rightarrow x \notin \text{dom}(g \circ f)$.

2) Условие 4 может быть ослаблено:

4') $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_0 \cap \text{dom}(g \circ f) \quad f(x) \neq b$,

поскольку по п. 3 теоремы 2.5 о пределах сужений

$$\lim g \circ f|_{A_0 \cap \text{dom}(g \circ f)} = c \Leftrightarrow \lim g \circ f = c \text{ (пределы по базе } \{A \cap \text{dom}(g \circ f) : A \in \mathfrak{A}\}).$$

Следствие (Первая теорема о пределе композиции в точке).

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) , (Z, ρ_Z) — метрические пространства, $E_1 \subset X$, $E_2 \subset Y$, $f: E_1 \rightarrow Y$, $g: E_2 \rightarrow Z$, $a \in X$, $b \in Y$, $c \in Z$. Если:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b;$$

$$2) \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c;$$

$$3) a \text{ — предельная точка } \text{dom}(g \circ f);$$

$$4) \forall x \in \text{dom}(g \circ f) \quad f(x) \neq b,$$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Определение 3.9 (Подпоследовательность).

Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ (т. е. $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$). Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В терминах отображений: $x_n = f(n)$, где $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, $n_k = \varphi(k)$, где $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, тогда $x_{n_k} = f(n_k) = f(\varphi(k))$, т. е. подпоследовательность — это композиция $f \circ \varphi$.

Лемма 3.2. Если последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ строго возрастает, то $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k = +\infty$.

Доказательство. Докажем, что для $\forall k \in \mathbb{N} \quad n_k \geq k$ по индукции.

1) $n_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n_1 \geq 1$.

2) $n_k \geq k, n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}, n_{k+1} > n_k \Rightarrow n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$.

Для любого $p \in \mathbb{R}$ положим $N = p$. Тогда для $\forall k > N = p \quad n_k \geq k > p$, т. е.

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists N: \forall k > N \quad n_k > p \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k = +\infty.$$

Следствие (Предел подпоследовательности).

Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, то $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство. Положим $f(k) = n_k, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = x_n, g: \mathbb{N} \rightarrow X$, тогда $x_{n_k} = g(f(k))$. Проверяем условия теоремы о пределе композиции в точке:

1) $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = +\infty$ (лемма 2.2); 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = a$;

3) $\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{N}, +\infty$ — предельная точка \mathbb{N} ; 4) $\forall k f(k) = n_k \neq +\infty$

\Rightarrow (по теореме о пределе композиции в точке) $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(f(k)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a$.

Замечание. Если $n_k \rightarrow +\infty$ (не обязательно возрастая), то также $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a$.

Теорема 3.8 (Равносильность двух определений предела в точке).

Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, $E \subset X, a$ — предельная точка $E, f: E \rightarrow Y$. Равносильны:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$;

2) Для $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: (\forall n \in \mathbb{N} x_n \in E, x_n \neq a, x_n \rightarrow a) \quad f(x_n) \rightarrow b$
(определение предела "на языке последовательностей").

Замечание. В силу теоремы о единственности предела, для всех последовательностей из утверждения (2) $f(x_n)$ сходятся к одному и тому же пределу.

Доказательство теоремы. (1) \Rightarrow (2):

Рассмотрим $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \forall n \in \mathbb{N} x_n \in E, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$. Последовательность — это отображение $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow E, \varphi(n) = x_n$. По условию, $x_n \rightarrow a$, т. е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = a$.

По (1), $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \varphi(n) \in E = \text{dom } f \Rightarrow$ определено $f(x_n) = f(\varphi(n))$, т. е. $\text{dom}(f \circ \varphi) = \mathbb{N}, +\infty$ — предельная точка \mathbb{N} .

По условию на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = x_n \neq a$.

Таким образом, выполнены условия теоремы о пределе композиции в точке (следствие теоремы 2.7). По этой теореме, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\varphi(n)) = b$, т. е. $f(x_n) \rightarrow b$ — утверждение (2) доказано.

(2) \Rightarrow (1): доказываем от противного.

Предположим, что выполнено (2), но не выполнено (1). По определению предела в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — предельная точка } E = \text{dom } f \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in E: (\rho_X(x, a) < \delta, x \neq a) \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon \end{cases}$$

(1) не выполнено, но по условию теоремы a — предельная точка E , следовательно, не выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in E: (\rho_X(x, a) < \delta, x \neq a) \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \exists x \in E: (\rho_X(x, a) < \delta, x \neq a), \quad \rho_Y(f(x), b) \geq \varepsilon$$

(в лекции подробно объяснял, как составляется отрицание утверждения с кванторами). Тогда

$$\text{для } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \delta = \frac{1}{n} \quad \exists x \in E: (\rho_X(x, a) < \frac{1}{n}, x \neq a), \quad \rho_Y(f(x), b) \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Выберем для любого $n \in \mathbb{N}$ одно из таких значений x , обозначим его x_n . Получили последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \quad x_n \neq a, \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow a \text{ по лемме 2.1,}$$

т. е. последовательность удовлетворяет условиям утверждения (2). Тогда $f(x_n) \rightarrow b$, но, по (*), для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \rho_Y(f(x_n), b) \geq \varepsilon$ — противоречие с определением $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Пример. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — периодическая функция с периодом $T > 0$, т. е. выполнены:

$$1) x \in E \Rightarrow x + T \in E, \quad x - T \in E; \quad 2) \forall x \in E \quad f(x + T) = f(x).$$

Если $\exists x_0, x'_0 \in E: f(x_0) \neq f(x'_0)$ (т. е. $f \neq \text{const.}$), то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ не существует.

Доказательство. Обозначим $x_n = x_0 + nT$, $x'_n = x'_0 + nT$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \quad x'_n \in E, \quad f(x_n) = f(x_0), \quad f(x'_n) = f(x'_0)$$

(очевидное доказательство по индукции).

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists N = \frac{p - x_0}{T}: \forall n > N \quad x_n = x_0 + nT > x_0 + \frac{p - x_0}{T} \cdot T = p,$$

т. е. $x_n \rightarrow +\infty$ (аналогично, $x'_n \rightarrow +\infty$). $f(x_n) = f(x_0) = \text{const.} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Аналогично, $f(x'_n) \rightarrow f(x'_0)$, что противоречит замечанию к теореме 2.8, поскольку $f(x_0) \neq f(x'_0)$.

Аналогично доказываем, что не существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (рассматриваем $x_n = x_0 - nT$, $x'_n = x'_0 - nT$). В частности, функции \sin , \cos , tg , ctg не имеют пределов при $x \rightarrow \pm\infty$.

Определение 3.10 (Вектор-функция и её координатные функции).

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ (вектор-функция). Тогда для $\forall x \in X \quad f(x) = y = (y_1, \dots, y_n)$. k -й координатной функцией вектор-функции f называется функция $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$, где $f_k(x) = y_k$ (k -я координата вектора $y = f(x)$). Таким образом, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ и для $\forall k = 1, \dots, n \quad \text{dom } f_k = \text{dom } f = X$.

Теорема 3.9 (Теорема о покоординатной сходимости).

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, f_1, \dots, f_n — её координатные функции, \mathfrak{A} — база множеств. Тогда

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k.$$

Доказательство. " \Rightarrow ":

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad \rho(f(x), b) = |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$f(x) - b = (f_1(x) - b_1, \dots, f_n(x) - b_n),$$

$$\forall k = 1, \dots, n \quad |f_k(x) - b_k| \leq |f(x) - b| \text{ (свойства длины вектора)}$$

$$\Rightarrow \forall k = 1, \dots, n, \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f_k(x) - b_k| < \varepsilon, \text{ т. е. } \forall k = 1, \dots, n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k.$$

" \Leftarrow ":

$$\text{Рассмотрим } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0.$$

$$\forall k = 1, \dots, n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k \Rightarrow \text{ для } \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0 \exists A_k \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_k \quad |f_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

По замечанию 2 к определению базы (2.1), $\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$. Рассмотрим $\forall x \in A$.

$$x \in A \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad x \in A_k \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad |f_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Тогда } |f(x) - b| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k(x) - b_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Получили: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b$.

Частный случай. Если $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ (комплекснозначная функция), то

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = a + bi \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \operatorname{Re} f = a \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \operatorname{Im} f = b.$$

4. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.

Лемма 4.1 (Два определения ограниченности в \mathbb{R}).

$E \subset \mathbb{R}$ ограничено (сверху и снизу) $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in E \quad |x| \leq M$.

Доказательство. " \Rightarrow ":

E ограничено сверху и снизу $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}: \forall x \in E \quad a \leq x \leq b$. Пусть $M = \max\{|a|, |b|\}$. Тогда $-M = \min\{-|a|, -|b|\}$.

$$\forall x \in E \quad -M \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq M \Rightarrow -M \leq x \leq M \Rightarrow |x| \leq M.$$

" \Leftarrow ":

$$\forall x \in E \quad |x| \leq M \Rightarrow -M \leq x \leq M \Rightarrow E \text{ ограничено сверху и снизу.}$$

Определение 4.1 (Ограниченное множество, ограниченная функция на множестве). Множество $E \subset \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in E \quad |x| \leq M$ (согласовано с ограниченностью в \mathbb{R}).

Функция со значениями в \mathbb{R} , комплекснозначная, вектор-функция называется *ограниченной на множестве* $A \subset \operatorname{dom} f$, если множество её значений на множестве A (т. е. $f(A)$) ограничено. Это означает, что $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in A \quad |f(x)| \leq M$. Функция f называется *ограниченной*, если f ограничена на $\operatorname{dom} f$.

Примеры. \sin, \cos — ограниченные функции ($M = 1$). Функция $f(x) = x$ — ограничена на конечных промежутках и не ограничена на \mathbb{R} .

Теорема 4.1 (Оценки функции, имеющей предел).

Пусть f — отображение со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{C}}$ или \mathbb{R}^n , \mathfrak{A} — база множеств.

- 1) Если существует конечный $\lim_{\mathfrak{A}} f$, то $\exists A \in \mathfrak{A}$: f — ограничена на A .
- 2) Если $\text{im } f \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b$, $b > p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}$: $\forall x \in A \quad f(x) > p$. Аналогично, если $b < p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}$: $\forall x \in A \quad f(x) < p$.
- 3) Если существует $\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$ (конечный или $\pm\infty$) или f — бесконечно большая, то $\exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\exists A \in \mathfrak{A}$: $\forall x \in A \quad |f(x)| > M$ (f "отделена от нуля" на множестве A).

Доказательство. 1) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$ (конечный) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}$: $\forall x \in A \quad |f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда по свойствам длины вектора $|f(x)| = |b + (f(x) - b)| \leq |b| + |f(x) - b| < |b| + \varepsilon$, т. е. утверждение 1 выполнено для множества A и $M = |b| + \varepsilon$.

2) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \in \overline{\mathbb{R}}$, $b > p$. Есть такие возможности: а) b, p — конечны. б) b — конечно, $p = -\infty$. в) $b = +\infty$, p — конечно. г) $b = +\infty$, $p = -\infty$.

а) Положим $\varepsilon = b - p$. Поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$, по определению конечного предела, для этого $\varepsilon > 0$

$$\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon; b + \varepsilon) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > b - \varepsilon = p.$$

б) По определению конечного предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon; b + \varepsilon) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > b - \varepsilon > -\infty = p.$$

в) По определению $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$ (см. определения предела на языке неравенств)

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p.$$

г) Поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$,

$$\forall p_1 \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p_1 > -\infty = p.$$

Случай, когда $\lim_{\mathfrak{A}} f < p$ — аналогично (соответственно, а) b, p — конечны. б) b — конечно, $p = +\infty$. в) $b = -\infty$, p — конечно. г) $b = -\infty$, $p = +\infty$ и в случае а) $\varepsilon = p - b > 0$).

3) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \neq 0$.

а) b — конечно, $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$.

$$\text{Для этого } \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}.$$

По свойствам длины вектора

$$\forall x \in A \quad |f(x)| = |b + (f(x) - b)| \geq |b| - |f(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

$$\text{т. е. } \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x)| > M = \frac{|b|}{2}.$$

б) $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall M > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > M > 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) > M$.

в) $\lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall M > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) < -M \Rightarrow |f(x)| = -f(x) > M$.

г) f — бесконечно большая, тогда по определению

$$\forall M > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x)| > M.$$

Следствие 1. Стабилизация знака функции.

Если $\lim_{\mathfrak{A}} f > 0$, то $\exists M > 0$, $\exists A \in \mathfrak{A}$: $\forall x \in A \quad f(x) > M > 0$

и если $\lim_{\mathfrak{A}} f < 0$, то $\exists M < 0$, $\exists A \in \mathfrak{A}$: $\forall x \in A \quad f(x) < M < 0$.

Доказательство. Очевидно, существует $M \in \mathbb{R}: 0 < M < \lim_{\mathfrak{A}} f$ или, соответственно, $\lim_{\mathfrak{A}} f < M < 0$ (независимо, конечный предел или бесконечный), далее применяем п. 2 теоремы.

Следствие 2. Если последовательность с конечными значениями имеет конечный предел, то она ограничена ("в целом").

Доказательство. По п. 1 теоремы для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $A \in \{A_N: N \in \mathbb{R}\}: \forall n \in A \quad |x_n| \leq M$. В примере 5 после определения 2.1 (примеры баз множеств) было доказано, что множество A из базы $\{A_N: N \in \mathbb{R}\}$ имеет вид $A = \{n_0, n_0+1, \dots\}$, где $n_0 \in \mathbb{N}$. Если $n_0 = 1$, то всё доказано ($\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M$). Если $n_0 > 1$, то номеров $n < n_0$ — конечное число. Обозначим $M_1 = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, M\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M_1$ (если $n \geq n_0$, то $|x_n| \leq M \leq M_1$, а если $n \leq n_0 - 1$, то $|x_n|$ — одно из $|x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|$, т. е. и в этом случае $|x_n| \leq M_1$).

Следствие 3. Если $\lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$, то $\exists M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > M$ (т. е. f ограничена снизу на множестве A) и если $\lim_{\mathfrak{A}} f < +\infty$, то $\exists M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) < M$ (т. е. f ограничена сверху на множестве A).

Доказательство. $\lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$ (т. е. конечен или $+\infty$) $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}: -\infty < M < \lim_{\mathfrak{A}} f$ ($M = 0$, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$). Тогда по п. 2 теоремы $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > M$. 2-е утверждение — аналогично ($\exists M \in \mathbb{R}: \lim_{\mathfrak{A}} f < M < +\infty$).

Определение 4.2 (Бесконечно малые). Пусть f — функция, комплекснозначная функция или вектор-функция, \mathfrak{A} — база множеств. f называется бесконечно малой по базе \mathfrak{A} , если $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0$ (то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x)| < \varepsilon$).

Замечание. (тривиальное, но важное для дальнейшего).

Для того, чтобы f имела конечный предел b , необходимо и достаточно, чтобы $f - b$ или $|f - b|$ были бесконечно малыми (следует из определения конечного предела в \mathbb{R}^n).

Лемма 4.2 (Свойства бесконечно малых).

1) Если f_1, \dots, f_m — бесконечно малые по базе \mathfrak{A} (и принимают значения в одном и том же пространстве), то $f_1 + \dots + f_m$ — тоже бесконечно малая по базе \mathfrak{A} .

2) Если f — бесконечно малая по базе \mathfrak{A} , g — ограничена на некотором множестве $A \in \mathfrak{A}$ и произведение $f \cdot g$ определено (f и g — вещественные или комплексные функции или одна вещественная и другая — вектор-функция), то $f \cdot g$ — бесконечно малая по базе \mathfrak{A} .

Доказательство. 1) $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{m} > 0$.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = 0 \Rightarrow \text{для } \frac{\varepsilon}{m} > 0 \exists A_k \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_k \quad |f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

По замечанию 2 к определению базы (определение 2.1), $\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset \bigcap_{k=1}^m A_k$. Тогда для

$$\begin{aligned} \forall x \in A \Rightarrow \forall k = 1, \dots, m \quad x \in A_k \Rightarrow |f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{m} \Rightarrow \\ |f_1(x) + \dots + f_m(x)| \leq |f_1(x)| + \dots + |f_m(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{m} + \dots + \frac{\varepsilon}{m}}_{m \text{ слагаемых}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Получили:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |(f_1 + \dots + f_m)(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\ f_1 + \dots + f_m \text{ — бесконечно малая по базе } \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

2) g ограничена на множестве $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \exists M > 0: \forall x \in A \quad |f(x)| \leq M$. Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{M} > 0$.

f — бесконечно малая по базе $\mathfrak{A} \Rightarrow$ для $\frac{\varepsilon}{M} > 0 \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$.

По определению базы 2.1 $\exists C \in \mathfrak{A}: C \subset A \cap B$. Тогда

$$\begin{aligned} \forall x \in C \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B \Rightarrow |g(x)| \leq M \text{ и } |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \\ |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Получили:

$\forall \varepsilon > 0 \exists C \in \mathfrak{A}: \forall x \in C \quad |f(x)g(x)| < \varepsilon \Rightarrow f \cdot g$ — бесконечно малая по базе \mathfrak{A} .

Лемма 4.3 (Об изменении знака).

Пусть f — функция (вещественная, комплексные) или вектор-функция.

- 1) (для вещественных функций) $\forall x \in A \quad f(x) \geq M \Leftrightarrow \forall x \in A \quad -f(x) \leq -M;$
 $\forall x \in A \quad f(x) \leq M \Leftrightarrow \forall x \in A \quad -f(x) \geq -M;$
- 2) $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$ (конечный) $\Leftrightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f) = -a;$
- 3) (для вещественных функций) $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f) = -\infty;$
 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f) = +\infty.$

Доказательство. 1) Очевидно, следует из правил действий с неравенствами при изменении знака.

2) По правилам действий с абсолютной величиной вещественных чисел, модулем комплексных чисел или умножением числа на вектор $|f(x) - a| = |(-1)(-f(x) + a)| = |-1| \cdot |(-f)(x) - (-a)| = |(-f)(x) - (-a)|$. Тогда по определению конечного предела

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{A}} f = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |(-f)(x) - (-a)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} (-f) = -a. \end{aligned}$$

3) По определению бесконечного предела 2.3

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p \Leftrightarrow \\ \forall (-p) \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad (-f)(x) < -p \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} (-f) = -\infty. \end{aligned}$$

2-е утверждение п. 3 — аналогично.

Теорема 4.2 (Предел суммы).

Пусть f, g — функции (вещественные, комплексные) или вектор-функции со значениями в одном и том же пространстве, \mathfrak{A} — база множеств.

- 1) Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a, \quad \lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (оба конечны), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} (f + g) = a + b$.
- 2) Если f, g — вещественные функции, f ограничена снизу на множестве $A \in \mathfrak{A}$ (в частности, если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$) и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} (f + g) = +\infty$.
- 3) Если f, g — вещественные функции, f ограничена сверху на множестве $A \in \mathfrak{A}$ (в частности, если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f < +\infty$) и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} (f + g) = -\infty$.

Доказательство. 1) Обозначим $\alpha(x) = f(x) - a, \beta(x) = g(x) - b$. По замечанию к определению бесконечно малых, α и β — бесконечно малые по базе \mathfrak{A} . $(f + g) - (a + b) = (f - a) + (g - b) = \alpha + \beta$ — бесконечно малая по базе \mathfrak{A} (по лемме о бесконечно малых). Снова по замечанию к определению бесконечно малых, $\exists \lim_{\mathfrak{A}} (f + g) = a + b$.

2) Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$, то по следствию 3 из теоремы 3.1 об оценках функции, имеющей предел, $\exists M \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > M$, т. е. f ограничена снизу на множестве A . Итак, в условиях п. 2 $\exists M \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > M$. Рассмотрим $\forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow p - M \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty \Rightarrow \text{для } p - M \in \mathbb{R} \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad g(x) > p - M.$$

По определению базы, $\exists C \in \mathfrak{A}: C \subset A \cap B$. Тогда

$$\forall x \in C \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B \Rightarrow f(x) > M \text{ и } g(x) > p - M \Rightarrow f(x) + g(x) > M + p - M = p.$$

Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists C \in \mathfrak{A}: \forall x \in C: f(x) + g(x) > p \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = +\infty.$$

3) Если f ограничена сверху на $A \in \mathfrak{A}$, то $-f$ ограничена снизу на том же множестве (лемма об изменении знака) и если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f < +\infty$, то по той же лемме $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = -\lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$ и по п.2 $-f$ ограничена снизу на некотором $A \in \mathfrak{A}$. $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(-g) = +\infty$ (по лемме). Получили: функции $-f$ и $-g$ удовлетворяют условиям п. 2. По уже доказанному, $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f - g) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = -\infty$ (лемма).

Замечание. По результату в этой теореме можно естественно определить некоторые операции с бесконечностями: положим по определению

$$\text{для } a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = +\infty; \quad a + (-\infty) = -\infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Символы $(+\infty) + (-\infty)$ нельзя придать разумный смысл, что видно из следующих примеров:

1) $f(x) = x + a, \quad g(x) = -x$. Тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (по теореме, п. 2), $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (по лемме об изменении знака) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = a$.

2) $f(x) = 2x, \quad g(x) = -x$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\forall p \in \mathbb{R} \exists q = \frac{p}{2}: \forall x > q \quad f(x) > p), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{и } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

3) $f(x) = x, \quad g(x) = -2x$. Тогда аналогично п. 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad (\forall p \in \mathbb{R} \exists q = \frac{p}{2}: \forall x < q \quad g(x) < p)$$

$$\text{и } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty.$$

4) $f(x) = x + \sin x, \quad g(x) = -x$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{по п. 2 теоремы, поскольку } \sin \text{ ограничен снизу}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ — не существует (пример после теоремы 2.8 о равносильности двух определений предела в точке).

Таким образом, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$, то о $\lim_{\mathfrak{A}}(f + g)$ ничего сказать нельзя. В этом случае говорят, что имеет место "неопределённость типа $\infty - \infty$ " и теорема о пределе суммы не применима. В итоге результат теоремы о пределе суммы коротко можно сформулировать так: если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и $\lim_{\mathfrak{A}} f + \lim_{\mathfrak{A}} g$ имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = \lim_{\mathfrak{A}} f + \lim_{\mathfrak{A}} g$. По индукции этот результат легко распространяется на любое конечное (фиксированное) число слагаемых (упражнение).

Следствие (Предел разности).

Если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и $\lim_{\mathfrak{A}} f - \lim_{\mathfrak{A}} g$ имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}}(f - g) = \lim_{\mathfrak{A}} f - \lim_{\mathfrak{A}} g$.

(используется $f - g = f + (-g)$ и лемма об изменении знака).

Определение 4.3 (Билинейное отображение).

Отображение $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ называется билинейным, если

$$1) \text{ для } \forall x, y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n \quad F(x + y, z) = F(x, z) + F(y, z).$$

$$2) \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad F(\alpha x, y) = \alpha F(x, y).$$

$$3) \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}^m, y, z \in \mathbb{R}^n \quad F(x, y + z) = F(x, y) + F(x, z).$$

$$4) \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad F(x, \alpha y) = \alpha F(x, y).$$

Лемма 4.4. Если $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ — билинейное отображение, то $\exists C \geq 0: \forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n \quad |F(x, y)| \leq C \cdot |x| \cdot |y|$.

Доказательство. По индукции легко доказываются следующие обобщения свойств 1 и 3:

$$F\left(\sum_{k=1}^l x_k, y\right) = \sum_{k=1}^l F(x_k, y), \quad F\left(x, \sum_{k=1}^l y_k\right) = \sum_{k=1}^l F(x, y_k).$$

Обозначим $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ (1 — на i -м месте), $i = 1, \dots, m$. Тогда $x = (x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i e_i$. Аналогично, если $e'_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (1 — на j -м месте), $j = 1, \dots, n$, то $y = (y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_j e'_j$. По обобщениям свойств 1 и 3:

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^m F\left(x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F(x_i e_i, y_j e'_j).$$

По свойствам 2 и 4 $F(x_i e_i, y_j e'_j) = x_i y_j F(e_i, e'_j)$. По свойствам длины вектора

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &= \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j F(e_i, e'_j) \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_i y_j F(e_i, e'_j)| = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_i| \cdot |y_j| \cdot |F(e_i, e'_j)| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x| \cdot |y| \cdot |F(e_i, e'_j)| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |F(e_i, e'_j)| \right) |x| \cdot |y|. \end{aligned}$$

Лемма доказана ($C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |F(e_i, e'_j)|$ — не зависит от x и y). Для конкретных билинейных отображений константа C может быть меньше.

Примеры. 1) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, F(x, y) = xy$. Свойства 1 — 4 следуют из дистрибутивного закона и ассоциативного и коммутативного законов умножения вещественных чисел. $|xy| = |x||y|$, $C = 1$.

2) $x, y \in \mathbb{R}^n, F(x, y) = \langle x, y \rangle$ (скалярное произведение векторов). Свойства 1 — 4 доказываются во вводной главе. $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ (следствие неравенства Коши), т. е. здесь $C = 1$.

3) $x, y \in \mathbb{R}^3, F(x, y) = x \times y \in \mathbb{R}^3$ (векторное произведение). Свойства 1 — 4 — в курсе геометрии (или из представления $x \times y$ в виде определителя). Как известно, $|x \times y| = |x||y| \sin \theta$, где θ — угол между векторами x и y , поэтому и здесь $C = 1$.

4) $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $F(\alpha, x) = \alpha x$ (умножение числа на вектор). Свойства 1 — 4 — по свойствам операций сложения векторов и умножения на числа в векторном пространстве \mathbb{R}^n . Длина $|\alpha x| = |\alpha||x|$, т. е. $C = 1$.

5) $x, y \in \mathbb{C}$, $F(x, y) = x \cdot y$ (произведение комплексных чисел). Свойства 1 — 4 — из свойств операций над комплексными числами, которые образуют поле. Отображение F рассматриваем как билинейное отображение из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ в \mathbb{R}^2 . По свойствам модуля $|xy| = |x||y|$, $C = 1$.

Теорема 4.3 (Предел билинейного отображения).

Пусть $f: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathfrak{A} — база множеств, $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ — билинейное отображение. Если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f = a$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (оба конечны), то существует $\lim_{\mathfrak{A}} F(f(x), g(x)) = F(a, b)$.

Доказательство. По свойствам 1 и 3 билинейного отображения

$$\begin{aligned} F(f(x), g(x)) &= F(f(x) - a + a, g(x)) = F(f(x) - a, g(x)) + F(a, g(x)) = \\ &= F(f(x) - a, g(x) - b + b) = F(f(x) - a, g(x)) + F(a, g(x) - b) + F(a, b). \end{aligned}$$

По свойствам длины вектора и лемме 3.4 о билинейном отображении

$$\begin{aligned} |F(f(x), g(x)) - F(a, b)| &= |F(f(x) - a, g(x)) + F(a, g(x) - b)| \leq \\ &\leq C|f(x) - a| \cdot |g(x)| + C|a| \cdot |g(x) - b|. \end{aligned} \quad (*)$$

$\lim_{\mathfrak{A}} f = a$ (конечный) $\Rightarrow |f(x) - a|$ — бесконечно малая (замечание к определению бесконечно малых). $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (конечный) $\Rightarrow g(x)$ ограничена на некотором $A \in \mathfrak{A}$ по теореме 3.1 об оценках функции, имеющей предел (очевидно, то же верно для функции $C \cdot |g(x)|$). $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (конечный) $\Rightarrow |g(x) - b|$ — бесконечно малая (замечание к определению бесконечно малых), $C \cdot |a| = \text{const.}$ — ограниченная функция. Тогда по лемме 3.2 о свойствах бесконечно малых

$C|f(x) - a| \cdot |g(x)| + C|a| \cdot |g(x) - b|$ — бесконечно малая. Это означает

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad C|f(x) - a| \cdot |g(x)| + C|a| \cdot |g(x) - b| < \varepsilon.$$

По неравенству (*) тогда для тех же $x \in B$ $|F(f(x), g(x)) - F(a, b)| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad |F(f(x), g(x)) - F(a, b)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} F(f(x), g(x)) = F(a, b).$$

Теорема 4.4 (Предел произведения). Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, \mathfrak{A} — база множеств.

1) Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (оба конечны), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = ab$.

2) Пусть f, g — вещественные функции. Если

$$\exists A \in \mathfrak{A}, M > 0: \forall x \in A \quad f(x) \geq M > 0 \text{ или } \exists A \in \mathfrak{A}, M < 0: \forall x \in A \quad f(x) \leq M < 0$$

(в частности, если существует $\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$) и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = \pm\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = \pm\infty$ (по правилу знаков).

Доказательство. 1) — это частные случаи теоремы о пределе билинейного отображения (примеры 1 и 5).

2) Если $\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$, то либо $\lim_{\mathfrak{A}} f > 0$, либо $\lim_{\mathfrak{A}} f < 0$. По следствию 1 из теоремы 3.1 об оценках (стабилизация знака) в первом случае $\exists A \in \mathfrak{A}, M > 0: \forall x \in A \quad f(x) > M > 0$, во втором случае $\exists A \in \mathfrak{A}, M < 0: \forall x \in A \quad f(x) < M < 0$, т. е. выполнены условия утверждения 2.

Пусть $f(x) \geq M > 0$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty$. Рассмотрим $\forall p \in \mathbb{R}$, тогда $\frac{|p|+1}{M} > 0$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty \Rightarrow \text{для } \frac{|p|+1}{M} \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad g(x) > \frac{|p|+1}{M} > 0.$$

По определению базы, $\exists C \in \mathfrak{A}: C \subset A \cap B$. Рассмотрим $\forall x \in C$.

$$x \in C \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B \Rightarrow f(x) \geq M > 0 \text{ и } g(x) > \frac{|p|+1}{M} > 0 \Rightarrow f(x)g(x) > |p|+1 > p.$$

Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists C \in \mathfrak{A}: \forall x \in C \quad f(x)g(x) > p \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = +\infty.$$

Если на множестве $A \quad f(x) \leq M < 0$, то $(-f)(x) \geq (-M) > 0$. Если $\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty$, то по доказанному

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f)g = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = -\infty \text{ по лемме 3.3 об изменении знака.}$$

Если на множестве $A \quad f(x) \leq M < 0$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$, то по лемме об изменении знака $\lim_{\mathfrak{A}} (-g) = +\infty$ и по доказанному

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f)(-g) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = +\infty.$$

Случай $f(x) \geq M > 0$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$ — аналогично.

В соответствии с этой теоремой можно определить некоторые операции с $\pm\infty$: если $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, то $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, а если $a < 0$, то $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$; $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ (знак произведения определяется по правилу знаков).

Замечание. Символам $0 \cdot (\pm\infty)$ нельзя придать разумный смысл, что видно из следующих примеров:

1) $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$ (по примеру 4 после определения бесконечно больших (2.8) и теореме, п. 1)

и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (теорема, п. 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

3) $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 1$.

4) $f(x) = x \cdot (2 + \sin x)$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (по п. 2 теоремы, поскольку } 2 + \sin x \geq 1 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x)$ — не существует (пример после теоремы 2.8 о равносильности двух определений предела в точке).

Таким образом, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g = 0$, то о $\lim_{\mathfrak{A}} (f \cdot g)$ ничего сказать нельзя. В этом случае говорят, что имеет место "неопределённость типа $\infty \cdot 0$ " и теорема о пределе произведения не применима. В итоге результат теоремы о пределе произведения коротко можно сформулировать так: если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и $\lim_{\mathfrak{A}} f \cdot \lim_{\mathfrak{A}} g$ имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}} (f \cdot g) = \lim_{\mathfrak{A}} f \cdot \lim_{\mathfrak{A}} g$. По индукции этот результат легко распространяется на любое конечное (фиксированное) число сомножителей (упражнение).

Определение 4.4. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0$. Если существует $A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \geq 0$, то пишем $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+$. Если существует $A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \leq 0$, то пишем $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0-$.

Очевидно, $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+ \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = 0-$.

Лемма 4.5. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , \mathfrak{A} — база множеств.

1) Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \neq 0$, (b — конечно), то $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = \frac{1}{b}$;

2) Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \neq 0$.

Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+$, то $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = +\infty$, а если $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0-$, то $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = -\infty$.

3) Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = \pm\infty$, то $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0\pm$.

Доказательство. 1) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$, (b — конечно) $\Rightarrow f - b$ — бесконечно малая (замечание к определению 3.2 бесконечно малых).

$$b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{b-f}{bf} = -\frac{1}{bf}(f-b);$$

$$\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0 \Rightarrow \exists M > 0, B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad |f(x)| > M \quad (\text{теорема 3.1 об оценках, п. 3}).$$

Тогда

$$\forall x \in B \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ и } \left| -\frac{1}{b \cdot f(x)} \right| = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| \cdot M},$$

т. е. $-\frac{1}{bf}$ ограничена на B , $f - b$ бесконечно малая по базе \mathfrak{A} .

Тогда по лемме 3.2 о свойствах бесконечно малых

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{bf}(f-b) \text{ — бесконечно малая по базе } \mathfrak{A} \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = \frac{1}{b}.$$

2) Рассмотрим $\forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{|p|+1} > 0$. По условию $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+$, т. е.

$$\text{для } \frac{1}{|p|+1} > 0 \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad |f(x)| < \frac{1}{|p|+1} \text{ и } \exists C \in \mathfrak{A}: \forall x \in C \quad f(x) \geq 0.$$

По замечанию 2 к определению базы, $\exists D \in \mathfrak{A}: D \subset A \cap B \cap C$. Тогда для $\forall x \in D$

$$\begin{aligned} x \in A \text{ и } x \in B \text{ и } x \in C \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ и } |f(x)| < \frac{1}{|p|+1} \text{ и } f(x) \geq 0 \\ \Rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{|p|+1} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > |p|+1 > p. \end{aligned}$$

Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists D \in \mathfrak{A}: \forall x \in D \quad \frac{1}{f(x)} > p \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = +\infty.$$

Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0-$, то $\lim_{\mathfrak{A}}(-f) = 0+$ (по замечанию к определению 3.4). Тогда по доказанному $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{-f} = +\infty \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = -\infty$ (по лемме 3.3 об изменении знака).

3) Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Rightarrow \text{для } \frac{1}{\varepsilon} \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0.$$

При этом $\forall x \in B \quad \frac{1}{f(x)} > 0 \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0+$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = +\infty \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{-f} = 0+ \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0-$$

(применяем лемму об изменении знака и замечание к определению 3.4).

Теорема 4.5 (Предел частного).

1) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, \mathfrak{A} — база множеств. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b \neq 0$ (оба конечны), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \frac{a}{b}$.

2) Пусть f, g — вещественные функции. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = \pm\infty$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b \neq 0$ (конечно), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \pm\infty$ (по правилу знаков пределов функций f и g).

3) Пусть f, g — вещественные функции. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$ (конечно), $\lim_{\mathfrak{A}} g = \pm\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = 0$.

4) Пусть f, g — вещественные функции. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$ (конечный или $\pm\infty$), $\lim_{\mathfrak{A}} g = 0\pm$ и $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \neq 0$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \pm\infty$ (по правилу знаков пределов функций f и g).

Доказательство. 1) По лемме 3.5 п.1 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{g} = \frac{1}{b}$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.1 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \lim_{\mathfrak{A}} \left(f \cdot \frac{1}{g} \right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

2) По лемме 3.5 п.1 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{g} = \frac{1}{b}$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.2 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \lim_{\mathfrak{A}} \left(f \cdot \frac{1}{g} \right) = \pm\infty$ (по правилу знаков пределов функций f и g).

3) По лемме 3.5 п.3 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{g} = 0$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.1 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \lim_{\mathfrak{A}} \left(f \cdot \frac{1}{g} \right) = a \cdot 0 = 0$.

4) По лемме 3.5 п.2 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{g} = \pm\infty$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.2 $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \lim_{\mathfrak{A}} \left(f \cdot \frac{1}{g} \right) = \pm\infty$. (по правилу знаков пределов функций f и g).

Замечание. В соответствии с этой теоремой можно определить:

при $b \neq 0$ (конечном) $\frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty$ по правилу знаков, при a — конечном $\frac{a}{\pm\infty} = 0$,

при $a \neq 0$ (конечном или $\pm\infty$) $\frac{a}{0\pm} = \pm\infty$ по правилу знаков.

Символам $\frac{0}{0}$ и $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ нельзя придать разумный смысл.

Пример. $f(x) = x(2 + \sin x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (теорема о пределе произведения, п.2), $g(x) = x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, но $\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + \sin x$ — не имеет предела в $+\infty$.

Остальные примеры получаются аналогично из примеров после теоремы о пределе произведения (случаи неопределённости $0 \cdot \infty$), $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. В этих случаях говорят, что имеют место "неопределённости в частном" типов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и теорема о пределе частного не применима. После определения операций с бесконечностями в частном и с нулём в знаменателе теорему о пределе частного можно коротко сформулировать так: если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и отношение пределов имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{\mathfrak{A}} f}{\lim_{\mathfrak{A}} g}$.

Определение 4.5 (Арифметические операции над функциями с разными областями определения).

1) Пусть f, g — вещественные, комплексные или вектор-функции со значениями в одном и том же пространстве. Суммой функций f и g называется функция, обозначаемая $f + g$ с областью определения

$$\text{dom}(f + g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g \text{ и } \forall x \in \text{dom}(f + g) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Разностью функций f и g называется функция, обозначаемая $f - g$ с областью определения

$$\text{dom}(f - g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g \text{ и } \forall x \in \text{dom}(f - g) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

2) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или одна вещественная, а другая — вектор-функция. Произведением функций f и g называется функция, обозначаемая $f \cdot g$ с областью определения

$$\text{dom}(f \cdot g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g \text{ и } \forall x \in \text{dom}(f \cdot g) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или f — вектор-функция, а g — вещественная. Частным функций f и g называется функция, обозначаемая $\frac{f}{g}$ с областью определения

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g : g(x) \neq 0\} \text{ и } \forall x \in \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если f_1, \dots, f_m — функции со значениями в одном и том же пространстве, то

$$\text{dom}(f_1 + \dots + f_m) = \bigcap_{k=1}^m \text{dom } f_k, \quad \forall x \in \text{dom}(f_1 + \dots + f_m) \quad (f_1 + \dots + f_m)(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x).$$

Если f_1, \dots, f_m — вещественные или комплексные функции, то

$$\text{dom}(f_1 \cdot \dots \cdot f_m) = \bigcap_{k=1}^m \text{dom } f_k, \quad \forall x \in \text{dom}(f_1 \cdot \dots \cdot f_m) \quad (f_1 \cdot \dots \cdot f_m)(x) = \prod_{k=1}^m f_k(x).$$

Теорема 4.6 (Арифметические действия над функциями, имеющими предел в точке). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, f, g — вещественные, комплексные или вектор-функции, $\text{dom } f, \text{dom } g \subset X$.

1) Пусть f, g — со значениями в одном и том же пространстве. Если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_a f + \lim_a g \text{ имеет смысл и } a \text{ — предельная точка } \text{dom}(f + g),$$

то $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (аналогично для $f - g$).

2) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или одна вещественная, а другая — вектор-функция. Если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_a f \cdot \lim_a g \text{ имеет смысл и } a \text{ — предельная точка } \text{dom}(f \cdot g),$$

то $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

3) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или f — вектор-функция, а g — вещественная. Если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \frac{\lim_a f}{\lim_a g} \text{ имеет смысл и } a \text{ — предельная точка } \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right),$$

$$\text{то } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

4) (Дополнение к лемме о бесконечно малых). Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или одна вещественная, а другая — вектор-функция. Если f — бесконечно малая в точке a , g — ограничена на некотором множестве $\dot{B}(a, \delta) \cap \text{dom } g$ и a — предельная точка $\text{dom}(f \cdot g)$, то $f \cdot g$ — бесконечно малая в точке a .

Комментарий для лектора: стоит заметить, что в этой теореме пределы для функций f и g — по **разным** базам, поэтому предыдущие теоремы об арифметических действиях непосредственно не применимы и приходится накладывать дополнительное условие о предельной точке. Кстати, на практических занятиях обычно имеем дело с функциями с **разными областями определения**, а в лекциях для простоты изложения обычно предполагают, что область определения одна и та же.

Доказательство. 3) Поскольку a — предельная точка $\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)$, рассмотрим

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right), \ x_n \neq a, \ x_n \rightarrow a.$$

Поскольку $\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) \subset \text{dom } f, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom } f, \ x_n \neq a, \ x_n \rightarrow a$. По теореме 2.8 о равносильности двух определений предела, $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Аналогично, $\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) \subset \text{dom } g \Rightarrow g(x_n) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x). \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) \Rightarrow g(x_n) \neq 0$.

По условию $\frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ имеет смысл, а тогда по теореме о пределе частного для последовательностей $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$. Получили:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom}\left(\frac{f}{g}\right), \ x_n \neq a, \ x_n \rightarrow a \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \rightarrow \frac{\lim_a f}{\lim_a g}.$$

Снова по теореме о равносильности двух определений предела отсюда следует, что $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$.

Доказательство пунктов 1 и 2 для $f \pm g$ и $f \cdot g$ — аналогично. Используется то, что $\text{dom}(f \pm g)$ и $\text{dom}(f \cdot g)$ содержатся в $\text{dom } f$ и $\text{dom } g$.

4) Рассмотрим $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom}(fg), \ x_n \neq a, \ x_n \rightarrow a \Rightarrow x_n \in \text{dom } f. f$ — бесконечно малая в точке $a \Rightarrow \lim_a f = 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0$ (по равносильности двух определений предела), т. е. $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая. По условию п.4

$$|g(x)| \leq M \text{ на } \dot{B}(a, \delta) \cap \text{dom } g. \quad \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom}(fg) \subset \text{dom } g \Rightarrow \text{определена } \{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \text{для } \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n \in B(a, \delta), \ x_n \in \text{dom } g, \ x_n \neq a \Rightarrow$$

$$\forall n > N \ x_n \in \dot{B}(a, \delta) \cap \text{dom } g \Rightarrow \forall n > N \quad |g(x_n)| \leq M.$$

Получили:

$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая, $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена при $n > N \Rightarrow$ по лемме о бесконечно малых $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая, т. е. $f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow 0$.

Таким образом, по теореме о равносильности двух определений предела

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \text{dom}(fg), \ x_n \neq a, \ x_n \rightarrow a \quad f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0, \text{ т. е. } f \cdot g \text{ — бесконечно малая в точке } a.$$

Следствие. Пусть f_1, \dots, f_m — вещественные или комплексные функции. Если существуют $\lim_a f_1, \dots, \lim_a f_m$, $\sum_{k=1}^m \lim_a f_k$ имеет смысл и a — предельная точка $\text{dom}(f_1 + \dots + f_m)$, то существует $\lim_a \sum_{k=1}^m f_k = \sum_{k=1}^m \lim_a f_k$.

Если существуют $\lim_a f_1, \dots, \lim_a f_m$, $\prod_{k=1}^m \lim_a f_k$ имеет смысл и a — предельная точка $\text{dom}(f_1 \cdot \dots \cdot f_m)$, то существует $\lim_a \prod_{k=1}^m f_k = \prod_{k=1}^m \lim_a f_k$.

Доказательство (для произведения, по индукции). Для $m = 1$ — это тавтология: $(\lim_a f_1 = \lim_a f_1)$. Предположим, что утверждение верно для m , докажем для $m + 1$. По условию,

$$\prod_{k=1}^{m+1} \lim_a f_k \text{ имеет смысл} \Rightarrow \prod_{k=1}^m \lim_a f_k \text{ имеет смысл.}$$

$$a \text{ — предельная точка } \text{dom} \left(\prod_{k=1}^{m+1} f_k \right) = \bigcap_{k=1}^{m+1} \text{dom} f_k \subset \bigcap_{k=1}^m \text{dom} f_k = \text{dom} \left(\prod_{k=1}^m f_k \right) \Rightarrow$$

$$a \text{ — предельная точка } \text{dom} \left(\prod_{k=1}^m f_k \right) \text{ (по замечанию 2 о расширении множества}$$

к определению 2.4 предельной точки).

По индукционному предположению, $\exists \lim_a \left(\prod_{k=1}^m f_k \right) = \prod_{k=1}^m \lim_a f_k$. a — предельная точка $\text{dom} \left(\prod_{k=1}^m f_k \cdot f_{m+1} \right)$, $\prod_{k=1}^m \lim_a f_k \cdot \lim_a f_{m+1}$ имеет смысл. Тогда по теореме

$$\exists \lim_a \left(\prod_{k=1}^m f_k \cdot f_{m+1} \right) = \prod_{k=1}^m \lim_a f_k \cdot \lim_a f_{m+1}, \text{ т. е. } \lim_a \left(\prod_{k=1}^{m+1} f_k \right) = \prod_{k=1}^{m+1} \lim_a f_k.$$

Доказательство для суммы — совершенно аналогично (область определения суммы функций тоже равна пересечению областей определения слагаемых).

Пример (роль условия о предельной точке).

Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ (по ε находим $\delta = \varepsilon^2$); $g(x) = \sqrt{-x}$, $g: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = 0$. Но $\text{dom}(f + g) = \{0\}$ — не имеет предельных точек, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + \sqrt{-x})$ — не определён.

5. Асимптотические оценки и асимптотические равенства.

Определение 5.1. Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, \mathfrak{A} — база множеств. Функция f называется ограниченной по отношению к функции g по базе \mathfrak{A} , если

$$\exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha: \forall x \in A f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и функция } \alpha \text{ ограничена на } A.$$

Обозначение: $f = O(g)$ (\mathfrak{A}). Если $f = O(g)$ и $g = O(f)$, то говорят, что f и g — одного порядка по базе \mathfrak{A} . Обозначение: $f \asymp g$ (\mathfrak{A}).

Замечание. Если $\forall x \in A \ g(x) \neq 0$, то $f = O(g) (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ ограничено на A (очевидно, $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$).

Частные случаи. Если $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \{(a; b) : b > a\}$, то пишут $f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow a+)$. Если $\mathfrak{A} = \{(b; a) : b < a\}$, то пишут $f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow a-)$. Если $\mathfrak{A} = \{\dot{B}(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, то пишут $f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow a)$. Если $\mathfrak{A} = \{(b; +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$, то пишут $f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow +\infty)$. Если $\mathfrak{A} = \{(-\infty; b) : b \in \mathbb{R}\}$, то пишут $f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow -\infty)$.

Примеры. 1) f ограничена на $A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow f = O(1) (\mathfrak{A})$ (по замечанию).

2) $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, тогда $P(x) = O(x^n) (x \rightarrow \pm\infty)$.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ (предел произведения)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{x^k} = 0 \text{ (предел частного)}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n \text{ (предел суммы)}.$$

Поскольку предел конечен, по теореме 3.1 об оценках функции, имеющей предел, $\frac{P(x)}{x^n}$ ограничена на некотором множестве $(p; +\infty) \in \mathfrak{A} \Rightarrow P(x) = O(x^n) (x \rightarrow +\infty)$. Для $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \pm\infty$ (в зависимости от чётности k), остальное — аналогично.

Упражнение. Если $a_n \neq 0$, то $P(x) \asymp x^n (x \rightarrow \pm\infty)$.

3) $P(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_n x^n (n > m)$, тогда $P(x) = O(x^m) (x \rightarrow 0)$.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow 0} a_{m+k} x^k = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} (a_m + a_{m+1} x + \dots + a_n x^{n-m}) = a_m.$$

Остальное — аналогично примеру 2.

Определение 5.2. Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, \mathfrak{A} — база множеств. Функция f называется бесконечно малой по отношению к функции g по базе \mathfrak{A} , если

$$\exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha : \forall x \in A \ f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 0.$$

Обозначение: $f = o(g) (\mathfrak{A})$. Аналогично частным случаям определения 4.1 смысла придаётся обозначениям $f = o(g) (x \rightarrow a+)$, $f = o(g) (x \rightarrow a-)$ и т. д. (по соответствующим базам).

Замечание. Если $\forall x \in A \ g(x) \neq 0$, то $f = o(g) (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = 0$ (очевидно, $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$).

Примеры. 1) f — бесконечно малая по базе $\mathfrak{A} \Leftrightarrow f = o(1) (\mathfrak{A})$ (по замечанию).

2) Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > \beta$, то $x^\alpha = o(x^\beta) (x \rightarrow 0+)$; $x^\beta = o(x^\alpha) (x \rightarrow +\infty)$.

Доказательство. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\alpha-\beta} = 0$ (будет доказано в главе о непрерывных функциях после аккуратного определения степенной функции с произвольным вещественным показателем). По замечанию, тогда $x^\alpha = o(x^\beta) (x \rightarrow 0+)$. Аналогично, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\beta-\alpha} = 0 \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha) (x \rightarrow +\infty)$. ("В нуле преобладают младшие степени, а в бесконечности — старшие").

3) $\forall \alpha > 0 \ a > 1 \ x^\alpha = o(a^x) (x \rightarrow +\infty)$ ("степенная функция растёт медленнее показательной").

$\forall \beta > 0 \ (\log_a x)^\beta = o(x^\alpha) (x \rightarrow +\infty)$ ("логарифм растёт медленнее степенной функции").

Эти утверждения будут доказаны в главе "дифференциальное исчисление". Здесь сформулированы для использования на практических занятиях.

Задачи для отличников. Доказать:

$$f = O(g) (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \exists A \in \mathfrak{A}, M \geq 0: \forall x \in A |f(x)| \leq M|g(x)|;$$

$$f = o(g) (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

(обычные определения асимптотических оценок). Определения с функцией α взяты из задачника (Виноградова, Олехник, Садовничий). Они позволяют во многих случаях быстрее доказывать различные утверждения об оценках, используя уже доказанные утверждения о пределах.

Определение 5.3. Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, \mathfrak{A} — база множеств. Функция f называется асимптотически равной функции g по базе \mathfrak{A} , если

$$\exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha: \forall x \in A f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1.$$

Обозначение: $f \sim g (\mathfrak{A})$. Аналогично частным случаям определения 4.1 смысл придаётся обозначениям $f \sim g (x \rightarrow a+)$, $f \sim g (x \rightarrow a-)$ и т. д. (по соответствующим базам).

Замечание. Если $\forall x \in A g(x) \neq 0$, то $f \sim g (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = 1$

(очевидно, $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$).

Примеры. 1) Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = A$, $A \neq 0, \pm\infty$, то $f \sim A (\mathfrak{A})$ (по замечанию, поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{A} = 1$).

В главе о непрерывных функциях будет доказано:

2) $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$.

3) $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$.

4) $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$.

5) При $\alpha \neq 0$ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (x \rightarrow 0)$.

(для использования на практических занятиях).

Замечание (ко всем определениям 4.1 — 4.3). У всех участвующих в определениях функций области определения могут быть различными, но для каждой из них существует множество из базы \mathfrak{A} , на которой она определена. По замечанию к определению базы (2.1), для $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A} \exists A \in \mathfrak{A}: A \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$. Поэтому для любого конечного набора функций, участвующих в утверждениях этого параграфа, существует общее множество $A \in \mathfrak{A}$, такое, что на нём определены **все** участвующие функции. На протяжении этого параграфа это будет предполагаться по умолчанию.

Лемма 5.1 (Связь различных асимптотических оценок).

1) Если $f = o(g) (\mathfrak{A})$, то $f = O(g) (\mathfrak{A})$.

2) Если $f \sim g (\mathfrak{A})$, то $f \asymp g (\mathfrak{A})$.

3) $f \sim g (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow f - g = o(g) (\mathfrak{A})$.

Доказательство.

1) $f = o(g) (\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}$ и функция $\alpha: \forall x \in A f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ и $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 0$.

Поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha$ конечен, по теореме 3.1 об оценках функции, имеющей предел, $\exists B \in \mathfrak{A}$, такое, что функция α ограничена на $B \subset A = \text{dom } \alpha$, т.е. $f = O(g) (\mathfrak{A})$.

2) $f \sim g (\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}$ и функция $\alpha: \forall x \in A f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ и $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$.

Тогда по определению предела по базе

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{2} \exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A = \text{dom } \alpha, \forall x \in B \quad |\alpha(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

По свойству длины вектора, тогда:

$$\text{а) } \forall x \in B \quad |\alpha(x)| = |\alpha(x) - 1 + 1| \leq |\alpha(x) - 1| + 1 < \frac{3}{2},$$

т. е. функция α ограничена на $B \Rightarrow f = O(g)$ (\mathfrak{A}).

$$\text{б) } \forall x \in B \quad |\alpha(x)| = |1 + \alpha(x) - 1| \geq 1 - |\alpha(x) - 1| > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \forall x \in B \quad \alpha(x) \neq 0, \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < 2.$$

$$\forall x \in B \quad f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot f(x), \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < 2 \Rightarrow g = O(f) (\mathfrak{A}).$$

(а) и (б) $\Rightarrow f \asymp g$ (\mathfrak{A}).

$$3) f \sim g \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha: \forall x \in A \quad f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\forall x \in A \quad f(x) - g(x) = (\alpha(x) - 1)g(x), \lim_{\mathfrak{A}} (\alpha - 1) = 0 \text{ (предел разности)} \Rightarrow f - g = o(g).$$

$$f - g = o(g) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \beta: \forall x \in A \quad f(x) - g(x) = \beta(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in A \quad f(x) = (\beta(x) + 1)g(x), \lim_{\mathfrak{A}} (\beta + 1) = 1 \text{ (предел суммы)} \Rightarrow f \sim g.$$

Замечание. Утверждения, обратные (1) и (2) неверны: так, $\sin(x) = O(1)$ ($x \rightarrow +\infty$), но $\sin(x) \neq o(1)$ ($x \rightarrow +\infty$); при $f(x) \neq 0$ на множестве $A \in \mathfrak{A}$ $f \asymp 2f$, но $f \not\approx 2f$.

Теорема 5.1 (Свойства операций над асимптотическими оценками). Пусть \mathfrak{A} — база множеств, относительно которой имеют место все участвующие оценки.

1) Если $f_1 = O(g)$, $f_2 = O(g)$, то $f_1 \pm f_2 = O(g)$; если $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$, то $f_1 \pm f_2 = o(g)$.

2) Если $f_1 = O(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$; если $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$; если $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$, то $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$.

3) Если $\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset \text{dom } h$ и $f = O(g)$, то $f \cdot h = O(g \cdot h)$; если $f = o(g)$, то $f \cdot h = o(g \cdot h)$.

4) Пусть $C = \text{const}$. Тогда: если $f = O(g)$, то $C \cdot f = O(g)$; если $f = o(g)$, то $C \cdot f = o(g)$; если $f = O(C \cdot g)$, то $f = O(g)$; если $f = o(C \cdot g)$, то $f = o(g)$ ("принцип пренебрежения константами").

5) Если $f = O(g)$, $g = O(h)$, то $f = O(h)$; если $f = o(g)$, $g = O(h)$, то $f = o(h)$; если $f = O(g)$, $g = o(h)$, то $f = o(h)$; если $f = o(g)$, $g = o(h)$, то $f = o(h)$.

6) Если $g \asymp h$, то: $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h)$, $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$; если $g \sim h$, то: $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h)$, $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$.

Комментарий для лектора: на эту теорему я ссылался на практических занятиях. Было удобно использовать её при вычислении пределов в виде символических "равенств":

$$1) O(f) \pm O(f) = O(f), \quad o(f) \pm o(f) = o(f).$$

$$2) O(f) \cdot O(g) = O(fg), \quad o(f) \cdot O(g) = o(fg), \quad o(f) \cdot o(g) = o(fg).$$

$$3) h \cdot O(g) = O(hg), \quad h \cdot o(g) = o(hg).$$

$$4) C \cdot O(g) = O(g), \quad C \cdot o(g) = o(g); \quad O(Cg) = O(g), \quad o(Cg) = o(g).$$

$$5) O(O(h)) = O(h), \quad o(O(h)) = o(h), \quad O(o(h)) = o(h), \quad o(o(h)) = o(h).$$

$$6) f \asymp g \Rightarrow O(f) = O(g) \text{ и } o(f) = o(g); \quad f \sim g \Rightarrow O(f) = O(g) \text{ и } o(f) = o(g).$$

Доказательство. По замечанию после определений 4.1 — 4.3 существует множество $B \in \mathfrak{A}$ такое, что на нём определены все участвующие в этой теореме функции и все равенства и неравенства в доказательстве выполняются для любого $x \in B$.

1) $f_1 = O(g), f_2 = O(g) \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2: f_1(x) = \alpha_1(x)g(x), f_2(x) = \alpha_2(x)g(x)$,
при этом $|\alpha_1(x)| \leq M_1, |\alpha_2(x)| \leq M_2$. Тогда $f_1(x) \pm f_2(x) = (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))g(x)$
и $|\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| \leq M_1 + M_2 \Rightarrow f_1 \pm f_2 = O(g)$.

$f_1 = o(g), f_2 = o(g) \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2: f_1(x) = \alpha_1(x)g(x), f_2(x) = \alpha_2(x)g(x)$,
при этом $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha_1 = 0, \lim_{\mathfrak{A}} \alpha_2 = 0$. Тогда $f_1(x) \pm f_2(x) = (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))g(x)$
и $\lim_{\mathfrak{A}} (\alpha_1 \pm \alpha_2) = 0 \Rightarrow f_1 \pm f_2 = o(g)$.

2) $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2: f_1(x) = \alpha_1(x)g_1(x), f_2(x) = \alpha_2(x)g_2(x)$,
при этом $|\alpha_1(x)| \leq M_1, |\alpha_2(x)| \leq M_2$. Тогда $f_1(x)f_2(x) = (\alpha_1(x)\alpha_2(x))g_1(x)g_2(x)$
и $|\alpha_1(x)\alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x)| \cdot |\alpha_2(x)| \leq M_1M_2 \Rightarrow f_1f_2 = O(g_1g_2)$.

$f_1 = o(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2: f_1(x) = \alpha_1(x)g_1(x), f_2(x) = \alpha_2(x)g_2(x)$,
при этом $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha_1 = 0, |\alpha_2(x)| \leq M$. Тогда $f_1(x)f_2(x) = (\alpha_1(x)\alpha_2(x))g_1(x)g_2(x)$
и $\lim_{\mathfrak{A}} (\alpha_1\alpha_2) = 0$ (по лемме о бесконечно малых) $\Rightarrow f_1f_2 = o(g_1g_2)$.

Если $f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2)$, то по лемме 4.1 (связь асимптотических оценок) из $f_2 = o(g_2)$ следует $f_2 = O(g_2)$, а тогда по только что доказанному $f_1f_2 = o(g_1g_2)$.

3) Очевидно, $h = O(h)$ (поскольку $\alpha \equiv 1$ на множестве A), поэтому утверждения п.3 — частные случаи п.2.

4) Поскольку для функции, тождественно равной C , очевидно, $C = O(\mathbf{1})$, то утверждения $f = O(g) \Rightarrow Cf = O(g)$ и $f = o(g) \Rightarrow Cf = o(g)$ являются частными случаями утверждений п.2 для $f_2 \equiv C, g_2 \equiv \mathbf{1}$.

При $C \neq 0$ для функции, тождественно равной $\frac{1}{C}$, очевидно, $\mathbf{1} = O(\frac{1}{C})$, тогда утверждения $f = O(Cg) \Rightarrow f = O(g)$ и $f = o(Cg) \Rightarrow f = o(g)$ являются частными случаями утверждений п.2 для $f_2 \equiv 1, g_2 \equiv \frac{1}{C}$. Если $C = 0$, то $Cg \equiv 0$, а тогда из $f = O(Cg)$ или $f = o(Cg)$ следует, что $f \equiv 0$. При этом очевидно, что $f = O(g)$ и $f = o(g)$ (для $\alpha \equiv 0$).

5) $f = O(g), g = O(h) \Rightarrow \exists \alpha, \beta: f(x) = \alpha(x)g(x), g(x) = \beta(x)h(x)$, при этом $|\alpha(x)| \leq M_1, |\beta(x)| \leq M_2$. Тогда $f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x)$ и $|\alpha(x)\beta(x)| \leq M_1 \cdot M_2 \Rightarrow f = O(h)$.

$f = O(g), g = o(h) \Rightarrow \exists \alpha, \beta: f(x) = \alpha(x)g(x), g(x) = \beta(x)h(x)$, при этом $|\alpha(x)| \leq M_1, \lim_{\mathfrak{A}} \beta(x) = 0$. Тогда $f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x)$ и $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha(x)\beta(x) = 0$
(по лемме о бесконечно малых) $\Rightarrow f = o(h)$.

Случай $f = o(g), g = O(h)$ — аналогично: $(\lim_{\mathfrak{A}} \alpha(x) = 0, |\beta(x)| \leq M_2)$.

Если $f = o(g), g = o(h)$, то по лемме 4.1 о связи асимптотических оценок $g = o(h) \Rightarrow g = O(h)$ и, по уже доказанному, $f = o(h)$.

6) По определению 4.1 $g \asymp h \Rightarrow g = O(h)$. Тогда по утверждению 5 $f = O(g) \Rightarrow f = O(h)$ и $f = o(g) \Rightarrow f = o(h)$. Поскольку соотношение $g \asymp h \Leftrightarrow h \asymp g$, то и $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h), f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$.

По лемме о связи асимптотических оценок $f \sim g \Rightarrow f \asymp g$ и утверждения $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h)$, $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$ уже доказаны.

Теорема 5.2 (Асимптотическое равенство как отношение эквивалентности).

Пусть \mathfrak{A} — база множеств, f, g, h — вещественные или комплексные функции, области определения которых содержат некоторые множества из \mathfrak{A} . Тогда

- 1) $f \sim f$ (\mathfrak{A}).
- 2) $f \sim g$ (\mathfrak{A}) $\Rightarrow g \sim f$ (\mathfrak{A}).
- 3) $f \sim g$ (\mathfrak{A}) и $g \sim h$ (\mathfrak{A}) $\Rightarrow f \sim h$ (\mathfrak{A}).

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathfrak{A}$ — множество, на котором выполнены все соотношения между функциями, участвующими в формулировке теоремы. Тогда если $\forall x \in A \quad \alpha(x) = 1$, то $f(x) = \alpha(x)f(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1 \Rightarrow f \sim f$ (\mathfrak{A}).

2) $f \sim g$ (\mathfrak{A}) $\Rightarrow \exists \alpha: f(x) = \alpha(x)g(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$. Тогда по лемме 3.5 о пределе $\frac{1}{\alpha}$

$$\exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad \frac{1}{\alpha(x)} \neq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot f(x), \quad \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow g \sim f$$
 (\mathfrak{A}).

3) $f \sim g$ (\mathfrak{A}), $g \sim h$ (\mathfrak{A}) $\Rightarrow \exists \alpha, \beta: f(x) = \alpha(x)g(x)$, $g(x) = \beta(x)h(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$, $\lim_{\mathfrak{A}} \beta = 1$.

Тогда $f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha\beta = 1$ (предел произведения) $\Rightarrow f \sim h$ (\mathfrak{A}).

Комментарий: эта теорема обосновывает возможность на практических занятиях писать цепочки $f_1 \sim f_2 \sim \dots \sim f_n$ (любая пара элементов цепочки эквивалентна).

Теорема 5.3 (Умножение и деление асимптотических равенств).

Пусть $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ по базе \mathfrak{A} . Тогда:

- 1) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ (\mathfrak{A});
- 2) Если $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f_2(x) \neq 0$, то $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ (\mathfrak{A}).

Доказательство.

$f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2 \Rightarrow \exists \alpha, \beta: f_1(x) = \alpha(x)g_1(x)$, $f_2(x) = \beta(x)g_2(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$, $\lim_{\mathfrak{A}} \beta = 1$. Тогда

1) $f_1(x)f_2(x) = \alpha(x)\beta(x)g_1(x)g_2(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha\beta = 1$ (предел произведения) $\Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

2) $\lim_{\mathfrak{A}} \beta = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad \beta(x) \neq 0$ (по теореме 3.1 об оценках, п.3).

По определению базы, $\exists C \in \mathfrak{A}: C \subset A \cap B$. Тогда $\forall x \in C \quad f_2(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0 \Rightarrow g_2(x) \neq 0$.

Получили: $\forall x \in C \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ (предел частного) $\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ (\mathfrak{A}).

Теорема 5.4 (Замена переменной в асимптотических оценках).

Пусть \mathfrak{A} — база множеств, φ — вещественная или комплексная функция, f, g — функции с областями определения на подмножествах \mathbb{R} или \mathbb{C} . Если:

- 1) $\lim_{\mathfrak{A}} \varphi = a$;
- 2) $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow a$) или $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) или $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow a$);
- 3) $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_0 \quad \varphi(x) \neq a$,

то, соответственно, $f \circ \varphi = O(g \circ \varphi)$ (\mathfrak{A}) или $f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$ (\mathfrak{A}) или $f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$ (\mathfrak{A}).

Если 2') $f(x) = O(g(x))$ или $f(x) = o(g(x))$ или $f(x) \sim g(x)$ при $(x \rightarrow a+)$;

- 3') $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_0 \quad \varphi(x) > a$,

то заключение теоремы сохраняется. Аналогично, если оценки при $x \rightarrow a-$ и на множестве $A_0 \quad \varphi(x) < a$.

Доказательство.

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \rightarrow a) \Rightarrow \exists \dot{B}(a, \varepsilon): \forall x \in \dot{B}(a, \varepsilon) \quad f(x) = \alpha(x)g(x), \quad |\alpha(x)| \leq M.$$

$$\lim_{\mathfrak{A}} \varphi = a \Rightarrow \text{для } \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall t \in A \quad \rho(\varphi(t), a) < \varepsilon \Rightarrow \varphi(t) \in B(a, \varepsilon).$$

По определению базы, $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A \cap A_0$. Тогда

$$\forall t \in B \quad t \in A \text{ и } t \in A_0 \Rightarrow \varphi(t) \in B(a, \varepsilon) \text{ и } \varphi(t) \neq a \Rightarrow \varphi(t) \in \dot{B}(a, \varepsilon).$$

$$\text{Получили: } \exists B \in \mathfrak{A}: \forall t \in B \quad x = \varphi(t) \in \dot{B}(a, \varepsilon) \Rightarrow f(\varphi(t)) = \alpha(\varphi(t))g(\varphi(t)),$$

$$|\alpha(\varphi(t))| \leq M \Rightarrow f \circ \varphi = O(g \circ \varphi) \ (\mathfrak{A}).$$

$$f(x) = o(g(x)) \ (x \rightarrow a) \Rightarrow \exists \dot{B}(a, \delta_0): \forall x \in \dot{B}(a, \delta_0) \quad f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x: x \in \text{dom } \alpha = \dot{B}(a, \delta_0) \text{ и } \rho(x, a) < \delta \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если положить $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$, то $\forall x \in \dot{B}(a, \delta_1) \quad |\alpha(x)| < \varepsilon$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} \varphi = a \Rightarrow \text{для } \delta_1 > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall t \in A \quad \rho(\varphi(t), a) < \delta_1 \Rightarrow \varphi(t) \in B(a, \delta_1).$$

По определению базы, $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A \cap A_0$. Тогда

$$\forall t \in B \quad t \in A \text{ и } t \in A_0 \Rightarrow \varphi(t) \in B(a, \delta_1) \text{ и } \varphi(t) \neq a \Rightarrow \varphi(t) \in \dot{B}(a, \delta_1).$$

$$\text{Получили: } \exists B \in \mathfrak{A}: \forall t \in B \quad x = \varphi(t) \in \dot{B}(a, \delta_1) \Rightarrow f(\varphi(t)) = \alpha(\varphi(t))g(\varphi(t)),$$

$$|\alpha(\varphi(t))| \leq \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{\mathfrak{A}} (\alpha \circ \varphi) = 0 \Rightarrow f \circ \varphi = O(g \circ \varphi) \ (\mathfrak{A}).$$

Для $f(x) \sim g(x) \ (x \rightarrow a)$ доказательство аналогично (поскольку в этом случае $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$, вместо $|\alpha(x)| < \varepsilon$, $|\alpha(\varphi(t))| \leq \varepsilon$ появится $|\alpha(x) - 1| < \varepsilon$, $|\alpha(\varphi(t)) - 1| \leq \varepsilon$ и $\lim_{\mathfrak{A}} (\alpha \circ \varphi) = 1$).

В случае асимптотических оценок при $x \rightarrow a+$ или $x \rightarrow a-$ и условий 2'), 3') в доказательстве вместо $\dot{B}(a, \varepsilon)$ используются множества из соответствующих баз: промежутки вида $(a; b)$ для случая $x \rightarrow a+$ и промежутки вида $(b; a)$ для $x \rightarrow a-$.

Пример. $\sin x \sim x \ (x \rightarrow 0)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$, $\frac{1}{t} \neq 0 \Rightarrow \sin \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t} \ (t \rightarrow +\infty)$.

Замечание. Другие операции над асимптотическими равенствами могут приводить к неверным результатам. Если применять композицию в другом порядке, чем в теореме 4.4, т. е. если $f \sim g \ (\mathfrak{A})$, то может быть $\varphi \circ f \not\sim \varphi \circ g \ (\mathfrak{A})$, например, $x+1 \sim x \ (x \rightarrow +\infty)$, поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, но $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1 \Rightarrow e^{x+1} \not\sim e^x$.

Также если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2 \ (\mathfrak{A})$, то может быть $f_1 + f_2 \not\sim g_1 + g_2 \ (\mathfrak{A})$, например, пусть $f_1(x) = \ln(1+x)$, $f_2(x) = \ln(1-x+x^2)$. Тогда $\ln(1+x) \sim x = g_1(x) \ (x \rightarrow 0)$, $\ln(1-x+x^2) \sim -x+x^2 = g_2(x) \ (x \rightarrow 0)$. $f_1(x) + f_2(x) = \ln((1+x)(1-x+x^2)) = \ln(1+x^3) \sim x^3$. При этом $g_1(x) + g_2(x) = x^2$, т. е. $f_1 + f_2 \not\sim g_1 + g_2$. Но есть хорошая задача для отличников:

$$\text{Если } f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_1 \sim g_1 \ (\mathfrak{A}) \text{ и } f_2 \sim g_2 \ (\mathfrak{A}), \text{ то } f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2 \ (\mathfrak{A}).$$

На мой взгляд, для экзамена она трудновата, но можно предложить на практических занятиях в качестве домашнего задания.

Теорема 5.5 (Равенство пределов асимптотически равных функций).

Если $f \sim g \ (\mathfrak{A})$, то $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ существуют (или не существуют) одновременно, и если существуют, то равны.

Доказательство.

$$f \sim g (\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha: \forall x \in A \quad f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1.$$

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} g \text{ (конечный или } \pm\infty) \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = \lim_{\mathfrak{A}} \alpha \cdot \lim_{\mathfrak{A}} g = \lim_{\mathfrak{A}} g \text{ (предел произведения).}$$

По теореме 4.2 отношение " \sim " симметрично, т. е. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ и, переставляя f и g , получаем: $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} g = \lim_{\mathfrak{A}} f$.

6. Свойства предела, связанные с неравенствами.

В этом параграфе все отображения — со значениями в \mathbb{R} или $\overline{\mathbb{R}}$ (т. е. $f(x) \in \mathbb{R}$ или $f(x) = \pm\infty$).

Теорема 6.1 (Переход к пределу в неравенстве).

Пусть \mathfrak{A} — база множеств. Если существует $A_0 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_0 \quad f(x) \leq g(x)$ и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a, \quad \lim_{\mathfrak{A}} g = b$, то $a \leq b$.

Доказательство. Предположим, что $a > b$, тогда существует $p \in \mathbb{R}: a > p > b$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = a > p \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad f(x) > p; \quad \lim_{\mathfrak{A}} g = b < p \Rightarrow \exists A_2 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_2 \quad g(x) < p$$

(по теореме 3.1 об оценках). Тогда по замечанию 2 к определению базы, существует $A \in \mathfrak{A}: A \subset A_0 \cap A_1 \cap A_2$.

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in A \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in A_1 \Rightarrow f(x_0) > p \\ x_0 \in A_2 \Rightarrow g(x_0) < p \end{cases} \Rightarrow f(x_0) > g(x_0).$$

При этом $x_0 \in A_0 \Rightarrow f(x_0) \leq g(x_0)$ — противоречие. От противного доказано: $a \leq b$.

Замечание. Если для любого $x \in A_0 \quad f(x) < g(x)$, то, вообще говоря, нельзя сделать вывод, что $\lim_{\mathfrak{A}} f < \lim_{\mathfrak{A}} g$.

Пример. Пусть для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n}$, тогда $x_n < y_n$, но $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

Теорема 6.2 (О зажатой функции).

Пусть \mathfrak{A} — база множеств, f, g, h — функции.

Если $\exists A_0 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_0 \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = \lim_{\mathfrak{A}} h = b$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = b$.

Доказательство. По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела, п.5):

$$\begin{aligned} \lim_{\mathfrak{A}} f = b &\Rightarrow \forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < 2 \quad \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad f(x) \in B(b, \varepsilon); \\ \lim_{\mathfrak{A}} h = b &\Rightarrow \forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < 2 \quad \exists A_2 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_2 \quad h(x) \in B(b, \varepsilon). \end{aligned}$$

По замечанию 2 к определению базы, $\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset A_0 \cap A_1 \cap A_2$. Рассмотрим любое $x \in A$:

$$x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A_1 \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon); \\ x \in A_2 \Rightarrow h(x) \in B(b, \varepsilon); \\ x \in A_0 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x). \end{cases}$$

Множество $B(b, \varepsilon)$ — это всегда промежуток. А именно, по теореме 1.1 о строении шаров в \mathbb{R} и $\overline{\mathbb{R}}$: если $b \in \mathbb{R}$, то $B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon; b + \varepsilon)$; если $b = +\infty$, то $B(b, \varepsilon) = (p; +\infty)$ (для $0 < \varepsilon < 2$); если $b = -\infty$, то $B(b, \varepsilon) = [-\infty; q)$ (для $0 < \varepsilon < 2$).

Поскольку $f(x)$ и $h(x)$ принадлежат этому промежутку и $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, то и $g(x)$ принадлежит этому же промежутку. Получили:

$$\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < 2 \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad g(x) \in B(b, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} g = b.$$

Определение 6.1 (Отображение, монотонное по базе).

Пусть f — отображение со значениями в \mathbb{R} или $\overline{\mathbb{R}}$, \mathfrak{A} — база множеств. Назовём отображение f возрастающим по базе \mathfrak{A} , если

$$\forall x \in X = \text{dom } f \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x' \in A \quad f(x') \geq f(x).$$

Назовём отображение f убывающим по базе \mathfrak{A} , если

$$\forall x \in X = \text{dom } f \quad \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x' \in A \quad f(x') \leq f(x).$$

Возрастающее или убывающее отображение назовём монотонным по базе \mathfrak{A} .

Примеры. 1) Пусть $X = \text{dom } f \subset [-\infty; a)$, $f \nearrow$ (возрастает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$) и a — предельная точка множества X . Тогда f возрастает по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

Доказательство. a — предельная точка $X \Rightarrow X \neq \emptyset$ (замечание 1 к определению 2.4 предельной точки). Рассмотрим $\forall x \in X \subset [-\infty; a) \Rightarrow x < a$. Если $a \in \mathbb{R}$, то

$x < a < a + 1 \Rightarrow (x; a + 1)$ — окрестность точки a (следствие теоремы 1.1 о строении шаров) $\Rightarrow \exists B(a, \delta) \subset (x; a + 1)$. Тогда $\forall x' \in \dot{B}(a, \delta) \cap X \quad x' \in (x; a + 1) \Rightarrow x' > x \Rightarrow f(x') \geq f(x)$, т. е. f возрастает по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

Если $a = +\infty$, то $(x; +\infty]$ — окрестность точки $+\infty$ (даже некоторый шар при $x > -\infty$, по теореме 1.1) $\Rightarrow \forall x' \in \dot{B}(a, \delta) \cap X \quad x' > x \Rightarrow f(x') \geq f(x)$, т. е. f возрастает по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

Аналогично доказывается: если $X = \text{dom } f \subset [-\infty; a)$, $f \searrow$ (убывает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$) и a — предельная точка множества X , тогда f убывает по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

В частности, если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает ($n_1 \leq n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leq x_{n_2}$), то она возрастает по базе $\{\dot{B}(+\infty, \delta) \cap \mathbb{N}\} = \{A_N\}$, где множества $A_N = \{n \in \mathbb{N}: n > N\} = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ (аналогично для убывающей последовательности).

2) Пусть $X = \text{dom } f \subset (a; +\infty]$, $f \nearrow$ (возрастает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$) и a — предельная точка множества X . Тогда f **убывает** по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

Доказательство. a — предельная точка $X \Rightarrow X \neq \emptyset$ (замечание 1 к определению 2.4 предельной точки). Рассмотрим $\forall x \in X \subset (a; +\infty] \Rightarrow x > a$. Если $a \in \mathbb{R}$, то

$a - 1 < a < x \Rightarrow (a - 1; x)$ — окрестность точки a (следствие теоремы 1.1 о строении шаров) $\Rightarrow \exists B(a, \delta) \subset (a - 1; x)$. Тогда $\forall x' \in \dot{B}(a, \delta) \cap X \quad x' \in (a - 1; x) \Rightarrow x' < x \Rightarrow f(x') \leq f(x)$, т. е. f убывает по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

Если $a = -\infty$, то $[-\infty; x)$ — окрестность точки $-\infty$ (даже некоторый шар при $x < +\infty$, по теореме 1.1) $\Rightarrow \forall x' \in \dot{B}(a, \delta) \cap X \quad x' < x \Rightarrow f(x') \leq f(x)$, т. е. f убывает по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

Аналогично доказывается: если $X = \text{dom } f \subset (a; +\infty]$, $f \searrow$ (убывает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$) и a — предельная точка множества X , тогда f **возрастает** по базе $\{\dot{B}(a, \delta) \cap X\}$.

3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда f возрастает по базе $\{\dot{B}(0, \delta)\}$ и убывает по базе $\{(-\infty; -p) \cup (p; +\infty)\}$ (доказать в качестве упражнения).

4) $f(x, y) = \frac{1}{|x|+|y|}$, тогда f возрастает по базе $\{\dot{B}((0, 0), \delta)\}$ (упражнение).

Комментарий: интуитивный смысл возрастания по базе — ”если множество уменьшается, то значения функции на нём увеличиваются”.

Теорема 6.3 (Предел монотонного отображения).

Если $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ возрастает по базе \mathfrak{A} , то существует $\lim_{\mathfrak{A}} f = \sup\{f(x): x \in X\}$. При этом, если $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, и f ограничено сверху, то $\lim_{\mathfrak{A}} f$ конечен. Аналогично, если отображение f убывает по базе \mathfrak{A} , то существует $\lim_{\mathfrak{A}} f = \inf\{f(x): x \in X\}$. При этом, если $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, и f ограничено снизу, то $\lim_{\mathfrak{A}} f$ конечен.

Доказательство. Пусть f возрастает. Обозначим $b = \sup\{f(x): x \in X\}$.

1) $b \in \mathbb{R}$. По определению \sup , для $\forall \varepsilon > 0$ число $b - \varepsilon$ не является верхней границей множества $\{f(x): x \in X\}$, поэтому существует $x_0 \in X: f(x_0) > b - \varepsilon$. По определению возрастания по базе, $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0) > b - \varepsilon$. С другой стороны, b — верхняя граница множества $\{f(x): x \in X\}$, поэтому для $\forall x \in A \quad f(x) \leq b < b + \varepsilon$. Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \text{ т. е. } \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

2) $b = +\infty = \sup\{f(x): x \in X\}$, тогда любое $p \in \mathbb{R}$ не является верхней границей множества $\{f(x): x \in X\}$, поэтому существует $x_0 \in X: f(x_0) > p$. По определению возрастания по базе, $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0) > p$. Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p, \text{ т. е. } \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty.$$

3) $b = -\infty = \sup\{f(x): x \in X\} \Rightarrow \forall x \in X \quad f(x) = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty$ (предел постоянного отображения).

Если $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, то $\{f(x): x \in X\} \subset \mathbb{R}$ и если f ограничена сверху (т. е. множество $\{f(x): x \in X\} \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху), то $\lim_{\mathfrak{A}} f = \sup\{f(x): x \in X\} \in \mathbb{R}$ (конечный).

Для убывающего отображения доказательство аналогично: вместо верхней границы используется нижняя граница, вместо $b - \varepsilon$ используется $b + \varepsilon$ и наоборот, все неравенства, связанные с $f(x)$, заменяются на противоположные.

Важные частные случаи.

1) Если f возрастает (в обычном смысле) на $(-\infty; a) \cap \text{dom } f$ и a — левосторонняя предельная точка $X = \text{dom } f$, то существует $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x): x \in X, x < a\}$.

2) Если f возрастает (в обычном смысле) на $(a; +\infty) \cap \text{dom } f$ и a — правосторонняя предельная точка $X = \text{dom } f$, то существует $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x): x \in X, x > a\}$.

Предложить студентам самостоятельно сформулировать случаи 3) и 4) для функции, убывающей в обычном смысле, соответственно, на $(-\infty; a) \cap \text{dom } f$ и на $(a; +\infty) \cap \text{dom } f$.

5) Пусть $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Если f монотонна на $\langle a; b \rangle$, то во всех внутренних точках промежутка существуют и конечны оба односторонних предела: если $a < c < b$ и f возрастает, то $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$; если f убывает, то $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ (если a или b не входят в $\langle a; b \rangle$, то пределы в соответствующих точках существуют, но могут быть бесконечными).

6) Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает ($n_1 \leq n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leq x_{n_2}$), то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$; если при этом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, то её

предел конечен. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$; если при этом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, то её предел конечен.

7. Принцип сходимости.

Определение 7.1 (Верхний и нижний пределы функции).

Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, \mathfrak{A} — база множеств и существует $A_0 \in \mathfrak{A}: A_0 \subset X$. Тогда для любого $A \in \mathfrak{A}$ $f(A) \subset \overline{\mathbb{R}}$ и в $\overline{\mathbb{R}}$ существуют точные границы $\sup f(A)$ и $\inf f(A)$. Верхним пределом функции f по базе \mathfrak{A} называется $\inf\{\sup f(A): A \in \mathfrak{A}\}$. Нижним пределом функции f по базе \mathfrak{A} называется $\sup\{\inf f(A): A \in \mathfrak{A}\}$.

Обозначаются: верхний предел $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$, нижний предел $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$. Если (Y, ρ) — метрическое пространство, $X \subset Y$, a — предельная точка X , то верхний и нижний пределы в точке a (по базе $\{\overline{B}(a, r) \cap X\}$) обозначаются $\overline{\lim}_a f = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\underline{\lim}_a f = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$.

Для последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, соответственно, $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$ (поскольку $+\infty$ — единственная предельная точка \mathbb{N} , обычно не пишут $n \rightarrow \infty$).

Примеры. 1) $f(x) = \sin x$, $\mathfrak{A} = \{(p; +\infty)\}$. Тогда

$$\sup f(A) = \sup\{\sin x: x \in (p; +\infty)\} = 1, \quad \inf f(A) = \inf\{\sin x: x \in (p; +\infty)\} = -1$$

(наибольшие и наименьшие значения на $(p; +\infty)$ достигаются в точках $\pi/2 + 2\pi n$ и $-\pi/2 + 2\pi n$). Получаем:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \inf_{A \in \mathfrak{A}} \{\sup f(A)\} = 1, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \{\inf f(A)\} = -1.$$

2) $f(n) = x_n = n(-1)^n$, $\mathfrak{A} = \{m, m+1, \dots\}: m \in \mathbb{N}\}$. Тогда для $A = \{m, m+1, \dots\}$

$$\begin{aligned} \sup f(A) &= \sup\{n(-1)^n: n \geq m\} = +\infty \text{ (есть сколь угодно большие числа } x_{2k} = 2k); \\ \inf f(A) &= \inf\{n(-1)^n: n \geq m\} = -\infty \text{ (есть числа } x_{2k-1} = -(2k-1) \text{ меньше } \forall p \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow \overline{\lim} x_n &= \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup\{n(-1)^n: n \geq m\} = +\infty, \quad \underline{\lim} x_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf\{n(-1)^n: n \geq m\} = -\infty. \end{aligned}$$

Теорема 7.1 (Свойства верхнего и нижнего пределов).

1) Если $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \leq p$, то $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq p$;

если $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) \geq p$, то $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \geq p$.

2) Если $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) < p$;

если $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f > p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p$.

3) $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$.

4) Если $\exists \lim f|_{X_0} = b$ (по базе $\{A \cap X_0: A \in \mathfrak{A}\}$), то $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq b \leq \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$.

Доказательство. 1) $\forall x \in A \quad f(x) \leq p \Rightarrow p$ — верхняя граница для $f(A) \Rightarrow \sup f(A) \leq p$ (по определению \sup) $\Rightarrow \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \inf\{\sup f(B): B \in \mathfrak{A}\} \leq \sup f(A) \leq p$.

Для $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \sup\{\inf f(B): B \in \mathfrak{A}\}$ — аналогично (по определению $\inf f(A) \geq p$).

2) $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \inf\{\sup f(A): A \in \mathfrak{A}\} < p$, \inf — наибольшая нижняя граница множества $\{\sup f(A): A \in \mathfrak{A}\} \Rightarrow p$ — не нижняя граница множества $\{\sup f(A): A \in \mathfrak{A}\}$. Это означает, что $\exists A_1 \in \mathfrak{A}: \sup f(A_1) < p$. По определению базы (2.1):

$$\exists A \in \mathfrak{A}: A \subset A_0 \cap A_1. \quad A \subset A_0 \subset \text{dom } f \Rightarrow \forall x \in A \quad f(x) \text{ определено.}$$

$$A \subset A_1 \Rightarrow \forall x \in A \quad f(x) \in f(A_1) \Rightarrow f(x) \leq \sup f(A_1) < p.$$

$$\text{Получили: } \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) < p.$$

Для $\underline{\lim}$ — аналогично (вместо наибольшей нижней границы — наименьшая верхняя граница и неравенства заменяются на противоположные).

3) Доказываем от противного: предположим, что $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$, тогда существует $p \in \mathbb{R}$: $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p < \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$. По пункту 2

$$\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad f(x) < p, \quad \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f > p \Rightarrow \exists A_2 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_2 \quad f(x) < p$$

По определению базы $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A_1 \cap A_2, \quad B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in B$.

$$x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in A_1 \text{ и } x_0 \in A_2 \Rightarrow f(x_0) < p \text{ и } f(x_0) > p \text{ — противоречие.}$$

4) Обозначим $f_0 = f|_{X_0}$. От противного: предположим, что $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < b = \lim_{\{A \cap X_0\}} f_0$, тогда существует $p \in \mathbb{R}$: $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p < b$. По пункту 2

$$\exists A_0 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_0 \quad f(x) < p. \quad X_0 \subset X = \text{dom } f \Rightarrow \forall x \in A_0 \cap X_0 \quad f(x) = f_0(x) < p.$$

По теореме 5.1 (предельный переход в неравенстве с $g(x) \equiv p$) тогда $\lim_{\{A \cap X_0\}} f_0 = b \leq p$ — противоречие с $p < b$.

Оценку $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq b$ доказываем, предполагая $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f > p > b$ и снова используя пункт 2 (для $\underline{\lim}$).

Теорема 7.2 (Верхний и нижний пределы последовательности).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, $y_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\}$, $z_n = \inf\{x_m \mid m \geq n\}$. Тогда $y_n \searrow$, $y_n \rightarrow \overline{\lim} x_n$; $z_n \nearrow$, $z_n \rightarrow \underline{\lim} x_n$.

Доказательство. $\{x_m \mid m \geq n+1\} \subset \{x_m \mid m \geq n\}$. y_n — верхняя граница множества $\{x_m \mid m \geq n\} \Rightarrow y_n$ — верхняя граница множества $\{x_m \mid m \geq n+1\}$. Тогда $y_{n+1} = \sup\{x_m \mid m \geq n+1\} \leq y_n$ (поскольку $\sup\{x_m \mid m \geq n+1\}$ — наименьшая верхняя граница множества $\{x_m \mid m \geq n+1\}$). Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает, тогда по теореме 5.3 (предел монотонного отображения, частный случай последовательности)

$$\exists \lim y_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{ \sup\{x_m \mid m \geq n\} \} = \overline{\lim} x_n.$$

Для $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — аналогично:

$$z_n \text{ — нижняя граница для } \{x_m \mid m \geq n+1\} \Rightarrow z_{n+1} = \inf\{x_m \mid m \geq n+1\} \geq z_n.$$

Теорема 7.3 (Подпоследовательности, сходящиеся к $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда существуют подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n$ и $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$: $x_{n_m} \rightarrow \underline{\lim} x_n$.

Доказательство.

$$1) \text{ Пусть } \overline{\lim} x_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\} = +\infty. \quad (1)$$

Построим по индукции последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$: $\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{n_k} > k$. $\sup\{x_m \mid m \geq 1\} = +\infty \Rightarrow 1$ не является верхней границей $\{x_m \mid m \geq 1\} \Rightarrow \exists x_{n_1} > 1$.

Предположим, что уже построены $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ со свойством $x_{n_k} > k$. По (1)

$$y_{n_k+1} = \sup\{x_m \mid m \geq n_k+1\} = +\infty \Rightarrow k+1 \text{ не является верхней границей}$$

$$\text{множества } \{x_m \mid m \geq n_k+1\} \Rightarrow \exists m \geq n_k+1: x_m > k+1.$$

Выберем одно из таких m и обозначим его n_{k+1} . Тогда

$$n_{k+1} \geq n_k+1 > n_k \text{ и } x_{n_{k+1}} > k+1, \text{ т. е. } n_{k+1} \text{ — требуемое.}$$

Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ обладает свойством $+\infty \geq x_{n_k} > k \rightarrow +\infty$. Тогда по теореме 5.2 о зажатой функции $x_{n_k} \rightarrow +\infty = \overline{\lim} x_n$.

2) Пусть $\overline{\lim} x_n = b \in \mathbb{R}$. Построим по индукции последовательность

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : \forall k \in \mathbb{N} \quad b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}.$$

По теореме 6.2 $b = \lim y_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{k} > 0 \exists N_k : \forall n > N_k \quad |y_n - b| < \frac{1}{k} \Rightarrow b - \frac{1}{k} < y_n < b + \frac{1}{k}.$$

$$b = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \forall n > N_k \quad b \leq y_n < b + \frac{1}{k};$$

$$y_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\} \geq b > b - \frac{1}{k} \Rightarrow b - \frac{1}{k} \text{ не является верхней границей}$$

$$\text{множества } \{x_m \mid m \geq n\} \Rightarrow \exists m \geq n : x_m > b - \frac{1}{k}.$$

$$\text{Получили: } \forall k \in \mathbb{N} \exists N_k : \forall n > N_k \exists m \geq n : b - \frac{1}{k} < x_m \leq y_n < b + \frac{1}{k}. \quad (2)$$

Если взять $k = 1$, то существует $m \geq n > N_1$ со свойством (2). Обозначим через n_1 одно из таких m , тогда

$$b - 1 < x_{n_1} < b + 1.$$

Предположим, что $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ со свойством

$$b - \frac{1}{p} < x_{n_p} < b + \frac{1}{p}, \quad p = 1, \dots, k-1$$

уже построены. Тогда для $\forall n > \max\{N_k, n_{k-1}\} \geq N_k \exists m \geq n$ со свойством (2). Обозначим через n_k одно из таких m , тогда

$$n_k \geq n > n_{k-1}, \quad b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}.$$

Последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ построена.

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}, \quad b - \frac{1}{k} \rightarrow b, \quad b + \frac{1}{k} \rightarrow b \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow b = \overline{\lim} x_n$$

по теореме 5.2 о зажатой функции.

3) $\underline{\lim} x_n = -\infty = \lim y_n \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R} \exists N : \forall n > N \quad y_n < p$.

$$x_n \leq \sup\{x_m \mid m \geq n\} = y_n \Rightarrow \forall n > N \quad x_n < p \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$$

(т. е. в этом случае сама последовательность $x_n \rightarrow -\infty = \overline{\lim} x_n$).

Для $\underline{\lim}$ — аналогично (3 случая: 1) $\underline{\lim} = -\infty$; 2) $\underline{\lim} = b \in \mathbb{R}$; 3) $\underline{\lim} = +\infty$. Используется z_n вместо y_n , \sup вместо \inf). Рекомендация для студентов — записать эту часть доказательства самостоятельно. На экзамене для отличников — провести эту часть доказательства.

Комментарий на лекции: поскольку если $x_{n_k} \rightarrow c$, то $\underline{\lim} x_n \leq c \leq \overline{\lim} x_n$ и $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n$, $\{x_{n_m}\}_{m=1}^\infty : x_{n_m} \rightarrow \underline{\lim} x_n$, то $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$ ещё называют наибольшим и наименьшим пределами. При этом для произвольной базы \mathfrak{A} , вообще говоря, не существуют подмножества $X_1, X_2 \subset \text{dom } f$ такие, что $\lim_{\{A \cap X_1\}} f|_{X_1} = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\{A \cap X_2\}} f|_{X_2} = \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$. Но если $\exists \{A_n\}_{n=1}^\infty : \forall A_n \in \mathfrak{A}$ и $\forall A \in \mathfrak{A} \exists A_n \subset A$, то такие подмножества существуют (неплохая задача для отличников, но для экзамена сложновата).

Теорема 7.4 (Признак существования предела в $\overline{\mathbb{R}}$).

Пусть $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, \mathfrak{A} — база множеств. Тогда $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = b$.

Доказательство. " \Rightarrow "

1) $b \in \mathbb{R}$. $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Поскольку для любого $x \in A$ $f(x)$ определено, $A \subset \text{dom } f$, т. е. определены $\overline{\lim} f$ и $\underline{\lim} f$. По теореме 6.1, п.1 и 3 (свойства $\overline{\lim} f$ и $\underline{\lim} f$)

$$\forall x \in A \quad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon \leq \underline{\lim} f \leq \overline{\lim} f \leq b + \varepsilon.$$

В этом неравенстве перейдём пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (теорема 5.1 и предел суммы и разности):

$$b \leq \underline{\lim} f \leq \overline{\lim} f \leq b \Rightarrow \underline{\lim} f = \overline{\lim} f = b.$$

2) $b = +\infty$. $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p$. По теореме 6.1, п.1 и 3

$$\forall x \in A \quad p < f(x) \Rightarrow p \leq \underline{\lim} f \leq \overline{\lim} f \leq +\infty.$$

В этом неравенстве перейдём пределу при $p \rightarrow +\infty$:

$$+\infty \leq \underline{\lim} f \leq \overline{\lim} f \leq +\infty \Rightarrow \underline{\lim} f = \overline{\lim} f = +\infty.$$

3) $b = -\infty$ — аналогично (получить $-\infty \leq \underline{\lim} f \leq \overline{\lim} f \leq -\infty$).

" \Leftarrow "

1) $\underline{\lim} f = \overline{\lim} f = b$, $b \in \mathbb{R}$. По теореме 6.1, п.2 (свойства $\overline{\lim} f$ и $\underline{\lim} f$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = b < b + \varepsilon \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_1 \quad f(x) < b + \varepsilon \\ \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = b > b - \varepsilon \Rightarrow \exists A_2 \in \mathfrak{A}: \forall x \in A_2 \quad f(x) > b - \varepsilon \end{cases}$$

По определению базы, $\exists B \in \mathfrak{A}: B \subset A_1 \cap A_2$. Тогда

$$\forall x \in B \Rightarrow x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \text{ Получаем:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathfrak{A}: \forall x \in B \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

2) $b = +\infty$, $\forall p \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = +\infty > p \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p$ (по теореме 6.1, п.2), т. е.

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x \in A \quad f(x) > p \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty.$$

3) $b = -\infty$ — аналогично ($\forall p \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = -\infty < p$).

Пример. Ещё раз получаем отсутствие предела у \sin при $x \rightarrow +\infty$, поскольку $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \sin x = -1$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1$.

Определение 7.2 (Сходимость в себе).

Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $f: X \rightarrow Y$, \mathfrak{A} — база множеств. Говорят, что отображение f сходится в себе по базе \mathfrak{A} , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x, x' \in A \quad \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Комментарий: значения f на множествах из \mathfrak{A} становятся "сколь угодно близки" друг к другу.

Теорема 7.5 (Принцип сходимости).

Если $Y = \mathbb{R}$, \mathbb{C} , или \mathbb{R}^n , то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f \in Y \Leftrightarrow f$ сходится в себе по базе \mathfrak{A} .

Доказательство. "⇒". По определению метрики в Y , $\rho(a, b) = |a - b|$ (абсолютная величина, модуль комплексного числа или длина вектора). Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b \in Y \Rightarrow \text{для } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x, x' \in A \quad |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда по свойствам длины вектора

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - b + b - f(x')| \leq |f(x) - b| + |(-1)(f(x') - b)| = |f(x) - b| + |f(x') - b| < \varepsilon,$$

$$\text{т. е. } \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x, x' \in A \quad \rho(f(x), f(x')) = |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

"⇐"

1) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, f сходится в себе.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x, x' \in A \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon \Rightarrow f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon.$$

При фиксированном $x' \in A$ правая и левая части этого неравенства — константы, принадлежащие \mathbb{R} . По теореме 6.1 (свойства верхнего и нижнего пределов, п.1 и 3) отсюда следует:

$$f(x') - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq f(x') + \varepsilon \Rightarrow \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f, \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \in \mathbb{R} \text{ и } 0 \leq \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f - \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq 2\varepsilon.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (теорема 5.1), получим:

$$0 \leq \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f - \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{по предыдущей теореме 6.4 } \exists \lim_{\mathfrak{A}} f \in \mathbb{R}.$$

Комментарий: хороший вопрос для студентов на лекции — нельзя ли сократить доказательство и перейти к пределу в предыдущем неравенстве $f(x') - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leq f(x') + \varepsilon$ и получить странный результат $\lim_{\mathfrak{A}} f = f(x')$? Грамотный ответ: поскольку $x' \in A$ и множество A , вобще говоря, зависит от ε , то $f(x')$ при предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ нельзя считать константой.

2) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ или \mathbb{R}^n (рассматриваем \mathbb{C} как \mathbb{R}^2), f сходится в себе.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}: \forall x, x' \in A \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

$$f(x) - f(x') = (f_1(x) - f_1(x'), \dots, f_n(x) - f_n(x')), \quad f_1, \dots, f_n \text{ — координатные функции.}$$

По оценке длины вектора через его координаты (введение):

$$\begin{aligned} \forall k = 1, \dots, n, \forall x, x' \in A \quad |f_k(x) - f_k(x')| \leq |f(x) - f(x')| < \varepsilon \\ \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad f_k \text{ сходится в себе.} \end{aligned}$$

По доказанному в п. 1 $\forall k = 1, \dots, n \exists \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме 2.9 о покоординатной сходимости $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Некоторые частные случаи.

1) Принцип сходимости для последовательности (Больцано-Коши).

$$\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}: \forall m, n > N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Замечание. Поскольку при $m = n$ $|x_m - x_n| = 0 < \varepsilon$ и при $m \neq n$ всегда можно считать, что $m > n$, принцип сходимости можно сформулировать так:

$$\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}: \forall m > n > N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

(такая формулировка удобна для теории рядов).

2) Принцип сходимости Больцано-Коши для функции в точке $b \in \overline{\mathbb{R}}$ слева.

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B < b: \forall x, x' \in \text{dom } f: B < x < x' < b \quad |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

(такая формулировка удобна для теории несобственных интегралов).

Доказательство. По определению 2.7 предел слева — это предел по базе $\{\dot{B}(b, \delta) \cap X_{b-}\}$ (соответственно, сходимости в себе — по этой же базе). Если $b \in \mathbb{R}$, то $\dot{B}(b, \delta) \cap X_{b-} = (b - \delta; b) \cap X$ (односторонние пределы на языке неравенств, после определения 2.7). Если $b = +\infty$, то по определению предела в точке $+\infty$ $\dot{B}(+\infty, \delta) \cap X = (p; +\infty) \cap X$. Обозначим: $B = b - \delta$ для $b \in \mathbb{R}$ и $B = p$ для $b = +\infty$, тогда в обоих случаях

$$\dot{B}(b, \delta) \cap X_{b-} = (B; b) \cap X \text{ и } x, x' \in (B; b) \cap X \Leftrightarrow B < x, x' < b \text{ и } x, x' \in X.$$

Аналогично случаю последовательности, всегда можно считать, что $x < x'$.

Задание для студентов: сформулировать и доказать аналогичное утверждение для предела справа.